ΕΤΥ: Ανάλυση Απόδοσης Π.Σ.
Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Τελική Εξέταση
12/02/16
Διάρκεια Εξέτασης: 3 Ώρες

Ονοματεπώνυμο: ______________________

Αριθμός Μητρώου: ______________________

Υπογραφή: ______________________

Ερώτημα:	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
Μονάδες:	2	2	2	2	2	2	12
Βαθμός:							

Το ανά χείρας φύλλο εξέτασης περιέχει 6 σελίδες και 6 ερωτήματα. Σιγουρευτείτε πως δεν λείπει καμία. Εισάγετε όλα τα απαραίτητα στοιχεία στην κορυφή της παρούσας σελίδας και επίσης γράψτε το ΑΜ σας στην κορυφή κάθε επόμενης σελίδας. Παρατηρήστε πως το σύνολο των βαθμών των θεμάτων είναι 12 ενώ για την επίτευξη μέγιστης δυνατής βαθμολογίας αρκούν 10 βαθμοί. Καλή επιτυχία!

Ερώτημα 1 (2 μονάδες)

Έστω $\{X_n\}$ μία αλυσίδα Markov με χώρο κατάστασης $S = \{0, 1, ..., N\}$, και έστω $\{A_k, k \leq N_1\}$ και $\{B_k, k \leq N_2\}$ τα σύνολα των επαναληπτικών και μεταβατικών κλάσεων επικοινωνίας αντίστοιχα (αν δεν υπάρχουν μεταβατικές κλάσεις επικοινωνίας τότε $N_2 = 0$).

Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις σημειώνοντας ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ.

(α΄) Αν $N_1 + N_2 = 1$ τότε η κατάσταση $i = 0$ είναι επαναληπτική.

(α΄) **ΣΩΣΤΟ**

(β΄) Αν η κατάσταση $i = 0$ είναι απορροφητική τότε ισχύει $N_1 = 1, A_1 = \{0\}$, και όλες οι άλλες καταστάσεις είναι μεταβατικές.

(β΄) **ΛΑΘΟΣ**

(γ΄) Αν $N_1 = 1$ και $j \in B_1$, υπάρχει μία κατάσταση $i \in A_1$ και ένας ακέραιος $k > 0$ τέτοιος ώστε $P_{ji}^{(k)} > 0$.

(γ΄) **ΣΩΣΤΟ**

(δ΄) Αν $N_2 = 1$ και $j \in A_1$, τότε υπάρχει μία κατάσταση $i \in B_1$ και ένας ακέραιος $k > 0$ τέτοιος ώστε $P_{ij}^{(k)} > 0$.

(δ΄) **ΛΑΘΟΣ**

(ε΄) Ισχύει $A_k \cap A_m = \emptyset, B_k \cap B_m = \emptyset$ για $k \neq m, A_k \cap B_m = \emptyset$ για $k \leq N_1, m \leq N_2$, και $\left(\cup_{k=1}^{N_1} A_k\right) \cup \left(\cup_{m=1}^{N_2} B_m\right) = S$.

(ε΄) **ΣΩΣΤΟ**

(στ΄) Υπάρχει κατάσταση $j \in A_k$ για κάποιο $k \leq N_1$, τέτοια ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \infty$.

(στ΄) **ΛΑΘΟΣ**

Ερώτημα 2 (2 μονάδες)

Οι αφίξεις αυτοκινήτων σε ένα βενζινάδικο γίνονται σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda =$

15 την ώρα. Το βενζινάδικο έχει μόνο μία αντλία βενζίνης που μπορεί να εξυπηρετήσει ένα αυτοκίνητο, καθώς και χώρο αναμονής για έως 2 ακόμα αυτοκίνητα. Υποθέτουμε πως ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός αυτοκινήτου είναι 2 λεπτά.

(α΄) Υπολογίστε τα $\mathrm{E}[N]$ και $\mathrm{E}[N_Q]$. Γιατί ισχύει $\mathrm{E}[N] \neq \mathrm{E}[N_Q] + 1$;

> **Λύση:** Πρόκειται για σύστημα $M/M/1/3$....

