Γιάννης Γαροφαλάκης, Καθηγητής
Αθανάσιος Ν.Νικολακόπουλος, Υποψ.Διδάκτωρ

Σημειώσεις: Πιθανότητες και Στοχαστικές Διαδικασίες

Συνοπτική Παρουσίαση Χρήσιμων Εννοιών

18 Οκτωβρίου 2011

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις δεν έχουν σαν στόχο να καλύψουν αναλυτικά την ύλη της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Διαδικασιών. Στη βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος σχετικών έργων που αναπτύσσουν τις συγκεκριμένες περιοχές εκτεταμένα και με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας και έμφασης.

Εδώ περιοριζόμαστε σε μία συνοπτική παρουσίαση των βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων που αποτελούν τη μαθηματική βάση των αναλυτικών εργαλείων που αναπτύσσονται στα πλαίσια του μαθήματος (Θεωρία Ουρών Αναμονής, Αλυσίδες Markov, Ανοικτά και Κλειστά Δίκτυα Jackson).

Πάτρα,
Οκτώβριος 2011

Γιάννης Γαροφαλάκης
Αθανάσιος Ν.Νικολακόπουλος

Περιεχόμενα

1

Πιθανότητες

Στην ενότητα αυτή κάνουμε μία σύντομη επισκόπηση μερικών βασικών στοιχείων της θεωρίας πιθανοτήτων, τα οποία χρειάζονται στη μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει ήδη εξοικειωθεί με τη θεωρία πιθανοτήτων και γι'αυτό η παρουσίαση στην ενότητα αυτή θα είναι σύντομη. Τέλος, στα πλαίσια των συγκεκριμένων σημειώσεων θα προσπαθήσουμε όσο είναι δυνατόν να κινηθούμε σε ένα διαισθητικό επίπεδο χωρίς να αποπροσανατολίσουμε τον αναγνώστη με πάρα πολλές θεωρητικές λεπτομέρειες.

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Πιθανοτικά μοντέλα

Ο σκοπός της θεωρίας πιθανοτήτων είναι παροχή μαθηματικών εργαλείων για την ανάλυση πολύπλοκων προβλημάτων που ενέχουν την έννοια της *τυχαιότητας*. Τέτοια προβλήματα προκύπτουν κατά κόρον σε όλα τα στάδια σχεδιασμού και ανάλυσης σύνθετων πληροφοριακών συστημάτων. Ένα *πιθανοτικό μοντέλο* είναι η μαθηματική περιγραφή ενός υπό εξέταση προβλήματος.

Κάθε πιθανοτικό μοντέλο, λοιπόν, θα πρέπει να είναι σε συμφωνία με το θεμελιώδες θεωρητικό πλαίσιο της θεωρίας πιθανοτήτων και κατά συνέπεια θα πρέπει να περιλαμβάνει δύο βασικά συστατικά μέρη:

1. Το **Δειγματοχώρο** Ω, που είναι το σύνολο όλων των πιθανών εκβάσεων ενός πειράματος.
2. Ένα **Μέτρο Πιθανότητας**, μία "συνταγή" δηλαδή που αναθέτει σε ένα σύνολο A πιθανών εκβάσεων (γνωστό και ως **γεγονός**), έναν μη αρνητικό αριθμό $\Pr(A)$, που καλείται η πιθανότητα του A και ο οποίος πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένα αξιώματα:
   i. $\Pr(A) \geq 0$, για κάθε γεγονός A

ii. Αν $A_1, A_2, \ldots$ αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα του δειγματοχώρου, η πιθανότητα της ένωσής τους θα πρέπει να ικανοποιεί

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \cdots$$

iii. Η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματοχώρου Ω θα πρέπει να ισούται με 1, δηλαδή, $\Pr(\Omega) = 1$

Βεβαίως, η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου πιθανότητας (δηλαδή δειγματοχώρου και μέτρου πιθανότητας) θα πρέπει να γίνεται πάντα σε συνάρτηση με τα ερωτήματα που θέλουμε να απαντήσουμε καθώς και τον απαιτούμενο βαθμό λεπτομέρειας.

Ιδιότητες Μέτρων Πιθανότητας

Υπάρχουν πολλές φυσικές ιδιότητες των μέτρων πιθανότητας που προκύπτουν κατευθείαν από τα παραπάνω αξιώματα, και τις ιδιότητες της άλγεβρας συνόλων. Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες από τις πιο χρήσιμες:

- $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$
- $\Pr(\emptyset) = 0$
- Αν $A \subset B$, τότε $\Pr(A) \leq \Pr(B)$
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- $\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$

Υπό Συνθήκη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία

Η υπό συνθήκη πιθανότητα μάς παρέχει έναν τρόπο να χειριστούμε την περίπτωση που έχουμε *μερική πληροφόρηση* σχετικά με το πείραμα. Ας υποθέσουμε ότι δύο γεγονότα A, B, ορίζονται στον ίδιο δειγματοχώρο με αντίστοιχες πιθανότητες $\Pr(A), \Pr(B)$. Τότε, αν ένας παρατηρητής λάβει την πληροφορία ότι το γεγονός B πραγματοποιήθηκε, η πιθανότητα πραγματοποίησης του γεγονότος A δεν είναι πλέον $\Pr(A)$.

Μπορεί να σκεφτεί κανείς πως, μετά την πληροφορία για το γεγονός B το πιθανοτικό μας μοντέλο αλλάζει. Συγκεκριμένα, το Ω αντικαθίσταται από το B και το μέτρο πιθανότητας περιλαμβάνει πλέον τις υπό συνθήκη πιθανότητες των διαφόρων γεγονότων δεδομένου του B, οι οποίες σε συμφωνία με τη διαίσθησή μας ορίζονται ως εξής:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Αν συμβαίνει να είναι $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ τότε η γνώση της πραγματοποίησης του B δε μεταβάλλει την πιθανότητα εμφάνισης του A. Στην περίπτωση αυτή, τα γεγονότα A, B λέγονται *στοχαστικά ανεξάρτητα*. Για στοχαστικά ανεξάρτητα γεγονότα ισχύει,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Στη γενική περίπτωση για την πιθανότητα της τομής δύο ή περισσότερων γεγονότων με θετική πιθανότητα, ισχύει ο γνωστός και ως *πολλαπλασιαστικός κανόνας*:

$$\Pr(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\Pr(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Κανόνας του Bayes

Σε αυτήν την παράγραφο βλέπουμε τις πιο σημαντικές συνέπειες της έννοιας της υποσυνθήκη πιθανότητας. Συγκεκριμένα το *Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας* και το *Κανόνα του Bayes*.

