

# Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων

## Ακαδημαϊκό έτος 2015-2016

### 1ο Σετ Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/12/2015

#### Η Μαρκοβιανή Νοσοκόμα

Μία νοσοκόμα εργάζεται σε ένα θάλαμο νοσηλείας με 6 ασθενείς. Κάθε φορά επισκέπτεται έναν ασθενή  $i$ , τον φροντίζει, και στη συνέχεια μεταβαίνει στον επόμενο ασθενή  $j$ , με την ίδια πάντα πιθανότητα  $p_{ij}$ . Οι τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης της νοσοκόμας φαίνονται στο μητρώο  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (α) Εξηγήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία επισκέψεων της νοσοκόμας ορίζει ομογενή αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου. Χαρακτηρίστε τις καταστάσεις της αλυσίδας. Υπάρχουν πιθανότητες “μόνιμης κατάστασης” (δηλαδή μοναδική οριακή κατανομή ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης) για τη συγκεκριμένη αλυσίδα; Αν ναι, υπολογίστε τις. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.
- (β) Υποθέτουμε πως η νοσοκόμα ξεκινάει τις θεραπείες από τον ασθενή 1. Ποια είναι η πιθανότητα η νοσοκόμα μακροπρόθεσμα να εργάζεται αποκλειστικά για τους ασθενείς 2, 3; (Υπόδειξη: Προσεγγίστε το ερώτημα αναδρομικά! Για παράδειγμα ποια θα ήταν η απάντηση αν σας δίνονταν οι αντίστοιχες πιθανότητες ξεκινώντας από τις άλλες καταστάσεις εκτός της 1?)
- (γ) Γνωρίζουμε πως αυτή τη στιγμή η νοσοκόμα θεραπεύει τον ασθενή 5 αλλά δε ξέρουμε πότε αυτό ξεκίνησε. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στους ασθενείς 1, 4 και 6 μέχρι να καταλήξει στον ασθενή 5;
- (δ) Έστω πως το μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$ , αλλάζει ως εξής:

$$p_{21} = 1/4, \quad p_{22} = 1/4, \quad p_{31} = 1/3, \quad p_{33} = 0, \quad p_{54} = 3/5, \quad p_{55} = p_{56} = 1/5$$

Μακροπρόθεσμα, τί ποσοστό του χρόνου εργασίας της αφιερώνει η νοσοκόμα στον ασθενή 6;

- (ε) Υποθέτουμε πως όταν η νοσοκόμα φροντίζει τον ασθενή  $i$ , αυτός, ως ένδειξη ευγνωμοσύνης και χαράς, την ανταμείβει χαρίζοντάς της  $r(i)$  καραμέλες,  $i = 1, \dots, 6$ . Έτσι, αν  $X_1, X_2, \dots, X_k$  είναι τυχαίες μεταβλητές που δείχνουν τους ασθενείς που φρόντισε η νοσοκόμα από την αρχή της εργασίας της μέχρι και πριν την  $(k+1)$ -στή επίσκεψη, τότε, η τυχαία μεταβλητή  $R_k = r(X_1) + \dots + r(X_k)$  είναι το σύνολο των καραμελών

που έχει μαζέψει (υποθέτουμε πως οι ασθενείς έχουν απεριόριστο αριθμό καραμελών). Αναζητάμε τις τιμές των δεσμευμένων μέσων ανταμοιβών

$$m_k(i) = E[R_k | X_1 = i]$$

δεδομένου πως η νοσοκόμα ξεκινά από τον ασθενή  $i$ . Για παράδειγμα ισχύει πως  $m_1(k) = r(k)$  ενώ για τα  $m_2(k)$  θα χρειαστούν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος.

- i) Να βρεθεί μια αναδρομική σχέση που να υπολογίζει τα  $m_{k+1}(1), m_{k+1}(2), \dots, m_{k+1}(6)$  μέσω των  $m_k(1), m_k(2), \dots, m_k(6)$ . Στη συνέχεια, να γενικεύσετε για μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα με καταστάσεις  $1, 2, \dots, n$  και να γράψετε την αναδρομική σχέση που προκύπτει σε μία απλή μητρική εξίσωση.
- ii) Χρησιμοποιώντας Matlab, Python, R ή οποιαδήποτε άλλη γλώσσα θέλετε, γράψτε ένα απλό script που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο αριθμό από καραμέλες που μαζεύει η νοσοκόμα για δεδομένο αριθμό επισκέψεων σε ασθενείς,  $k$ . Το διάνυσμα με τις “ανταμοιβές” της νοσοκόμας από κάθε ασθενή θεωρείστε πως δίνεται σαν είσοδος στο απλό πρόγραμμα που θα φτιάξετε. Για παράδειγμα, αν το διάνυσμα των ανταμοιβές της νοσοκόμας είναι  $2, 1, 2, 3, 1, 5$  καραμέλες από τους ασθενείς  $1, 2, \dots$  και  $6$  αντίστοιχα, ξεκινώντας από τον ασθενή  $1$ , αν εργαστεί μέχρι να συμπληρώσει  $k = 50$  επισκέψεις, κατά μέσο όρο, θα μαζέψει  $99.5259$  καραμέλες. Τί παρατηρείτε να συμβαίνει στα σχετικά κέρδη της νοσοκόμας καθώς το  $k$  μεγαλώνει?

**Διαδικαστικά** Η εργασία είναι προαιρετική και μετράει μόνο θετικά στην τελική βαθμολογία του μαθήματος (έως και μία μονάδα). Μαζί με το 2ο σετ ασκήσεων, που θα ανακοινωθεί μέσα στον Δεκέμβριο, θα μπορείτε να εξασφαλίσετε συνολικά μέχρι και 2.5 μονάδες. Η προθεσμία για την παράδοση των λύσεων είναι η **Δευτέρα 21/12/2015**. Η Παράδοση της άσκησης θα γίνει ηλεκτρονικά στο eclass site του μαθήματος. Επίσης, τυχόν απορίες σχετικά με την άσκηση θα συζητηθούν επίσης στη φόρμα συζητήσεων του eclass site. Τις λύσεις σας θα πρέπει να τις παραδώσετε σε ένα pdf αρχείο, το οποίο θα πρέπει να ετοιμάσετε ιδανικά σε L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X χρησιμοποιώντας το πολύ απλό template που δίνουμε στα έγγραφα του μαθήματος. Σε κάθε περίπτωση οι λύσεις θα πρέπει να ετοιμαστούν με υπολογιστή και όχι χειρόγραφα.