Ασκήσεις – Μέρος Α

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών συστημάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

Καθηγητής

Άσκηση 1: Απλά συστήματα αναμονής

Εργασίες φθάνουν σε έναν εκτυπωτή με τρόπο Poisson, με μέσο ρυθμό 86 εργασίες/ώρα. Ο μέσος χρόνος εκτύπωσης μιας εργασίας είναι 37 sec. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εκτύπωσης ακολουθεί την εκθετική κατανομή και ότι το buffer αναμονής των εργασιών έχει τη δυνατότητα αποθήκευσης πρακτικά άπειρων εργασιών.

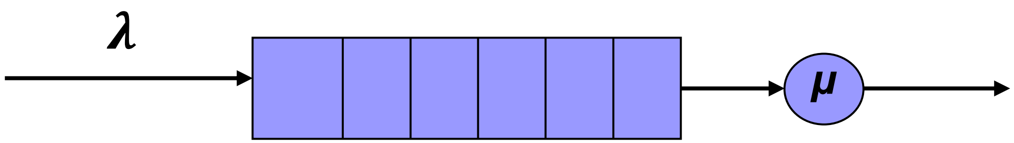
Οι χρήστες παραπονιούνται για το μεγάλο χρόνο αναμονής. Ο system manager μπορεί να αγοράσει ένα νέο εκτυπωτή που έχει μέσο χρόνο εκτύπωσης 30 sec, αλλά μπορεί να δικαιολογήσει την αγορά μόνο εάν (1) με τον παλιό εκτυπωτή υπάρχουν κατά μέσο όρο τουλάχιστον 5 εργασίες στο buffer ***και*** (2) το ποσοστό χρόνου που θα είναι άεργος ο νέος εκτυπωτής, δεν θα ξεπερνά το 20%.

(a) Μπορεί να δικαιολογήσει την αγορά του νέου εκτυπωτή; Αιτιολογήστε ποσοτικά την απάντησή σας.

(b) Αν αγόραζε έτσι κι αλλιώς το νέο εκτυπωτή, τι ποσοστιαία βελτίωση θα είχε το μέσο response time (χρόνος συστήματος) ανά εργασία;

Απαντήσεις (1)

M/M/1 σύστημα



a) **Παλιός Εκτυπωτής**:

Για τον εκτυπωτή αυτόν, θέλουμε το $\boldsymbol{\overline{N}_q}$.

Δίνονται:

$\boldsymbol{\lambda} = 86$ εργασίες/h $= 86/60$ εργ/min $= 1{,}43$ εργ/min.

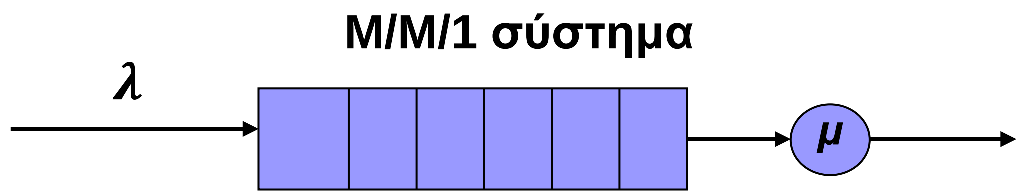
$\boldsymbol{\overline{x}} = 1/\mu = 37$ sec/εργ $\Longrightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{37} \cdot 60$ εργ/min $= 1{,}62$ εργ/min.

Οπότε:

$$\rho = \lambda/\mu = \frac{1{,}43}{1{,}62} = 0{,}883$$

και $\boldsymbol{\overline{N}_q} = \overline{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \boldsymbol{6{,}66}$ **εργασίες (M.O.) στο buffer** **(> 5)**

Απαντήσεις (2)



a) **Νέος Εκτυπωτής**:

Για τον εκτυπωτή αυτόν, θέλουμε το $\boldsymbol{p_0}'$.