Το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας πολλές φορές μας λύνει τα χέρια κατά τον υπολογισμό της πιθανότητας σύνθετων γεγονότων αξιοποιώντας μία από τις κεντρικές προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων που κατά κόρον χρησιμοποιείται σε όλους τους τομείς της επιστήμης των υπολογιστών: την *Αρχή του Διαίρει και Βασίλευε*!

Θεώρημα 1.1. *Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα που αποτελούν μία διαμέριση του δειγματοχώρου Ω και υποθέτουμε πως $\Pr(A_i) > 0$, για κάθε i. Τότε, για οποιοδήποτε γεγονός B, έχουμε*

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) + \cdots + \Pr(A_n \cap B)\\ &= \Pr(A_1)\Pr(B|A_1) + \cdots + \Pr(A_n)\Pr(B|A_n)\end{aligned}$$

Το θεώρημα ολικής πιθανότητας χρησιμοποιείται συχνά σε συνδυασμό με το ακόλουθο κλασικό θεώρημα, που συσχετίζει υπόσυνθήκη πιθανότητες της μορφής $\Pr(A|B)$ με υποσυνθήκη πιθανότητες της μορφής $\Pr(B|A)$. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως *κανόνας του Bayes*,

Θεώρημα 1.2. *Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα που αποτελούν μία διαμέριση του δειγματοχώρου Ω και υποθέτουμε πως $\Pr(A_i) > 0$, για κάθε i. Τότε, για οποιοδήποτε γεγονός B, έχουμε*

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i)\Pr(B|A_i)}{\Pr(A_1)\Pr(B|A_1) + \cdots + \Pr(A_n)\Pr(B|A_n)}$$

Συνεπώς, για να υπολογίσει κανείς την πιθανότητα ενός σύνθετου γεγονότος, ”σπάει” το γεγονός σε άλλα μικρότερα τα οποία μπορεί να υπολογίζονται πιο εύκολα. Το ακόλουθο παράδειγμα απεικονίζει μία τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 1.3. **Μέσω Αλεξανδρούπολης...**
Εξαιτίας ενός internet configuration σφάλματος, τα πακέτα που στέλνονται από

την Πάτρα προς την Αθήνα δρομολογούνται μέσω Αλεξανδρούπολης με πιθανότητα 3/4. Όταν η μετάδοση ενός πακέτου γίνεται μέσω Αλεξανδρούπολης το πακέτο χάνεται με πιθανότητα 1/3, ενώ όταν το πακέτο δρομολογείται κανονικά, η αντίστοιχη πιθανότητα πέφτει στο 1/4. Ποιά είναι η πιθανότητα ένα πακέτο που φεύγει αυτή τη στιγμή από την Πάτρα να φθάσει σωστά στην Αθήνα; Επίσης, δεδομένου πως το πακέτο έφτασε σωστά στην Αθήνα, ποιά είναι η πιθανότητα να δρομολογήθηκε μέσω Αλεξανδρούπολης;

Λύση:

Αρχικά ονομάζουμε τα γεγονότα:

$$A = \{\text{πακέτο δρομολογήθηκε μέσω Αλεξανδρούπολης}\}$$
$$E = \{\text{το πακέτο χάθηκε}\}$$

Συνεπώς, τα δεδομένα του προβλήματος μας είναι:

$$\Pr(E|A) = 1/3, \qquad \Pr(E|A^c) = 1/4, \qquad \Pr(A) = 3/4$$

Η πιθανότητα να φθάσει το πακέτο σωστά ισούται με $1 - \Pr(E)$. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε το $\Pr(E)$. Από το Θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε,

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(E|A)\Pr(A) + \Pr(E|A^c)\Pr(A^c)\\ &= (1/3)(3/4) + (1/4)(1 - 3/4)\\ &= 1/4 + 1/16\\ &= 5/16\end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με 11/16.

Το δεύτερο ζητούμενο υπολογίζεται με χρήση του κανόνα του Bayes. Συγκεκριμένα έχουμε,

$$\begin{aligned}\Pr(A|E^c) &= \frac{\Pr(E^c|A)\Pr(A)}{\Pr(E^c)}\\ &= \frac{(2/3)(3/4)}{11/16} = 8/11\end{aligned}$$

1.2 Τυχαίες Μεταβλητές

Μία (πραγματική) τυχαία μεταβλητή είναι μία απεικόνιση του δειγματοχώρου Ω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, μπορούμε να σκεφτόμαστε τις τυχαίες μεταβλητές ως πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

Παράδειγμα 1.4. Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές και μετράμε το πλήθος των φορών που εμφανίστηκε κορώνα. Έστω N το ζητούμενο πλήθος. Ο δειγματοχώρος του πειράματός μας είναι προφανώς ο $\Omega = \{ГГГ, ГГК, \ldots, ГКК, ККК\}$. Η τιμή που παίρνει η μεταβλητή N είναι συνάρτηση του αποτελέσματος του πειράματος. Για παράδειγμα $N(ГГГ) = 0, N(ККГ) = 2$ κλπ. Η N είναι τυχαία μεταβλητή, δηλαδή, όπως ακριβώς προβλέπει και ο ορισμός των τυχαίων μεταβλητών, μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού γεγονότα του δειγματοχώρου $(\{ГГГ\}, \{ГКГ\}, \ldots)$ και σύνολο τιμών που ανήκει στους πραγματικούς (συγκεκριμένα στην περίπτωση μας τους ακέραιους $\{0, 1, 2, 3\}$).

