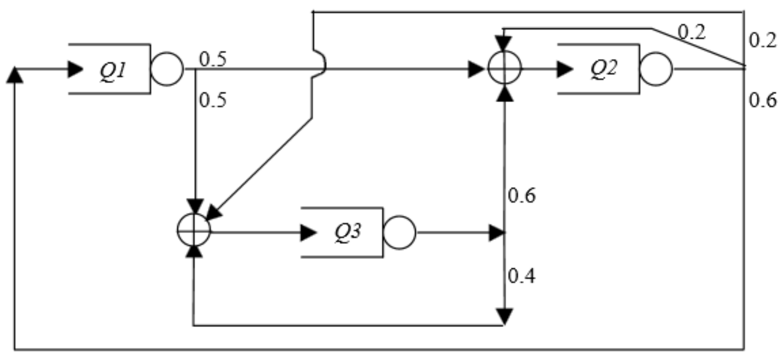
Επιπλέον Ασκήσεις Operational Analysis

30 Δεκεμβρίου 2016

Πρόβλημα 1

Θεωρείστε το κλειστό δίκτυο συστημάτων αναμονής εκθετικής εξυπηρέτησης που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



1. Οι μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης των συστημάτων Q_1, Q_2 και Q_3 είναι $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 1$ και $\mu_3 = 0.5$ αντίστοιχα. Αν το σύστημα έχει συνολικά 3 χρήστες, να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο MVA και να βρείτε το μέσο αριθμό πελατών, N_i σε κάθε σύστημα $Q_i, i = 1, 2, 3$.

   Λύση: Από το νόμο εξαναγκασμένης ροής για αυτήν την περίπτωση έχουμε:

   $$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.6\lambda_2 \\ \lambda_3 &= 0.5\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + 0.4\lambda_3 \end{aligned}$$

   Το οποίο δίνει: $\lambda_2 = 1.667\lambda_1$ και $\lambda_3 = 1.389\lambda_1$. Επιλέγοντας το Q_1 σαν σύστημα αναφοράς παίρνουμε τα Visit ratios

   $$V_1 = 1 \quad V_2 = 1.667 \quad V_3 = 1.389$$

   Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, τα βήματα του MVA θα έχουν ως εξής:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & m=0 & N_1=0 & N_2=0 & N_3=0 \\
(2) & m=1 & W_1=2 & W_2=1 & W_3=2 \\
& & \lambda = \frac{1}{2+1.667+(2\cdot 1.389)} = 0.155 & & \\
& & N_1=0.31 & N_2=0.258 & N_3=0.431 \\
(3) & m=2 & W_1=2.62 & W_2=1.258 & W_3=2.862 \\
& & \lambda = \frac{2}{2.62+(1.667\cdot 1.258)+(1.389\cdot 2.862)} = 0.23 & & \\
& & N_1=0.603 & N_2=0.482 & N_3=0.914 \\
(4) & m=3 & W_1=3.206 & W_2=1.482 & W_3=3.828 \\
& & \lambda = \frac{3}{3.206+(1.667\cdot 1.482)+(1.389\cdot 3.828)} = 0.273 & & \\
& & N_1=0.875 & N_2=0.674 & N_3=1.451
\end{array}$$

Άρα ο μέσος αριθμός πελατών σε κάθε σύστημα θα είναι: $N_1 = 0.875, N_2 = 0.674, N_3 = 1.451$

2. Θεωρείστε το ίδιο σύστημα με M χρήστες, όπου το M πολύ μεγάλο. Πώς θα κατανεμηθούν οι M χρήστες στα τρία συστήματα αναμονής?

   Λύση: Παρατηρήστε πως αν επιλέξουμε $\lambda_1 = \mu_1 = 0.5$, τότε οι σχετικές χρησιμοποιήσεις των συστημάτων θα είναι $u_1 = 1, u_2 = 0.833, u_3 = 1.389$. Συνεπώς παρατηρούμε πως το bottleneck του συστήματος είναι το σύστημα Q_3. Αυτό σημαίνει πως για αρκετά μεγάλο M, θα υπάρχει πάντα ένας ή περισσότεροι πελάτες στο Q_3 και συνεπώς ο ρυθμός αναχωρήσεων από το σύστημα αυτό θα προσεγγίζει τον ρυθμό εξυπηρέτησής του, $\mu_3 = 0.5$.
   Συνεπώς, για μεγάλο M, έχουμε:

$$\lambda_3 = \mu_3 = 0.5$$

   Χρησιμοποιώντας αυτό μαζί με το νόμο εξαναγκασμένης ροής, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.5/1.389 = 0.36 \\
\lambda_2 &= 1.667 \cdot 0.36 = 0.6 \qquad [1]
\end{aligned}$$

   Άρα για $M \to \infty$, θα έχουμε:
   Πραγματικό Throughput: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.36, 0.60, 0.50)$
   Πραγματικό Utilization: $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (0.72, 0.60, \rho_3 \to 1)$
   Συνεπώς με χρήση του αποτελέσματος:

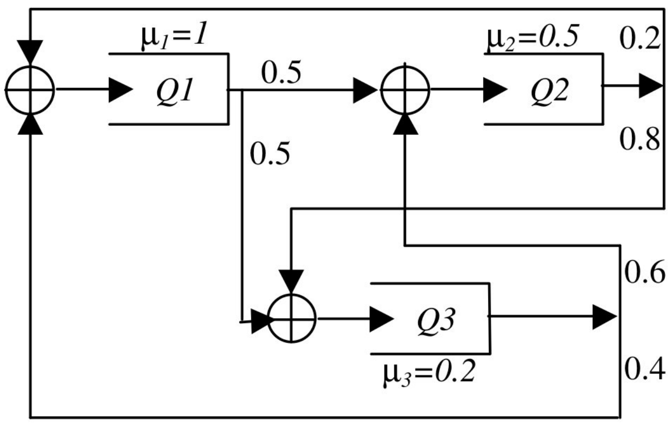
$$N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

   παίρνουμε τελικά,

$$N_1 = 2.57 \qquad N_2 = 1.5 \qquad N_3 = (M - 4.07)$$

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε το δίκτυο του Σχήματος 1 με έναν εξυπηρετητή και σταθμούς αναμονής με ουρές πρακτικά άπειρης χωρητικότητας. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης σε κάθε ουρά ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ο αριθμός εργασιών στο δίκτυο είναι $N = 4$.



Σχήμα 1: Κλειστό δίκτυο

1. Με τη χρήση του αλγόριθμου MVA να υπολογίσετε τα πραγματικά Utilizations και τα πραγματικά Throughputs των σταθμών του δικτύου.

   Λύση: Ακολουθούμε τα βήματα του αλγορίθμου MVA για κλειστά δίκτυα και βρίσκουμε πως τα πραγματικά utilizations είναι:

   $$U_1 = 0.114 \quad U_2 = 0.350 \quad U_3 = 0.985$$

   και τα πραγματικά Throughputs

   $$X_1 = 0.114 \quad X_2 = 0.175 \quad X_3 = 0.197$$

2. Αν σας έδιναν τη δυνατότητα να βελτιώσετε την απόδοση ενός και μόνο από τους σταθμούς, ποιον θα βελτιώνατε και γιατί;

   Λύση: Για να βελτιωθεί η απόδοση του δικτύου θα πρέπει να βελτιώσουμε το bottleneck, δηλαδή το σταθμό με το μεγαλύτερο utilization. Στην περίπτωσή μας αυτός ο σταθμός είναι ο Q_3.