Δίνονται:

$\boldsymbol{\lambda} = 1{,}43\ \text{εργ/min}$ (ίδιο με του παλιού)

$\overline{\boldsymbol{x}'} = 1/\mu' = 30\ \text{sec/εργ} \Longrightarrow \boldsymbol{\mu}' = \frac{1}{30} \cdot 60\ \text{εργ/min} = 2\ \text{εργ/min}.$

Οπότε:

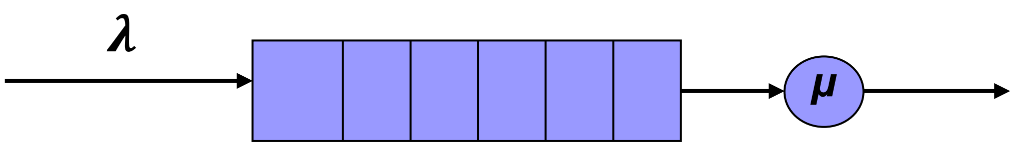
$\rho' = \lambda/\mu' = \frac{1{,}43}{2} = 0{,}715$

και $\boldsymbol{p}_0' = 1 - \rho = 0{,}285 \Longrightarrow$ **28,5 % του χρόνου άεργος (> 20%)**

Συνεπώς, επειδή δεν ικανοποιούνται **και** οι δύο συνθήκες (ναι η πρώτη, όχι η δεύτερη), **δεν δικαιολογείται** η αγορά του νέου εκτυπωτή.

Απαντήσεις (3)

M/M/1 σύστημα



b) Παλιός Εκτυπωτής:

$$T = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1/1{,}62}{1-0{,}883} = 5{,}276 \text{ min}$$

Νέος Εκτυπωτής:

$$T' = \frac{1/\mu'}{1-\rho'} = \frac{1/2}{1-0{,}715} = 1{,}754 \text{ min}$$

Βελτίωση: $\frac{5{,}276-1{,}754}{5{,}276} \times 100 = \mathbf{66{,}75\%}$

Άσκηση 2: Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

Ένα Λειτουργικό Σύστημα (ΛΣ) ελέγχει μία CPU μοιράζοντας τον υπολογιστικό χρόνο της μεταξύ *εργασιών χρηστών* και *εσωτερικών διεργασιών του ΛΣ*. Ο υπολογιστικός χρόνος της CPU διαιρείται σε μικρά τμήματα σταθερού μήκους (slots).

Στο τέλος κάθε slot, η CPU θα συνεχίσει να εξυπηρετεί το ίδιο είδος εργασίας (χρηστών ή ΛΣ) για ένα ακόμα slot, με σταθερή πιθανότητα $\boldsymbol{p_X}$ αν εξυπηρετεί χρήστη, και σταθερή πιθανότητα $\boldsymbol{p_\Lambda}$ αν εξυπηρετεί εσωτερική διεργασία του ΛΣ.

(a) Παρουσιάστε το *διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων* της αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου που θα έχετε ως μοντέλο του συστήματος.

(b) Παρουσιάστε τη λύση του συστήματος στη *μόνιμη κατάσταση*, συναρτήσει των $\boldsymbol{p_\Lambda}$ και $\boldsymbol{p_X}$.

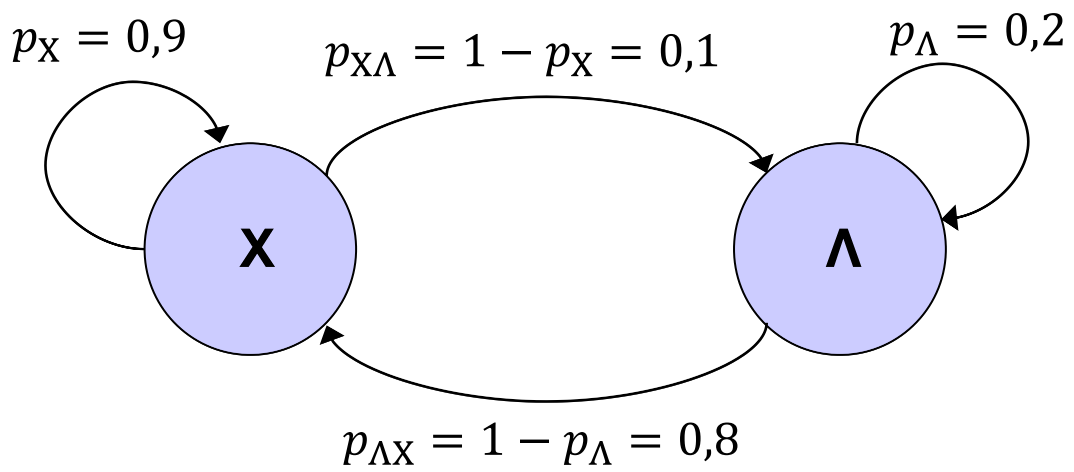
(c) Για $\boldsymbol{p_\Lambda}$ = 0,2 και $\boldsymbol{p_X}$ = 0,9 βρείτε στη μόνιμη κατάσταση, το ποσοστό χρόνου που το ΛΣ εξυπηρετεί εργασίες χρηστών.

