Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων

Ενότητα 4: Δίκτυα Συστημάτων Αναμονής

Γαροφαλάκης Ιωάννης

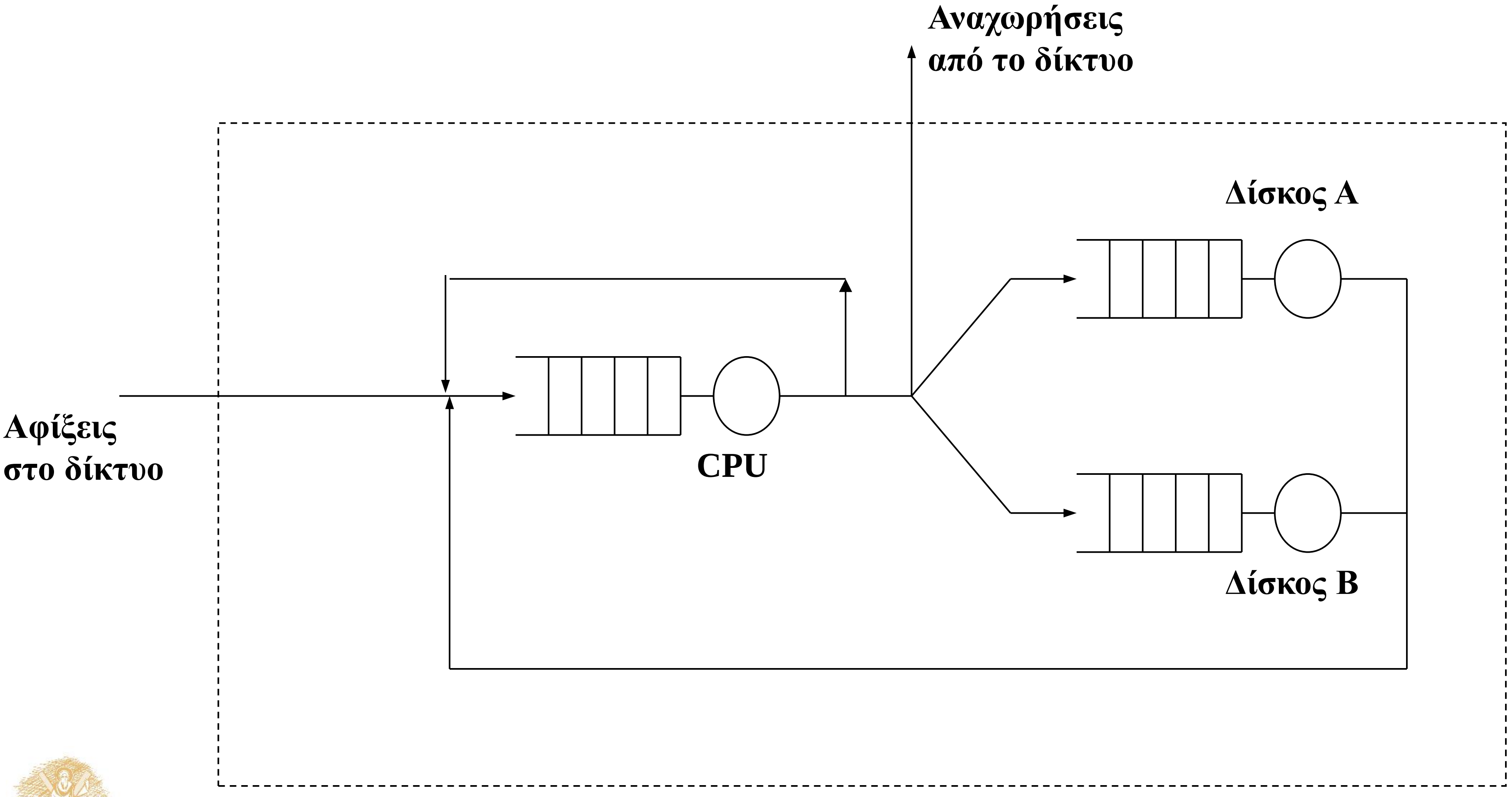
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχ/κών Η/Υ & Πληροφορικής