Οι τυχαίες μεταβλητές (Τ.Μ) παραδοσιακά συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα $X, Y, \ldots$ ενώ οι ιδιαίτερες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής πχ X είναι οι $X(\omega)$. Μία τυχαία μεταβλητή είναι **διακριτή** εάν το σύνολο τιμών της είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμα άπειρο (πχ ακέραιοι...). Διαφορετικά η τυχαία μεταβλητή είναι **συνεχής**.

Με κάθε διακριτή Τ.Μ X, σχετίζεται μία **συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (PMF),

$$p_X(x) = \Pr(X = x)$$

η οποία αναθέτει πιθανότητα σε κάθε αριθμητική τιμή στο σύνολο τιμών της. Αντίστοιχα με κάθε συνεχή Τ.Μ σχετίζεται μία **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (PDF), $f_X(x)$ ώστε,

$$\Pr(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$$

Εκτός των PMF και των PDF υπάρχει άλλο ένα μαθηματικό εργαλείο το οποίο μάλιστα πετυχαίνει ενιαία αντιμετώπιση των συνεχών και διακριτών Τ.Μ. Πρόκειται για την **αθροιστική συνάρτηση κατανομής**, CDF. Η CDF μιας Τ.Μ συμβολίζεται με F_X και ισούται με την πιθανότητα $\Pr(X \leq x)$. Συγκεκριμένα για κάθε x έχουμε,

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k) & \text{αν η } X \text{ είναι Διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt & \text{αν η } X \text{ είναι Συνεχής} \end{cases}$$

Η CDF έχει, μεταξύ άλλων, τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. Η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. Η $F_X(x)$ στη γενική περίπτωση είναι συνεχής απο δεξιά και έχουμε $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Όταν η τυχαία μεταβλητή Χ είναι συνεχής η CDF της είναι παντού συνεχής. Αντίθετα, στην περίπτωση διακριτών Τ.Μ η CDF παρουσιάζει άλματα και καταλήγει να εμφανίζει μία χαρακτηριστική κλιμακωτή μορφή.

Οι συναρτήσεις PMF και PDF μπορούν να εξαχθούν κατευθείαν από τη CDF ως εξής:

- στη Διακριτή περίπτωση, ισχύει: $p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.
- στη Συνεχή περίπτωση, η PDF προκύπτει με παραγώγιση της CDF: $f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$

Επίσης η συναρτήση PDF έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
3. $\int_a^b f_X(x)dx = \Pr(a < X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a \leq X \leq b)$

(αντίστοιχες ιδιότητες έχει και η PMF)

1.3 Αναμενόμενη τιμή, Διακύμανση

Παρακάτω παραθέτουμε τους ορισμούς των βασικών μέσων όρων που συνοψίζουν πολλές φορές γλαφυρά τις ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 1.5. *Η **αναμενόμενη τιμή (ή μέση τιμή)** μίας τυχαίας μεταβλητής διακριτού χρόνου X ορίζεται ως*

$$E[X] = \sum_i x_i \Pr(X = x_i)$$

Αντίστοιχα η αναμενόμενη τιμή της $Y = g(X)$ είναι,

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \Pr(X = x_i)$$

*Στην ειδική περίπτωση που $g(X) = (X - E[X])^2$, η $E[g(X)]$ καλείται **διακύμανση** (Variance), και συνήθως συμβολίζεται με $Var(X)$. Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης καλείται **τυπική απόκλιση**.*

Αντίστοιχα για τις Τ.Μ συνεχούς χρόνου έχουμε:

Ορισμός 1.6. *Η **αναμενόμενη τιμή** μίας τυχαίας μεταβλητής συνεχούς χρόνου X ορίζεται ως*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Η αναμενόμενη τιμή της $Y = g(X)$ είναι,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Και πάλι στην ειδική περίπτωση που $g(X) = (X - E[X])^2$, η $E[g(X)]$ καλείται διακύμανση και η τετραγωνική της ρίζα, τυπική απόκλιση.

Ιδιότητες

- Γραμμικότητα Μέσης Τιμής : $E[aX + bY + c] = E[aX] + E[bY] + E[c] = aE[X] + bE[Y] + c$
- Διακύμανση συναρτήσει των πρώτων ροπών: $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
- Ιδιότητες Διακύμανσης: $Var(aX + c) = a^2 Var(X)$
- Διακύμανση αθροίσματος **ανεξάρτητων** μεταβλητών: $Var(A_1+A_2+\cdots) = Var(A_1)+ Var(A_2) + \cdots$. [1]

1.4 Σημαντικές Διακριτές και Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Στη στοχαστική μοντελοποίηση πληροφοριακών συστημάτων συναντάμε συχνά μία σειρά από κατανομές, οι οποίες διακρίνονται για τον εύκολο χειρισμό τους, τη μοντελοποιητική τους γενικότητα, αλλά και την ιστορικά αποδεδειγμένη ποιότητα των εκτιμήσεων που παρέχουν. Τις σημαντικότερες από αυτές παραθέτουμε συνοπτικά στις παρακάτω παραγράφους.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή

Όταν ένα πείραμα έχει ένα πεπερασμένο αριθμό από "ισοπίθανα" ενδεχόμενα, (ή όταν απλά εμείς δε γνωρίζουμε τίποτε για τις πιθανότητες των διαφορετικών ενδεχομένων), το μοντελοποιούμε με χρήση της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής. Λέμε ότι η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $\{1, 2, \ldots, n\}$ αν

$$\Pr(X = k) = 1/n, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Δηλαδή η PMF της παίρνει μόνο δυο τιμές:

$$p_X(k) = \begin{cases} 1/n & \text{αν } k = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τυχαία Μεταβλητή Bernoulli

Η Τ.Μ Bernoulli παίρνει τις τιμές 1 και 0 με πιθανότητες p και $1 - p$. Η PMF της είναι:

$$p_X(k) = \begin{cases} p & \text{αν } k = 1 \\ 1 - p & \text{αν } k = 0 \end{cases}$$

[1] προσέξτε πως η αντίστοιχη σχέση στην περίπτωση της μέσης τιμής ισχύει ασχέτως του κατά πόσο οι Τ.Μ είναι ή όχι ανεξάρτητες

Παρά την απλότητά της η Τ.Μ Bernoulli είναι ιδιαίτερα σημαντική. Στην πράξη μοντελοποιεί αρκετά γενικές πιθανοτικές καταστάσεις στις οποίες έχουμε μόνο δυο ενδεχόμενα. Για παράδειγμα:

- Η κατάσταση ενός server κάθε δεδομένη στιγμή μπορεί να είναι busy ή idle, άρα η Τ.Μ που μοντελοποιεί αυτήν την πληροφορία είναι κατανεμημένη σύμφωνα με την κατανομή Bernoulli.
- Επίσης, όταν μεταβιβάζουμε δυαδικά δεδομένα μέσω ενός καναλιού επικοινωνίας μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με τυχαία μεταβλητή Bernoulli το γεγονός ορθής ή εσφαλμένης αποστολής ενός bit...