(β΄) Αν υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο που μόλις φτάνει και βρίσκει τις τρεις θέσεις κατειλημμένες, πηγαίνει σε άλλο βενζινάδικο, τι ποσοστό πιθανών πελατών χάνεται;

> **Λύση:** Για να χαθεί ένας πελάτης του συστήματος, θα πρέπει να έρθει στο σύστημα την ώρα που αυτό είναι πλήρες, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τη γνωστή πιθανότητα blocking...

(γ΄) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος απόκρισης (αναμονή και εξυπηρέτηση) ενός αυτοκινήτου στο συγκεκριμένο βενζινάδικο?

> **Λύση:** Ο πραγματικός ρυθμός με τον οποίο εισέρχονται τα αυτοκίνητα στο βενζινάδικο είναι $\lambda(1 - \mathrm{Pr}[\text{blocking}])$ Συνεπώς, από τον νόμο του Little προκύπτει κατευθείαν:
>
> $$\mathrm{E}[T] = \frac{\mathrm{E}[N]}{\lambda(1 - \mathrm{Pr}[\text{blocking}])} = ...$$

Ερώτημα 3 (2 μονάδες)

Μία εταιρεία διαθέτει μεγάλο αριθμό από υπολογιστές οι οποίοι παθαίνουν βλάβη με ένα ρυθμό 2 υπολογιστές κάθε 8ωρο και στέλνονται στο τμήμα επιδιόρθωσης. Έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά πως αυτές οι βλάβες συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Έχει επίσης παρατηρηθεί πως οι βλάβες εμπίπτουν σε μία από τις εξής τρεις κατηγορίες: η πρώτη η οποία συμβαίνει 60% των φορών χρειάζεται ακριβώς μία ώρα για να επιδιορθωθεί· η δεύτερη η οποία συμβαίνει 30% των φορών χρειάζεται 3 ώρες για να επιδιορθωθεί. Η τρίτη κατηγορία βλαβών χρειάζεται ακριβώς 5 ώρες για να επιδιορθωθεί.

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο επόμενος υπολογιστής που θα χαλάσει να μπει για επιδιόρθωση κατευθείαν, χωρίς να χρειαστεί να περιμένει;

> **Λύση:** Πρόκειται για απλό $M/G/1$ σύστημα, με $\lambda = 0.25$ υπολογιστές την ώρα. Για να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα πρέπει να γνωρίζομε το utilization του συστήματος, το οποίο εκφράζει την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο σύστημα, ή ισοδύναμα στην περίπτωσή μας την πιθανότητα ένας νέος υπολογιστής που χαλάει να χρειαστεί να περιμένει. Το μόνο που μας λείπει είναι η μέσος χρόνος εξυπηρέτησης τον οποίο μπορούμε να βρούμε κατευθείαν από την εκφώνηση.
>
> Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο εξυπηρέτησης. Η κατανομή της είναι:
>
> $$\mathrm{Pr}[X = 1] = 0.6 \qquad \mathrm{Pr}[X = 3] = 0.3 \qquad \mathrm{Pr}[X = 5] = 0.1$$
>
> Συνεπώς, η μέση τιμή της είναι:
>
> $$\mathrm{E}[X] = 1 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.1 = 2 \text{ ώρες}$$

Άρα, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = \frac{1}{\mathrm{E}[X]} = 0.5$ υπολογιστές την ώρα. Οπότε το utilization του συστήματος είναι $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.25}{0.5} = \frac{1}{2}$.
Συμπερασματικά, η πιθανότητα ο επόμενος υπολογιστής που θα χαλάσει να μπει για επιδιόρθωση κατευθείαν, χωρίς να χρειαστεί να περιμένει είναι:

$$1 - \rho = \frac{1}{2}$$

(β΄) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός από χαλασμένους υπολογιστές που βρίσκονται στο τμήμα επιδιόρθωσης;