(d) Μη λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα της ερώτησης (c), μας δίνεται η απαίτηση ο μέσος χρόνος που η CPU εξυπηρετεί εργασίες του ΛΣ, να είναι το 20% του συνολικού υπολογιστικού χρόνου της, ενώ γνωρίζουμε ότι το $\boldsymbol{p_\Lambda}$ είναι ίσο με 0,3. Ποια τιμή του $\boldsymbol{p_X}$ ικανοποιεί την απαίτηση αυτή;

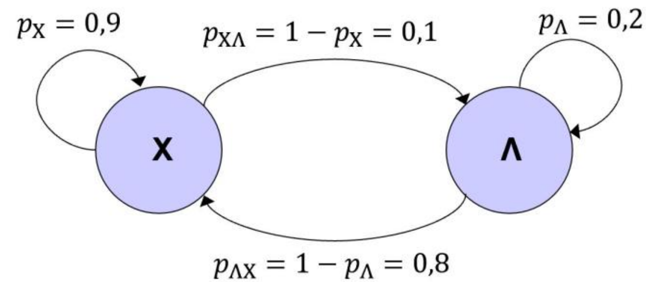
Απαντήσεις (1)

a) Θα έχουμε 2 καταστάσεις:
   - Κατάσταση **X** που αντιστοιχεί στην εξυπηρέτηση εργασιών χρηστών
   - Κατάσταση **Λ** που αντιστοιχεί στην εξυπηρέτηση διεργασιών του ΛΣ

- Το διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων είναι το εξής:



Απαντήσεις (2)



b) Εξισώσεις μόνιμης κατάστασης:

$$\left.\begin{aligned} \pi_X = p_X \cdot \pi_X + p_{\Lambda X} \cdot \pi_\Lambda \;&\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\pi_X = p_X \cdot \pi_X + (1 - p_\Lambda) \cdot \pi_\Lambda} \\ \pi_\Lambda = p_{X\Lambda} \cdot \pi_X + p_\Lambda \cdot \pi_\Lambda \;&\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\pi_\Lambda = (1 - p_X) \cdot \pi_X + p_\Lambda \cdot \pi_\Lambda} \\ &\boldsymbol{\pi_X + \pi_\Lambda = 1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την 3η και μία από τις 1η, 2η των εξισώσεων (1), παίρνουμε τη λύση:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\pi_X} &= \boldsymbol{\frac{1-p_\Lambda}{2-p_X-p_\Lambda}} \\[2ex] \boldsymbol{\pi_\Lambda} &= \boldsymbol{\frac{1-p_X}{2-p_X-p_\Lambda}} \end{aligned}} \qquad (2)$$

Απαντήσεις (3)

c) Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (2) για τις τιμές $p_{\Lambda} = 0{,}2$ και $p_{\mathrm{X}} = 0{,}9$ παίρνουμε:

$$\pi_{\mathrm{X}} = 0{,}89 \quad \text{και} \quad \pi_{\Lambda} = 0{,}11$$

Το ζητούμενο είναι το $\boxed{\boldsymbol{\pi_{\mathrm{X}} = 0,89}}$

d) Απαίτηση για $\pi_{\Lambda} = 0{,}2$ ενώ ισχύει $p_{\Lambda} = 0{,}3$

Από τη σχέση $\boldsymbol{\pi_X + \pi_{\Lambda} = 1}$ παίρνουμε και $\pi_{\mathrm{X}} = 0{,}8$