Πολύ σημαντικό και χρήσιμο είναι το γεγονός πως, συνδυάζοντας πολλαπλές Τ.Μ Bernoulli, μπορεί κανείς να κατασκευάσει πιο σύνθετες Τ.Μ όπως η διωνυμική που θα δούμε παρακάτω.

Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή

Εκτελούμε n ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli (γνωστά και ως δοκιμές), καθένα από τα οποία έχει δύο πιθανές εκβάσεις: ”επιτυχία” με πιθανότητα p και ”αποτυχία” με πιθανότητα $1-p$. Έστω X η Τ.Μ που μετρά το πλήθος των επιτυχιών στην ακολουθία των n πειραμάτων. Τότε η X είναι **διωνυμικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους n και p**. Η PMF της X δίνεται από τον τύπο:

$$p_X(k) = \Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Γεωμετρική Τυχαία Μεταβλητή

Θεωρούμε επαναλαμβανόμενες ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Έστω X η Τ.Μ που μετρά το πλήθος των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία (συμπεριλαμβανομένης αυτής). Τότε, η Τ.Μ X είναι **γεωμετρικά κατανεμημένη με παράμετρο p**. Η PMF της δίνεται από

$$p_X(k) = \Pr(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Παράδειγμα 1.7. Θεωρούμε ένα υπολογιστικό σύστημα το οποίο αποτελείται από έναν επεξεργαστή και μία ιεραρχία μνήμης. Θεωρούμε πως οποιαδήποτε δεδομένη στιγμή που ο επεξεργαστής προσπελαύνει τη μνήμη, τα επιθυμητά δεδομένα βρίσκονται στην cache με πιθανότητα 0.98. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το πρώτο miss να πραγματοποιηθεί στην 8η προσπέλαση. Ποιά είναι η πιθανότητα το πρώτο miss να πραγματοποιηθεί μετά την 5η προσπέλαση; Θεωρήστε πως η παρουσία των αιτούμενων δεδομένων στην cache είναι ανεξάρτητη σε κάθε προσπέλαση.

Λύση:

Για να συμβεί το πρώτο miss στην 8η φορά θα πρέπει τις πρώτες 7 να έχουμε hit και την 8η miss. Αν ονομάσουμε X τον αριθμό των προσπελάσεων μέχρι και το πρώτο miss τότε αυτή προφανώς ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο 0.02. Συνεπώς, η απάντηση στα ζητούμενα της άσκησης δίνεται άμεσα:
a) $p_X(8) = (1-p)^{8-1}p = (0.98)^7(0.02)$
b) $\Pr(X > 5) = 1 - \Pr(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=1}^{k=5} p_X(k) = 1 - \sum_{k=1}^{k=5} 0.98^k 0.2$

Τυχαία Μεταβλητή Poisson

Η Τ.Μ Poisson χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση πάρα πολλών φυσικών φαινομένων από τη ραδιενεργό διάσπαση και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μέχρι τις αφίξεις πακέτων προς μετάδοση στον buffer ενός router. Μία Τ.Μ X είναι κατανεμημένη κατά Poisson με *ρυθμό* $\lambda > 0$ αν

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Για να καταλάβει κανείς τι μοντελοποιεί η Τ.Μ Poisson, μπορεί να σκεφτεί μία διωνυμική Τ.Μ με *πολύ μικρό p και πολύ μεγάλο n*. Για παράδειγμα έστω X ο αριθμός των ορθογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο με n λέξεις. Τότε η X είναι διωνυμικά κατανεμημένη με παραμέτρους p, n, όπου p η πιθανότητα μία οποιαδήποτε λέξη να γραφεί ανορθόγραφα. Η X θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί και με Poisson PMF με ρυθμό $\lambda = np$, αν υποθέσουμε πως ο αριθμός των λέξεων του βιβλίου είναι πολύ μεγάλος και η πιθανότητα ορθογραφικού λάθους σε μία οποιαδήποτε λέξη είναι πολύ μικρή.

Παράδειγμα 1.8. Ο αριθμός των επισκέψεων σε ένα δημοφιλές website κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος ενός λεπτού δίνεται από μία Τ.Μ Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$ επισκέψεις το λεπτό. Ποιά η πιθανότητα να επισκεφτεί το site τουλάχιστον ένα άτομο στο επόμενο λεπτό;

Λύση:

Έστω X το πλήθος των επισκέψεων. Τότε:

$$\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-2} \approx 0.865$$

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ομοιόμορφη Τυχαία Μεταβλητή

Η πιο απλή συνεχής τυχαία μεταβλητή είναι η ομοιόμορφη. Μία Τ.Μ είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στο διάστημα $[a, b]$ όταν δύο οποιαδήποτε υποδιαστήματα ίσου μήκους έχουν ίδια πιθανότητα να επιλεγούν. Η PDF της ομοιόμορφης Τ.Μ είναι η

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{αν } a \le x \le b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εκθετική Τυχαία Μεταβλητή

Η εκθετική Τ.Μ αποτελεί ίσως την πιο χρήσιμη συνεχή τυχαία μεταβλητή στην ανάλυση της απόδοσης απλών μοντέλων υπολογιστικών συστημάτων. Η PDF της εκθετικής Τ.Μ δίνεται από

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{αν } x \ge 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προσέξτε πως η πιθανότητα η X να υπερβαίνει μία συγκεκριμένη τιμή μειώνεται εκθετικά. Συγκεκριμένα, για κάθε $a \ge 0$ έχουμε:

$$\Pr(X > a) = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_a^\infty = e^{-\lambda a}$$