Λύση: Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το μέσο αριθμό υπολογιστών που περιμένουν στην ουρά συν τον μέσο αριθμό υπολογιστών που επιδιορθώνονται. Δηλαδή:

$$\mathrm{E}[N] = \mathrm{E}[N_Q] + \rho$$

Το ρ το έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα. Για τον υπολογισμό του $\mathrm{E}[N_Q]$ θα χρειαστούμε την P-K formula. Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης X.

$$\mathrm{E}[X^2] = 1^2 \cdot 0.6 + 3^2 \cdot 0.3 + 5^2 \cdot 0.1 = 5.8 \text{ ώρες}^2$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\mathrm{E}[N_Q] = \frac{\lambda^2\, \mathrm{E}[X^2]}{2(1-\rho)} = 0.3625$$

και η τελική απάντηση είναι 0.8625.

Ερώτημα 4 (2 μονάδες)

Έστω $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ μία αμείωτη και εργοδική αλυσίδα Markov. Ας υποθέσουμε ότι η αλυσίδα είναι σε *ισορροπία*, έτσι ώστε

$$\Pr[X_n = i] = \pi_i \qquad \text{για όλες τις καταστάσεις } i \text{ και για κάθε } n$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η διαδικασία $\{X_k, k = ..., n+1, n, ...\}$, για την οποία ο χρόνος είναι ανεστραμμένος, είναι επίσης μία αλυσίδα Markov, της οποίας οι πιθανότητες μεταβάσεων δίνονται από

$$q_{ij} \triangleq \Pr[X_n = j | X_{n+1} = i] = p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i} \qquad \text{για όλες τις καταστάσεις } i, j$$

Λέμε ότι η αλυσίδα $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ είναι *αντιστρέψιμη* αν $q_{ij} = p_{ij}$ για όλα τα i, j. Να δείξετε ότι η αλυσίδα Markov της οποίας ο χώρος κατάστασης είναι το σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$ και έχει μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη.

Λύση: Αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \pi^\top \mathbf{P} &= \pi^\top \\ \pi^\top \mathbf{e} &= 1 \end{aligned}$$

και να επαληθεύσουμε πως ισχύει $p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i} = p_{ij}$ για κάθε i, j. Για τη συγκεκριμένη αλυσίδα του θέματος, η λύση προκύπτει άμεσα λόγω συμμετρίας, και είναι

$$\pi^\top = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

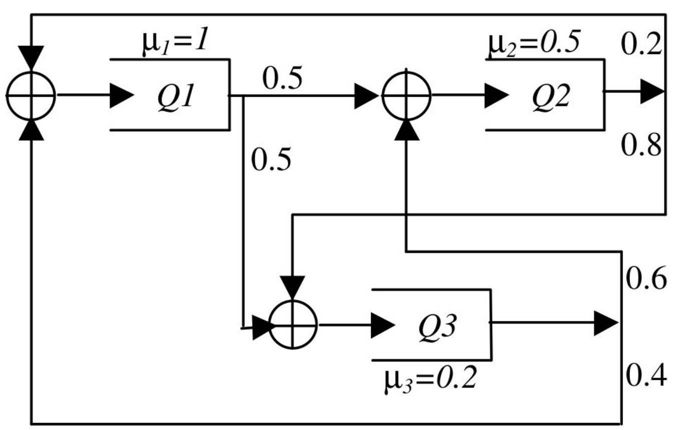
Συνεπώς, έχουμε για κάθε i, j:

$$p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i} = p_{ji}\cancelto{1}{\frac{\pi_j}{\pi_i}} = p_{ji} = p_{ij}$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από την παρατήρηση πως το μητρώο $\mathbf{P}$ είναι συμμετρικό. Συνεπώς ισχύει $q_{ij} = p_{ij}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ερώτημα 5 (2 μονάδες)

Θεωρούμε το δίκτυο του Σχήματος 1 με έναν εξυπηρετητή και σταθμούς αναμονής με ουρές πρακτικά άπειρης χωρητικότητας. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης σε κάθε ουρά ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ο αριθμός εργασιών στο δίκτυο είναι $N = 4$.