Από την 1η των σχέσεων (1):

$$\pi_X = p_X \cdot \pi_X + (1 - p_\Lambda) \cdot \pi_\Lambda \implies 0{,}8 = p_X \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}3) \cdot 0{,}2 \implies$$

$$\implies \ldots \implies \boxed{\boldsymbol{p_X = 0,825}}$$

Άσκηση 3: Ανοικτά δίκτυα συστημάτων αναμονής

Θεωρούμε ένα απλό μοντέλο ενός κατανεμημένου συστήματος που αποτελείται από δύο διασυνδεδεμένους Κόμβους 1 και 2. Οι εργασίες πάντα υποβάλλονται από το περιβάλλον (με εκθετικό τρόπο και ρυθμό $\boldsymbol{\lambda}$) στον Κόμβο 1 και ολοκληρώνονται («φεύγουν» προς το περιβάλλον) επίσης από τον Κόμβο 1. Μπορούν όμως με πιθανότητα $\boldsymbol{q}$ να μετακινηθούν από το Κόμβο1 (μετά από έναν κύκλο εξυπηρέτησης) στον Κόμβο 2 για να προσπελάσουν πόρους που δεν είναι διαθέσιμοι στον Κόμβο 1. Από τον Κόμβο 2 οι εργασίες επιστρέφουν υποχρεωτικά στον Κόμβο 1. Οι εργασίες δεν χρησιμοποιούν τον ίδιο Κόμβο πάλι αμέσως μετά την ολοκλήρωση ενός κύκλου εξυπηρέτησης στον Κόμβο (δηλαδή, δεν υπάρχει ανάδραση στους δύο Κόμβους).

Έστω $\boldsymbol{\lambda}$ = 20 εργασίες/min, $\boldsymbol{\mu_1}$ = 200 εργασίες/min, $\boldsymbol{\mu_2}$ = 180 εργασίες/min, και $\boldsymbol{q}$ = 0.8.

Υποθέτοντας εκθετικές εξυπηρετήσεις στους δύο κόμβους και ότι κάθε κόμβος έχει ένα buffer (ουρά) άπειρης χωρητικότητας, να βρείτε τα παρακάτω:

(a) Τις *ρυθμαποδόσεις* (throughputs) των δύο Κόμβων.

(b) Τις *χρησιμοποιήσεις* (utilizations) των δύο Κόμβων. Ποιος Κόμβος είναι bottleneck και γιατί;

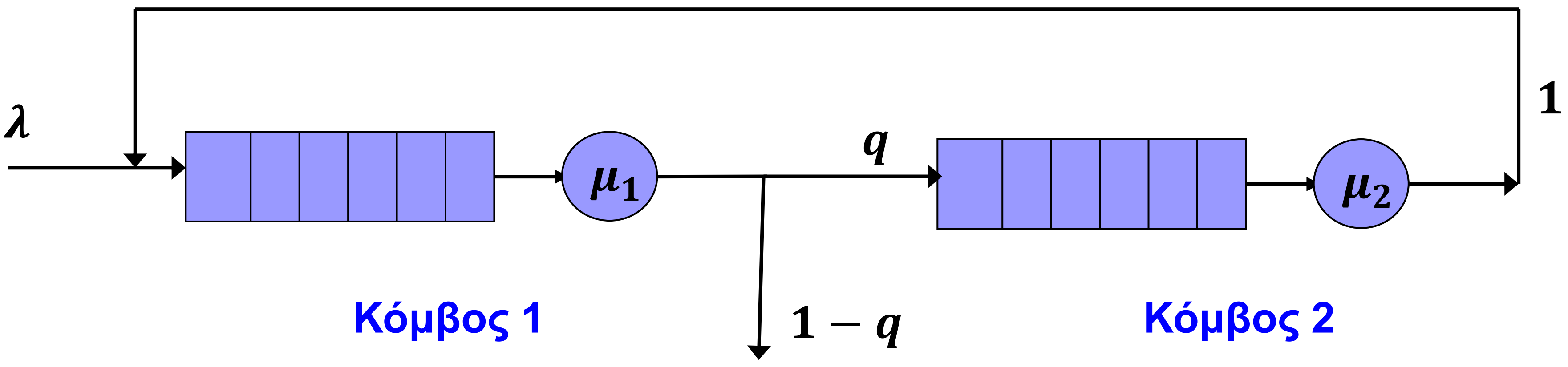
(c) Την *πιθανότητα να είναι άδειο* το κατανεμημένο σύστημα (και οι δύο Κόμβοι ταυτόχρονα άδειοι).

