Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων
2ο Σετ Ασκήσεων - Λύσεις

Δεκέμβριος - Ιανουάριος 2016

Πρόβλημα 1

Ερώτημα (α) Για να υπολογίσουμε το πραγματικό throughput λ_4 για τη γραμμή AB χρειαζόμαστε την πραγματική χρησιμοποίηση, που υπολογίζεται από τον τύπο $U_2 = \rho_2 \frac{G(N-1)}{G(N)}$, και όχι μόνο τη σχετική χρησιμοποίηση ρ_2. Πρώτα όμως υπολογίζουμε τα ρ_i:

$$\begin{aligned}
\mu_1\rho_1 &= 0.4\mu_2\rho_2 + \mu_3\rho_3 \\
\mu_2\rho_2 &= \mu_1\rho_1 + 0.2\mu_2\rho_2 \\
\mu_3\rho_3 &= 0.4\mu_2\rho_2
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\rho_2 = 1$ βρίσκουμε πως $\rho_1 = 1.6$ και $\rho_3 = 0.8$. Προχωράμε τώρα στην υλοποίηση του αλγορίθμου Buzen και βρίσκουμε ότι:

(N=0): $g_i(0) = 0$ για $i = 1, 2, 3, 4$

(N=1): $g_1(1) = 1.6, g_2(1) = 2.6, g_3(1) = 3.4$. Επομένως, $\lambda_4(1) = \mu_2 \cdot 0.2 \cdot U_2(1) = 0.2353$

(N=2): $g_1(2) = 2.56, g_2(2) = 5.16, g_3(2) = 7.88$. Έτσι $U_2(2) = 0.4315$ και $\lambda_4(2) = 0.3452$

(N=3): $G(3) = 15.56, U_2(3) = 0.5064$ ενώ τώρα $\lambda_4(3) = 0.4051$

(N=4): $G(4) = 28, 2576, U_2(4) = 0.5506$ και $\lambda_4(4) = 0.4405$

Συνεπώς, ο ισοδύναμος server θα πρέπει να έχει ρυθμό εξυπηρέτησης που διαφέρει ανάλογα με το πλήθος των πελατών που βρίσκονται στο υποδίκτυο και συγκεκριμένα:

$$\mu_{eq}(1) = 0.2353, \mu_{eq}(2) = 0.3452, \mu_{eq}(3) = 0.4051, \mu_{eq}(4) = 0.4405.$$

Έτσι, αν κάποιος θέλει να βρει την καλύτερη παραμετροποίηση του *server 4* (δε ζητείται εδώ!), θα μπορούσε να τρέξει τον αλγόριθμο Buzen για το ισοδύναμο δίκτυο δοκιμάζοντας τις παραπάνω τιμές. Αυτό τώρα θα γινόταν με ελάχιστο κόστος αφού θα έχει $M = 2$!

Ερώτημα (β) Η ιδέα πίσω από την ανάλυση του δικτύου είναι παρμένη από το θεώρημα Thevenin - Norton της Θεωρίας Κυκλωμάτων, κατά συνέπεια ο φίλος είναι κατά πάσα περίπτωση Ηλεκτρολόγος.

Πρόβλημα 2

Ερώτημα (α) Στο router καταφθάνουν πακέτα με ρυθμό λ και κατανομή Poisson, ενώ αυτό εξυπηρετεί με ρυθμό μ και εκθετική κατανομή. Επομένως, μπορούμε εύκολα από τη θεωρία (ή τους τύπους στις διαφάνειες) να υπολογίσουμε πως:

Χρησιμοποίηση: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Πιθανότητα να χαθεί πακέτο: $P_k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\rho^k$

Μέσος αριθμός πακέτων στο router: $\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho} - (k+1)\frac{\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$

Για τον μέσο χρόνο παραμονής στο router, που έστω ότι είναι το T, χρειαζόμαστε τον *ενεργό - effective ρυθμό αφίξεων* λ_{eff} και υπολογίζεται ως εξής:

$$\lambda_{\mathit{eff}} = \lambda(1 - P_k)$$

Αυτό διότι για να έχουμε άφιξη θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία θέση στο buffer. Έτσι, από το Νόμο του Little, μπορούμε να βρούμε ότι:

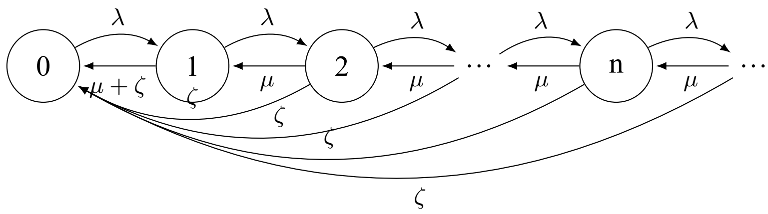
$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda_{\mathit{eff}}} = \frac{1-\rho^{k+1}}{(\mu-\lambda)(1-\rho^k)} - \frac{(k+1)\rho^k}{(1-\rho^k)\mu}$$

Ερώτημα (β) Εδώ χρειάζεται να μελετήσουμε στην πράξη το σύστημά μας, μετρώντας κάποιες μετρικές για κάθε μία από τις περιπτώσεις. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με κάποιο script σε Matlab ή άλλο περιβάλλον υπολογισμών. Μελετάμε ως προς τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, το χρόνο απόκρισης, το χρόνο αναμονής στην ουρά και την πιθανότητα να χαθεί κάποιο πακέτο επειδή το buffer είναι γεμάτο.

Περίπτωση	$\bar{N}$	N_q	T	P_k
$k=5, \lambda=0.3, \mu=1$	0.4242	0.1272	1.4164	0.0017
$k=10, \lambda=0.3, \mu=1$	0.4285	0.1286	1.4285	4.1334e-06
$k=5, \lambda=0.3, \mu=2$	0.1764	0.0265	0.5880	6.4548e-05
$k=5, \lambda=0.8, \mu=1$	1.8683	1.4947	2.5631	0.088819
$k=10, \lambda=0.8, \mu=1$	2.9663	2.3731	3.7971	0.023493
$k=5, \lambda=0.8, \mu=2$	0.6420	0.2568	0.8075	0.0061693

Γενικά δεν υπάρχει σωστή και λάθος επιλογή των παραμέτρων. Το τί είναι προς το συμφέρον μας να αλλάξουμε εξαρτάται και από τα δεδομένα του προβλήματος. Αν για παράδειγμα, για το σενάριο όπου $\lambda = 0.3$, θέλουμε μικρό χρόνο αναμονής, πρέπει να διπλασιάσουμε την ταχύτητα επεξεργασίας. Αν όμως θέλουμε τη μικρότερη δυνατή πιθανότητα να χαθεί κάποιο πακέτο, τότε διπλασιάζουμε την χωρητικότητα του buffer. Από την άλλη, όταν $\lambda = 0.8$, ο διπλασιασμός της ταχύτητας επεξεργασίας βελτιώνει κάθε μετρική, οπότε αυτόν και θα διαλέγαμε. Πάντως, σε κάθε περίπτωση, ο διπλασιασμός του ρυθμού εξυπηρέτησης βελτιώνει κατά πολύ το χρόνο απόκρισης.

Ερώτημα (γ) Πρόκειται για μια ουρά $M/M/1$ με την ιδιαιτερότητα όμως ότι, από κάθε κατάσταση, εκτός από τις δύο γειτονικές της, μπορώ να μεταβώ και στη κατάσταση μηδέν, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Αυτό λοιπόν που γίνεται είναι μια ροή πιθανότητας από κάθε κατάσταση στη μηδενική και το πιο σημαντικό είναι ότι αυτή **είναι ίδια** για όλες τις καταστάσεις. Άρα μία καλή υπόθεση είναι πως η παρούσα ουρά συμπεριφέρεται με τον αντίστοιχο τρόπο με την $M/M/1$. Στην περίπτωση όμως της δεύτερης, η οριακή κατανομή για το πλήθος των πακέτων είναι γεωμετρική. Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε την υπόθεση ότι και στο συγκεκριμένο σύστημα έχουμε παρόμοια οριακή κατανομή και να την εξετάσουμε.