Σχήμα 1: Κλειστό δίκτυο

(α΄) Με τη χρήση του αλγόριθμου MVA να υπολογίσετε τα πραγματικά Utilizations και τα πραγματικά Throughputs των σταθμών του δικτύου.

Λύση: Ακολουθούμε τα βήματα του αλγορίθμου MVA για κλειστά δίκτυα και βρίσκουμε πως τα πραγματικά utilizations είναι:

$$U_1 = 0.114 \quad U_2 = 0.350 \quad U_3 = 0.985$$

και τα πραγματικά Throughputs

$$X_1 = 0.114 \quad X_2 = 0.175 \quad X_3 = 0.197$$

(β΄) Αν σας έδιναν τη δυνατότητα να βελτιώσετε την απόδοση ενός και μόνο από τους σταθμούς, ποιον θα βελτιώνατε και γιατί;

Λύση: Για να βελτιωθεί η απόδοση του δικτύου θα πρέπει να βελτιώσουμε το bottleneck, δηλαδή το σταθμό με το μεγαλύτερο utilization. Στην περίπτωσή μας αυτός ο σταθμός είναι ο Q_3.

Ερώτημα 6 (2 μονάδες)

Θεωρείστε μία στοίβα με κάρτες οι οποίες είναι αριθμημένες $1, 2, \ldots, 52$. Επαναλαμβάνουμε την παρακάτω διαδικασία ανακατέματος:

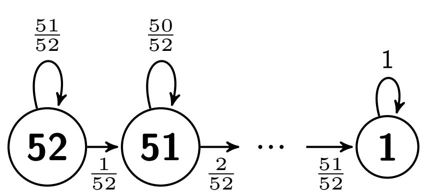
- Κάθε χρονική στιγμή παίρνουμε την κάρτα που βρίσκεται στην κορυφή και την τοποθετούμε τυχαία και ομοιόμορφα σε μια από τις 52 πιθανές θέσεις (δηλαδή είτε στην κορυφή είτε στον πάτο είτε σε μία από τις 50 ενδιάμεσες θέσεις).

Πόσες χρονικές στιγμές κατά μέσο όρο θα χρειαστούν για να φτάσει στην κορυφή η κάρτα που αρχικά βρίσκεται στον πάτο;

Λύση: Θεωρούμε την αλυσίδα Markov της οποίας οι καταστάσεις δηλώνουν την τρέχουσα θέση της κάρτας που αρχικά βρίσκονταν στον πάτο. Ισχύει πως η αρχική κατάσταση της αλυσίδας είναι $X_0 = 52$, ενώ η κατάσταση αλλάζει με τυχαίο τρόπο σε κάθε βήμα της διαδικασίας ανακατέματος της στοίβας, ανάλογα με το αν η τρέχουσα κάρτα που βρίσκεται στην κορυφή τοποθετηθεί πάνω ή κάτω από αυτήν.

Το ερώτημα της εκφώνησης, μπορεί να προσεγγιστεί πολύ απλά, αν θεωρήσουμε την κατάσταση 1 ως απορροφητική, και υπολογίσουμε το μέσο αριθμό βημάτων που απαιτούνται μέχρι η αλυσίδα να απορροφηθεί στην 1, δεδομένου πως αρχικά βρίσκεται στην 52.

Συγκεκριμένα, έχουμε:



Οπότε, συμβολίζοντας μ_i τον μέσο αριθμό των βημάτων μέχρι την απορρόφηση δεδομένου πως η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, άμεσα παίρνουμε πως για κάθε μ_i, $i > 1$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mu_i &= (1+\mu_i)\tfrac{i-1}{52} + (1+\mu_{i-1})\tfrac{52-(i-1)}{52} \\ \Leftrightarrow \tfrac{52-i+1}{52}\mu_i &= 1 + \tfrac{52-i+1}{52}\mu_{i-1} \\ \Leftrightarrow \mu_i &= \tfrac{52}{52-i+1} + \mu_{i-1} \qquad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, 52. \qquad [1] \end{aligned}$$

ενώ ισχύει εξ'ορισμού πως $\mu_1 = 0$. Οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\mu_{52} = 52(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{51})$$