(d) Το *μέσο αριθμό εργασιών* σε κάθε Κόμβο, και στο κατανεμημένο σύστημα συνολικά.

(e) Το *μέσο χρόνο* που καταναλώνει μια εργασία (μέσο *response time*) σε μια επίσκεψη σε κάθε Κόμβο, και στο κατανεμημένο σύστημα συνολικά. Συγκρίνετε και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

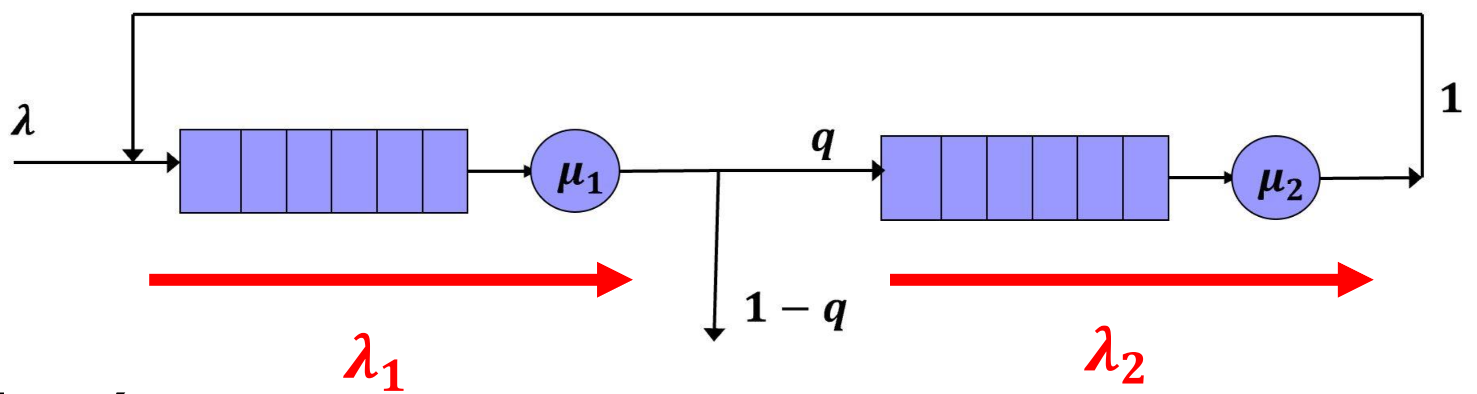
Απαντήσεις (1)

Το κατανεμημένο σύστημα αντιστοιχεί στο παρακάτω **ανοικτό** δίκτυο:



Απαντήσεις (2)

a) Τα throughputs $\boldsymbol{\lambda_1}$ και $\boldsymbol{\lambda_2}$:



Ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 &= q \cdot \lambda_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\lambda}{1-q} = \frac{20}{0{,}2} = 100 \\ \lambda_2 &= \frac{q \cdot \lambda}{1-q} = \frac{16}{0{,}2} = 80 \end{aligned} \qquad (1)$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = 100}$ εργ/min

$\boldsymbol{\lambda_2 = 80}$ εργ/min

Απαντήσεις (3)

b) Οι 2 Κόμβοι συμπεριφέρονται ως M/M/1 συστήματα:

$$\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 = 100/200 \Longrightarrow \boldsymbol{\rho_1 = 0,5}$$

$$\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = 80/180 \Longrightarrow \boldsymbol{\rho_2 = 0,44}$$

Bottleneck είναι ο **Κόμβος 1**, αφού $\rho_1 > \rho_2$.