Έστω ότι π_k είναι η πιθανότητα, στο βάθος χρόνου (οριακά) να βρισκόμαστε στην κατάσταση k. Τότε, από το Νόμο Ισορροπίας της ροής πιθανότητας, προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 + \zeta\pi_1 + \zeta\pi_2 + ... + \zeta\pi_n + ... && (1) \\ \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 &= \mu\pi_1 + \zeta\pi_1 + \lambda\pi_1 \\ &\vdots \\ \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} &= \mu\pi_n + \zeta\pi_n + \lambda\pi_n && (2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Η (1), αφού οι πιθανότητες π_k αθροίζουν στη μονάδα, γίνεται $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0 + \zeta\pi_0 - \zeta$. Με την υπόθεση λοιπόν, ότι ισχύει $\pi_k = (1-q)q^k$, για κάποια πιθανότητα q, (δηλαδή πως η λύση ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, όπως και στην M/M/1) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\mu q^2 - (\lambda + \mu + \zeta)q + \lambda = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις και αφού απαιτείται $q < 1$, έχουμε ότι

$$q = \frac{1 + \lambda/\mu + \zeta/\mu - \sqrt{(1 + \lambda/\mu + \zeta/\mu)^2 - 4\lambda/\mu}}{2}. \quad (4)$$

Συνεπώς, δεδομένου ότι η οριακή κατανομή του συστήματος είναι μοναδική, αποδείξαμε ότι

$$\pi_k = (1-q)q^k, k = 0, 1, 2, ...$$

Για έναν δεύτερο τρόπο: Μπορούμε να υπολογίσουμε την οριακή κατανομή των καταστάσεων αλγεβρικά, χωρίς κάποια υπόθεση (ή παρατήρηση όπως πριν), με χρήση **μετασχηματισμού-z**. Έστω λοιπόν ότι

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

είναι η πιθανογεννήτρια της οριακής κατανομής. Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μια εξίσωση για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της, δηλαδή τα π_k. Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας που βρήκαμε προηγουμένως με κατάλληλη δύναμη του z ως εξής:

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_0 z + \mu\pi_2 z &= (\mu+\zeta+\lambda)\pi_1 z \\
\lambda\pi_1 z^2 + \mu\pi_3 z^2 &= (\mu+\zeta+\lambda)\pi_2 z^2 \\
\lambda\pi_2 z^3 + \mu\pi_4 z^3 &= (\mu+\zeta+\lambda)\pi_3 z^3 \\
&\vdots \\
\lambda\pi_{n-1} z^n + \mu\pi_{n+1} z^n &= (\mu+\zeta+\lambda)\pi_n z^n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\lambda z(\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k z^k) + \mu\frac{1}{z}(\sum_{k=2}^{\infty}\pi_k z^k) = (\mu+\zeta+\lambda)(\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k z^k)$$

Αντικαθιστώντας με $R(z)$ και θέτοντας για ευκολία $\theta = \mu+\zeta+\lambda$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \lambda z R(z) + \mu\frac{1}{z}(R(z) - \pi_0 - \pi_1 z) &= \theta(R(z) - \pi_0) \\
\Leftrightarrow R(z)(\lambda z + \mu\frac{1}{z} - \theta) &= \mu\frac{1}{z}(\pi_0 + \pi_1 z) - \theta\pi_0 \\
\Leftrightarrow R(z)(\lambda z^2 - \theta z + \mu) &= \mu\pi_0 + \mu\pi_1 z - \theta\pi_0 z \\
\Leftrightarrow R(z) &= \frac{\mu\pi_0 - \mu\pi_0 z - \zeta z}{\lambda z^2 - \theta z + \mu} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Καταλήξαμε στην τελευταία σχέση χρησιμοποιώντας το $\mu\pi_1 - \theta\pi_0 = \mu\pi_0 - \zeta$ που προκύπτει από την (1). Για να συγκλίνει η σειρά $R(z)$ θα πρέπει μία ρίζα του παρανομαστή, και συγκεκριμένα αυτή που είναι μικρότερη από 1, να μηδενίζει και τον αριθμητή. Όμως, το τριώνυμο του παρανομαστή στην (5) με το τριώνυμο στην (3) έχουν αντίστροφες ρίζες. Με βάση αυτά και τον ορισμό του q μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$\pi_0 = 1 - \frac{1+\lambda/\mu+\zeta/\mu - \sqrt{(1+\lambda/\mu+\zeta/\mu)^2 - 4\lambda/\mu}}{2} = 1 - q$$

Μετά από λίγες ακόμα πράξεις, η (5) γράφεται ως

$$R(z) = (1-q)\frac{1}{1-qz} = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k z^k$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι δηλαδή

$$\pi_k = (1-q)q^k, k = 0, 1, 2, ...$$