Μία εκθετική Τ.Μ μπορεί, για παράδειγμα, να αποτελέσει καλό μοντέλο του χρόνου εξυπηρέτησης ενός server, του διαστήματος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μηνυμάτων σε έναν υπολογιστή, του χρόνου ζωής ενός συγκεκριμένου υποσυστήματος που μας ενδιαφέρει κλπ. Μπορούμε να πούμε πως η εκθετική Τ.Μ είναι το συνεχές αντίστοιχο της γεωμετρικής Τ.Μ γι'αυτό μοιράζονται πολλές ιδιαίτερα επιθυμητές ιδιότητες με σπουδαιότερη την ιδιότητα **έλλειψης μνήμης** (για απόδειξη της ιδιότητας βλέπε σελίδα 63 των σημειώσεων του μαθήματος) που θα μας κάνει τη ζωή εύκολη κατά τη μελέτη στοχαστικών διαδικασιών και πολλών απλών μοντέλων της θεωρίας αναμονής.

Παράδειγμα 1.9. Φτάνετε σε ένα υποκατάστημα μιας τράπεζας, στο οποίο υπάρχουν 2 ταμίες. Τη στιγμή της άφιξής σας βρίσκετε και τους 2 ταμίες να εξυπηρετούν από έναν πελάτη ενώ δεν υπάρχει κανένας άλλος πελάτης να περιμένει για εξυπηρέτηση. Αν ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών σε αυτήν την τράπεζα είναι εκθετικά κατανεμημένος με ρυθμό λ, ποιά είναι η πιθανότητα από τους τρεις σας, να είστε εσείς ο τελευταίος που θα ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση;

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα σκεφτόμαστε ως εξής: Θεωρήστε τη χρονική στιγμή που ξεκινάει η εξυπηρέτησή σας από κάποιον από τους ταμίες. Τη στιγμή αυτή ο ένας από τους δύο πελάτες μόλις ολοκλήρωσε την εξυπηρέτησή του ενώ ο δεύτερος ακόμα εξυπηρετείται. Ωστόσο, από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, προκύπτει πως ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του δεύτερου πελάτη είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λ. Δηλαδή, είναι σαν ο δεύτερος πελάτης μόλις να ξεκίνησε την εξυπηρέτησή του την ίδια χρονική στιγμή με εσάς. Συνεπώς, λόγω συμμετρίας η πιθανότητα να τελειώσει αυτός πριν από εσάς είναι $1/2$.

2

Στοχαστικές Διαδικασίες

Μία στοχαστική διαδικασία είναι ένα μαθηματικό μοντέλο ενός πιθανοτικού πειράματος το οποίο *εξελίσσεται στο χρόνο* και παράγει μία ακολουθία από αριθμητικές τιμές. Κάθε μία από αυτές τις αριθμητικές τιμές μοντελοποιείται από μία Τ.Μ, οπότε μία στοχαστική διαδικασία δεν είναι άλλο από μία πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία Τ.Μ.

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων έχουν περιγραφεί και αναλυθεί πληθώρα στοχαστικών διαδικασιών, με πολύ διαφορετικές ιδιότητες που τις καθιστούν κατάλληλες για την μοντελοποίηση μεγάλης γκάμας προβλημάτων. Εμείς στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε μόνο με δύο κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών:

Διαδικασίες Αφίξεων: οι οποίες μοντελοποιούν προβλήματα στα οποία τα γεγονότα που μας ενδιαφέρουν έχουν το χαρακτήρα μιας ”άφιξης”, όπως οι αφίξεις πακέτων σε έναν router, η ολοκλήρωση της εκτέλεσης εργασιών σε ένα υπολογιστικό σύστημα κλπ. Συγκεκριμένα, θα εστιάσουμε μόνο σε μοντέλα στα οποία οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές*:

- Αν οι αφίξεις πραγματοποιούνται σε διακριτό χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι *γεωμετρικά κατανεμημένοι* έχουμε τη ***διαδικασία Bernoulli***[1].
- Αν οι αφίξεις πραγματοποιούνται οποιαδήποτε στιγμή στο χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι *εκθετικά κατανεμημένοι*, έχουμε τη ***διαδικασία Poisson***.

Το βασικό κοινό τους χαρακτηριστικό, είναι πως εξαιτίας της ιδιότητας έλλειψης μνήμης που μοιράζονται, ***η μελλοντική τους συμπεριφορά δεν εξαρτάται από το παρελθόν*** γεγονός που τις καθιστά μαθηματικά ελκυστικές και ευκολομεταχείριστες .

[1] σε ορισμένα συγγράμματα καλείται επίσης διωνυμική διαδικασία

Διαδικασίες Markov: Σε αντίθεση με τις διαδικασίες Bernoulli και Poisson, με τις διαδικασίες Markov οι μελλοντικές τιμές επιτρέπεται να εξαρτώνται από το παρελθόν, αλλά με μία πολύ ειδική μορφή εξάρτησης: ***η επόμενη τιμή της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα***. Δηλαδή, όλο το παρελθόν συνοψίζεται σε μία **κατάσταση**, η οποία αλλάζει με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με συγκεκριμένες πιθανότητες. Το εύρος των εφαρμογών της Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι τόσο μεγάλο και διεπιστημονικό, που μπορούμε να πούμε πως η μοντελοποιητική τους δύναμη μπορεί να συγκριθεί με αυτήν των διαφορικών εξισώσεων!

Εδώ, αρχικά θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία Bernoulli που αποτελεί το ανάλογο της Poisson σε διακριτό χρόνο, και έπειτα θα παραθέσουμε συνοπτικά κάποιες βασικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson. Ο λόγος που αφιερώνεται το μεγαλύτερο τμήμα του κεφαλαίου στην Bernoulli είναι πως εξαιτίας της ιδιαίτερης απλότητάς της, βοηθάει να γίνουν εύκολα κατανοητές όλες οι κομψές τις ιδιότητες, οι οποίες μάλιστα όπως θα δούμε, ισχύουν αυτούσιες και στην πολύ πιο σημαντική διαδικασία Poisson. Έτσι αποκτάει κανείς διαίσθηση για τις ιδιότητες της Poisson χωρίς να αποπροσανατολιστεί από τις λεπτομέρειες της απόδειξής τους.