c) Η συνολική λύση του δικτύου είναι:

$$p_{n_1,n_2} = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}$$

οπότε, η πιθανότητα να είναι άδειο το δίκτυο:

$$p_{0,0} = (1-\rho_1)(1-\rho_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}56 \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{p_{0,0} = 0,28}$$

Απαντήσεις (4)

d) Αντιμετωπίζουμε κάθε Κόμβο ως ανεξάρτητο M/M/1:

K1: $\bar{N}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0,5}{0,5} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\bar{N}_1 = 1}$ **εργασία**

K2: $\bar{N}_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0,44}{0,56} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\bar{N}_2 = 0,78}$ **εργασίες**

Συνολικά στο δίκτυο:

$$\boldsymbol{\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1,78} \text{ εργασίες}$$

e) Για το response time σε κάθε κόμβο (M/M/1), από το N. Little:

K1: $T_1 = \bar{N}_1/\lambda_1 = \frac{1/\mu_1}{1-\rho_1} = 1/100 \;\Rightarrow$ $\boldsymbol{T_1 = 0.01}$ min

K2: $T_2 = \bar{N}_2/\lambda_2 = \frac{1/\mu_2}{1-\rho_2} = 0,78/80 \;\Rightarrow$ $\boldsymbol{T_2 = 0.00975}$ min

Απαντήσεις (5)

Για το response time συνολικά του δικτύου, επίσης από το N. Little:

$$T = \bar{N}/\lambda = 1{,}78/20 \Rightarrow \boldsymbol{T = 0{,}089} \text{ min}$$

Το T είναι **πολύ μεγαλύτερο** από τα T_1 και T_2 ξεχωριστά, όσο και από το $T_1 + T_2 = 0{,}01975$.

Συγκεκριμένα: $T \simeq 9 \times T_1, \quad T \simeq 9 \times T_2$,

$T \simeq 4{,}5 \times (T_1 + T_2)$.

Είναι φυσικό, λόγω της πολύ μεγάλης πιθανότητας πολλαπλών επισκέψεων κάθε εργασίας στους Κόμβους του δικτύου.

Επιπλέον Ερώτημα (f):

f) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο εργασιών (λ) που μπορεί να αντέξει το δίκτυο ώστε να μην καταρρεύσει;

Απάντηση:

- Θα πρέπει να είναι συνολικά εργοδικό. Αυτό σημαίνει να είναι εργοδικοί **και** οι δύο Κόμβοι: Δηλ. πρέπει:

$$\rho_1 < 1 \text{ και } \rho_2 < 1 \implies \lambda_1 < \mu_1 \text{ και } \lambda_2 < \mu_2 .$$

- Από τις (1):

$$\frac{\lambda}{1-q} < \mu_1 \text{ και } \frac{q\cdot\lambda}{1-q} < \mu_2 \implies \frac{\lambda}{1-0{,}8} < 200 \text{ και } \frac{0{,}8\lambda}{1-0{,}8} < 180$$

$$\implies \lambda < 40 \text{ εργ/min και } \lambda < 45 \text{ εργ/min} \implies$$

$$\implies \boldsymbol{\lambda < 40} \text{ εργασίες/min}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-q}$$
$$\lambda_2 = \frac{q\cdot\lambda}{1-q} \quad (1)$$

Επιπλέον Ερώτημα (g):

g) Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει μεταξύ των παραμέτρων μ_1, μ_2 *ώστε να έχουμε ένα εξισορροπημένο (balanced) σύστημα;*

Απάντηση:

- Θα πρέπει: $\rho_1 = \rho_2 \Longrightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{\frac{\lambda}{1-q}}{\mu_1} = \frac{\frac{q\cdot\lambda}{1-q}}{\mu_2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{\mu_1} = \frac{q}{\mu_2} \Longrightarrow \boldsymbol{\mu_2 = q \cdot \mu_1}$ και για το σύστημά μας:

$$\boldsymbol{\mu_2 = 0,8 \cdot \mu_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-q}$$
$$\lambda_2 = \frac{q\cdot\lambda}{1-q} \quad (1)$$