2.1 Η Διαδικασία Bernoulli

Τη Διαδικασία Bernoulli μπορεί να τη σκεφτεί κανείς σαν μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $1-p$. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα buffer στον οποίο φθάνουν πακέτα και χωρίζουμε το χρόνο σε σταθερά χρονικά διαστήματα (slots) στο καθένα από τα οποία έχουμε μία άφιξη (επιτυχία) με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα άλλα διαστήματα.

Η διαδικασία Bernoulli που σχετίζεται με το παραπάνω παράδειγμα είναι μία ακολουθία $X_1, X_2, \ldots$ **ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών Bernoulli X_i με

$$\Pr(X_i = 1) = \Pr(\text{άφιξη στο i-οστό slot}) = p$$
$$\Pr(X_i = 0) = \Pr(\text{καμία άφιξη στο i-οστό slot}) = 1 - p$$

Δεδομένης μίας διαδικασίας αφίξεων, πολύ συχνά ενδιαφερόμαστε για χρήσιμες Τ.Μ που σχετίζονται με αυτήν όπως για παράδειγμα το πλήθος των αφίξεων στα πρώτα n slot, ή τον αριθμό των slot μέχρι και την πρώτη άφιξη ή πιο γενικά τον αριθμό των slot μέχρι την k-οστή άφιξη κλπ. Για την διαδικασία Bernoulli η εύρεση αυτών των κατανομών είναι πολύ απλή.

Έστω N η Τ.Μ που μετρά ***το πλήθος των αφίξεων που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια*** n ***slots***. Τότε, αφού η πιθανότητα άφιξης σε κάθε slot είναι ανεξάρτητη από τις αφίξεις στα υπόλοιπα slots και ίση με p, η N είναι **διωνυμικά κατανεμημένη με παραμέτρους** n, p. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} p_N(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots, n \\ E[N] &= np \\ Var(N) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Έστω T η Τ.Μ που μετρά το ***χρόνο μέχρι την πρώτη άφιξη*** (το πλήθος δηλαδή των slots). Για να πάρει η T την τιμή t θα πρέπει στα πρώτα $t-1$ slots να μην έχουμε καμία άφιξη και στο slot t να έχουμε την πρώτη άφιξη. Αλλά αφού σε κάθε slot η πιθανότητα άφιξης ισούται με p ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα slot τότε η πιθανότητα του γεγονότος $\{T = t\}$ είναι ίση με $(1-p)^{t-1}p$. Βλέπουμε δηλαδή πως η T ακολουθεί τη **γεωμετρική κατανομή με παράμετρο** p. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= (1-p)^{t-1} p \quad t = 1, 2, \ldots \\ E[T] &= \frac{1}{p} \\ Var(T) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Ανεξαρτησία και Έλλειψη Μνήμης

Έστω ότι η διαδικασία Bernoulli που ορίσαμε παραπάνω "τρέχει" εδώ και n slots κατά τα οποία έχουμε καταγράψει τις τιμές $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Παρατηρούμε πως από τον ίδιο τον ορισμό της διαδικασίας οι τιμές που έχουμε καταγράψει δεν παρέχουν απολύτως καμία πληροφορία για το μέλλον της. Αυτό διότι κάθε μία από τις επικείμενες τιμές $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ αποτελεί μια νέα δοκιμή Bernoulli, εξ'ορισμού ανεξάρτητη από κάθε άλλη τιμή, είτε αυτή βρίσκεται στο παρελθόν είτε στο μέλλον. Κατά συνέπεια, μπορούμε να θεωρήσουμε πως αρχίζοντας από οποιοδήποτε σημείο στο χρόνο, η "υπόλοιπη" διαδικασία είναι και πάλι Bernoulli με τις ακριβώς ίδιες ιδιότητες της αρχικής διαδικασίας. Αυτή η πάρα πολύ χρήσιμη ιδιότητα καλείται ορισμένες φορές ιδιότητα **επανεκκίνησης**.

Είδαμε παραπάνω ότι ο χρόνος T μέχρι και την πρώτη άφιξη είναι γεωμετρικά κατανεμημένη μεταβλητή. Έστω ότι παρατηρούμε τη διαδικασία εδώ και n slots και δεν έχουμε δει καμία άφιξη. Τί μπορεί να ειπωθεί για τον αριθμό των υπολειπόμενων slots, $T-n$, μέχρι την πρώτη άφιξη; Σύμφωνα με την παραπάνω κουβέντα, αφού το μέλλον της διαδικασίας είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος και συνιστά μία νέα διαδικασία Bernoulli πανομοιότυπη της παλιάς, ο αριθμός των υπολειπόμενων slots μέχρι την πρώτη άφιξη περιγράφεται από την **ίδια** γεωμετρική PMF. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Pr(T - n = t | T > n) = (1-p)^{t-1} p = \Pr(T = t), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Η τελευταία ιδιότητα αναφέρεται ως ιδιότητα **έλλειψης μνήμης**. Η ιδιότητα έλλειψης μνήμης μπορεί να αποδειχθεί και αλγεβρικά με χρήση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής:

$$\begin{aligned}
\Pr(T - n = t | T > n) &= \frac{\Pr(T = n + t)}{\Pr(T > n)} \\
&= \frac{(1-p)^{n+t-1} p}{\sum_{t=n+1}^{\infty} (1-p)^{t-1} p} \\
&= \frac{(1-p)^{n+t-1} p}{(1-p)^n} \\
&= (1-p)^{t-1} p \\
&= \Pr(T = t)
\end{aligned}$$

Ωστόσο το παραπάνω επιχείρημα αναπτύσσει περισσότερο τη διαίσθησή μας.

Με χρήση των ιδιοτήτων επανεκκίνησης και έλλειψης μνήμης μπορεί κανείς να δώσει σύντομες και κομψές λύσεις σε φαινομενικά πολύπλοκα προβλήματα. Μία τέτοια περίπτωση είναι και ο υπολογισμός της κατανομής του χρόνου της k-οστής άφιξης που βλέπουμε παρακάτω.

Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών Αφίξεων και ο χρόνος της κ-οστής Άφιξης

Άλλη μία χρήσιμη Τ.Μ που σχετίζεται με την διαδικασία Bernoulli είναι η Y_k που μετρά ***το χρόνο μέχρι και την k-οστή άφιξη***. Αν ονομάσουμε T_k την Τ.Μ που μετρά το χρόνο μετά την (k-1)-οστή άφιξη μέχρι και την k-οστή άφιξη, έχουμε:

$$T_1 = Y_1, \quad T_k = Y_k - Y_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

δηλαδή, αυτό που μετρά η T_k είναι ο αριθμός των slots μετά την (k-1)-οστή άφιξη μέχρι και την k-οστή άφιξη.

Παραπάνω είδαμε πως ο χρόνος T_1 μέχρι και την πρώτη άφιξη είναι γεωμετρικά κατανεμημένη μεταβλητή με παράμετρο p. Όμως χρησιμοποιώντας την ιδιότητα επανεκκίνησης της διαδικασίας Bernoulli μπορούμε να θεωρήσουμε μία νέα διαδικασία που ξεκινά το πρώτο slot μετά την πρώτη άφιξη. Σύμφωνα με τα παραπάνω η νέα διαδικασία είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος και στοχαστικά πανομοιότυπη της προηγούμενης. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο χρόνος T_2 μέχρι την επόμενη άφιξη είναι ανεξάρτητος του T_1 και επίσης γεωμετρικά κατανεμημένος με την ίδια παράμετρο p.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι Τ.Μ $T_1, T_2, \ldots$ είναι **ανεξάρτητες πανομοιότυπα κατανεμημένες** (συνήθως αναφέρονται ως i.i.d δηλαδή, independent identically distributed) τυχαίες μεταβλητές και συγκεκριμένα γεωμετρικά κατανεμημένες με παράμετρο p.

Επομένως, τελικά έχουμε πως η Y_k που μετρά το χρόνο μέχρι την k-οστή άφιξη ισούται με το άθροισμα των k πρώτων χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:

$$Y_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της Y_k προκύπτουν κατευθείαν λόγω της γραμμικότητας της μέση τιμής καθώς και της ιδιότητας που ορίζει πως η διακύμανση του αθροίσματος ανεξάρτητων Τ.Μ ισούται με το άθροισμα των διακυμάνσεων. Οπότε έχουμε:

$$E[Y_k] = E[T_1] + \cdots + E[T_k] = k\frac{1}{p}$$

$$Var[Y_k] = Var[T_1] + \cdots + Var[T_k] = k\frac{1-p}{p^2}$$

Για να βρούμε την κατανομή της Y_k, σκεφτόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned} p_{Y_k}(t) &= \Pr(Y_k = t) = \Pr(\text{η k-οστή άφιξη συμβαίνει τη χρονική στιγμή t}) \\ &= \Pr(\text{Άφιξη στο slot t})\Pr(\text{k-1 αφίξεις στα πρώτα t-1 slots}) \\ &= p \times \binom{t-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(t-1)-(k-1)} \\ &= \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}, \quad t = k, k+1, \ldots \end{aligned}$$

Η κατανομή της Y_k που βρήκαμε παραπάνω καλείται ορισμένες φορές **κατανομή Pascal τάξης-k** [2].

Διαχωρισμός και Συγχώνευση Διαδικασιών Bernoulli

Ξεκινώντας από μία διαδικασία Bernoulli με παραμέτρο p μπορεί κανείς να **διαχωρίσει** δύο (ή περισσότερες...) νέες διαδικασίες με νέες παραμέτρους. Το ακόλουθο παράδειγμα διευκρινίζει τον τρόπο.

Θεωρούμε πως έχουμε ένα σύστημα με 2 servers καθένας από τους οποίους διαθέτει έναν πρακτικά απείρου μεγέθους buffer. Ο χρόνος θεωρείται διακριτός ενώ οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν τη διαδικασία Bernoulli με παράμετρο p. Κάθε φορά που έχουμε άφιξη μιας αίτησης στο σύστημα με πιθανότητα q_1 αυτή οδηγείται στο buffer του server 1 ενώ με πιθανότητα $q_2 = 1 - q_1$ η αίτηση οδηγείται στο buffer του server 2. Τί μπορούμε να πούμε για τις διαδικασίες αφίξεων στους buffers των δύο servers;

Στην περίπτωση που τα q_1 και q_2 έχουν σταθερή τιμή ανεξάρτητη των αφίξεων, οι διαδικασίες αυτές είναι Bernoulli. Αυτό φαίνεται κατευθείαν αν παρατηρήσει κανείς πως για παράδειγμα στην περίπτωση του server 1, σε κάθε slot έχουμε μία άφιξη με πιθανότητα pq_1 ανεξάρτητα του τί συμβαίνει στα άλλα slots. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τον server 2.

[2] και αποτελεί ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής

Ακριβώς αντίστροφα μπορεί κανείς να ξεκινήσει με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Bernoulli με παραμέτρους p και q και να τις **συγχωνεύσει** σε μία διαδικασία ως εξής: Μία άφιξη καταγράφεται στην συγχωνευμένη διαδικασία αν και μόνο αν υπάρχει μία άφιξη σε τουλάχιστον μία απ'τις δύο αρχικές διαδικασίες. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$. Επίσης, αφού τα διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα στις αρχικές διαδικασίες το ίδιο θα ισχύει και στην τελική. Οπότε, η συγχωνευμένη διαδικασία είναι Bernoulli, με παράμετρο $p+q-pq$.

Με τον διαχωρισμό και τη συγχώνευση διαδικασιών Bernoulli μπορεί κανείς να απομονώσει και να μελετήσει ενδιαφέροντα φαινόμενα, ή να εξετάσει με ενιαίο τρόπο συστήματα στα οποία έχουμε πολλαπλές διαδικασίες αφίξεων.

Άσκηση 2.1. Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα $p_I = 1/6$, και *busy* με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα 2/5 προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα 3/5 από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

1. Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στον 4ο slot. (*Απάντηση:* $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3$)
2. Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.(*Απάντηση:* $\frac{5}{36}$)
3. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1.(*Απάντηση:* 15)
4. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός από busy slots μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5η εργασία του χρήστη 1. (*Απάντηση:* $\frac{25}{2}$)
5. (*) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.(*Απάντηση:* Αν S η Τ.Μ που τις μετρά έχουμε $E[S] = 7.5, Var[S] = \frac{5(1-2/5)}{(2/5)^2}$ και $p_S(s) = \binom{s+4}{4}(\frac{2}{5})^5(1-\frac{2}{5})^s$)

2.2 Η Διαδικασία Poisson

Η διαδικασία Poisson είναι μία από τις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες μοντελοποίησης των αφίξεων σε πληθώρα συστημάτων συμπεριλαμβανομένων και των Πληροφοριακών. Στην ουσία, η διαδικασία Poisson αποτελεί την ανάλογη διαδικασία της Bernoulli στο συνεχή χρόνο, με την έννοια πως πλέον ο χρόνος δε θεωρείται χωρισμένος σε slots και ότι ο χρόνος μίας άφιξης μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός t. Αυτό όπως θα δούμε συνεπάγεται πως οι δύο διαδικασίες μοιράζονται τις ίδιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες (ιδιότητα επανεκκίνησης, έλλειψη μνήμης, ανεξάρτητοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων κλπ). Παρακάτω παραθέτουμε συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson.

Ορίζουμε:

$P(k,\tau)$ = Pr(πραγματοποιήθηκαν ακριβώς k αφίξεις κατά τη διάρκεια του διαστήματος τ)

και έχουμε:

Ιδιότητες Διαδικασίας Poisson

Μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η πιθανότητα $P(k,\tau)$ είναι ίδια για όλα τα διαστήματα ίδιου μήκους τ.
2. Το πλήθος των αφίξεων κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου διαστήματος είναι ανεξάρτητο των αφίξεων εκτός του διαστήματος.
3. Το πλήθος των αφίξεων κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου διαστήματος μήκους τ είναι κατανεμημένο σύμφωνα με την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$. Δηλαδή:
$$P(k,\tau) = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$
4. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και **κατανεμημένοι εκθετικά** με παράμετρο λ
5. Οι πιθανότητες $P(k,\tau)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:
$$\begin{aligned} P(0,\tau) &= 1 - \lambda\tau + o(\tau) \\ P(1,\tau) &= \lambda\tau + o(\tau) \\ P(k,\tau) &= o(\tau) \end{aligned}$$
Όπου $o(\tau)$, ένας όρος ο οποίος είναι αμελητέος σε σχέση με το τ, όταν το διάστημα τ είναι μικρό. Για παράδειγμα, η πιθανότητα να έχουμε περισσότερες από μία αφίξεις κατά τη διάρκεια ενός πολύ μικρού διαστήματος είναι αμελητέα.
6. Ο χρόνος k-οστής άφιξης Y_k είναι ίσος με το άθροισμα k χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων δηλαδή k εκθετικά κατανεμημένων μεταβλητών με παράμετρο λ. Η κατανομή της Y_k δίνεται από την
$$f_{Y_k}(y) = \frac{\lambda^k y^{k-1} e^{-\lambda y}}{(k-1)!}$$
και είναι γνωστή ως **κατανομή Erlang τάξης-k**.
7. Αν μία διαδικασία Poisson διαχωριστεί σε δύο άλλες διαδικασίες αναθέτοντας ανεξάρτητα κάθε άφιξη με πιθανότητα p στην πρώτη διαδικασία (αντίστοιχα με $(1-p)$ στη δεύτερη) οι δύο διαδικασίες που παίρνουμε είναι Poisson με ρυθμούς λp και $\lambda(1-p)$

8. Αν δυο ή περισσότερες διαδικασίες Poisson συγχωνευτούν σε μία διαδικασία τότε αυτή είναι Poisson με ρυθμό ίσο με το άθροισμα των ρυθμών των αρχικών διαδικασιών.

Άσκηση 2.2. Ένας Ψαράς πιάνει ψάρια σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό 0.6 ψάρια την ώρα. Ο ψαράς συνεχίζει να ψαρεύει για 2 ώρες. Αν στο διάστημα αυτό πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι σταματά, διαφορετικά συνεχίζει να ψαρεύει μέχρι να πιάσει ψάρι.

1. Ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να μείνει ο ψαράς περισσότερο από δύο ώρες; (*Απάντηση:* 0.301)
2. Ποιά είναι η πιθανότητα η συνολική χρονική διάρκεια του ψαρέματος να είναι μεταξύ 2 και 5 ωρών; (*Απάντηση:* 0.251)
3. Να βρεθεί η πιθανότητα να πιάσει τουλάχιστον 2 ψάρια. (*Απάντηση:* 0.337)
4. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός ψαριών που θα πιάσει.(*Απάντηση:* 1.501)
5. Ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος ψαρέματος δεδομένου πως ψαρεύει ήδη για 4 ώρες; (*Απάντηση:* 5.667)

Άσκηση 2.3. Ένας σταθμός εξυπηρέτησης χειρίζεται δύο τύπους εργασιών, Α και Β. Οι Αφίξεις των δύο τύπων εργασιών είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους $\lambda_A = 3$ και $\lambda_B = 4$ εργασίες την ώρα. Ο σταθμός εξυπηρέτησης ξεκίνησε τη λειτουργία του κάποια στιγμή στο μακρινό παρελθόν.

1. Ποιά είναι η μέση τιμή, η διακύμανση και η κατανομή του συνολικού αριθμού εργασιών που φθάνουν στο σύστημα σε διάστημα 3 λεπτών;
2. Μας ενημερώνουν πως κατά τη διάρκεια 10-λεπτου διαστήματος φθάνουν στο σύστημα ακριβώς 10 νέες εργασίες. Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς 3 από αυτές να είναι τύπου Α;
3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, δεν υπάρχει καμία εργασία στο σύστημα. Ποιά είναι η κατανομή του αριθμού των εργασιών τύπου Β που φθάνουν στο σύστημα πριν την πρώτη άφιξη τύπου Α;