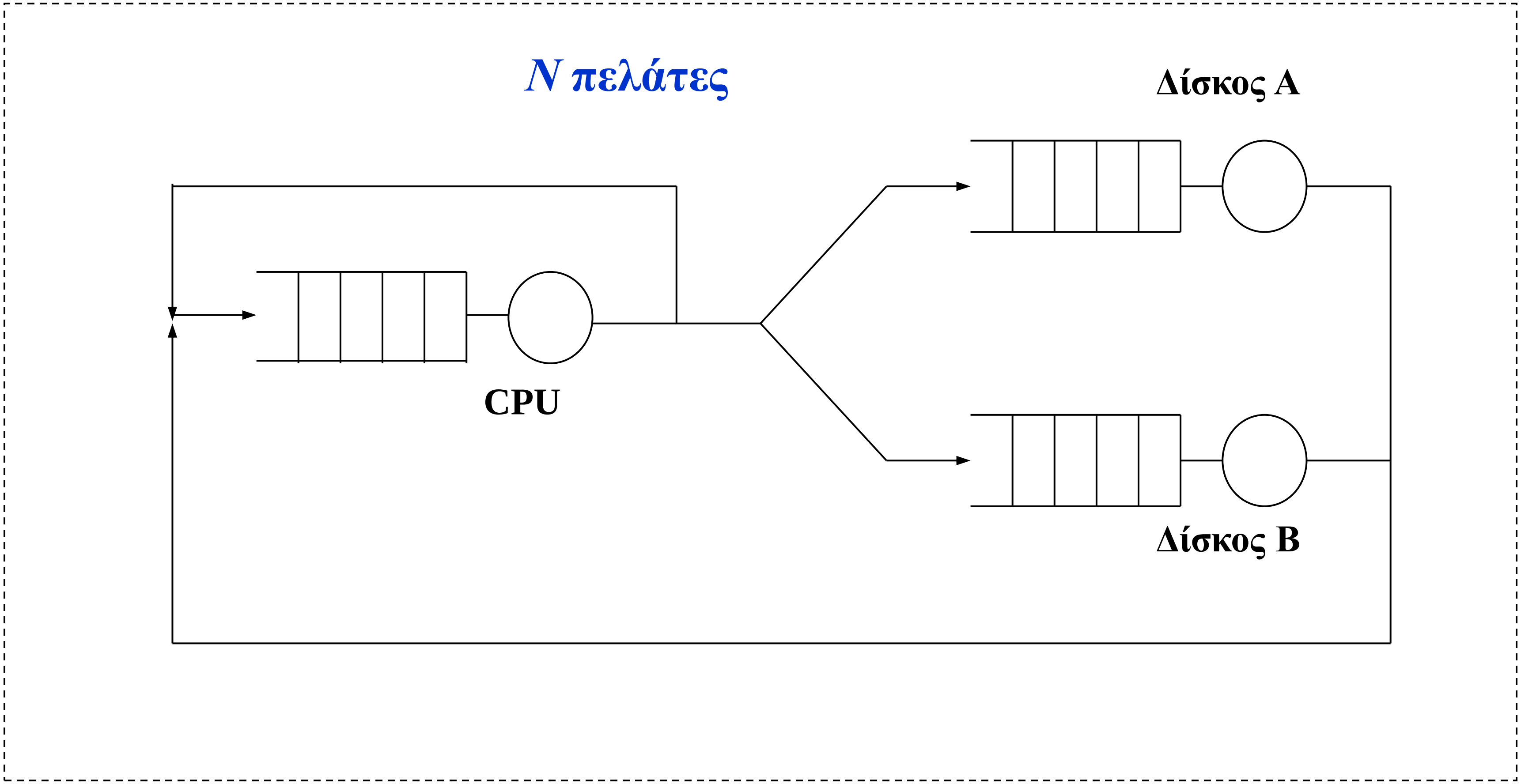
Γιατί δίκτυα συστημάτων αναμονής;

- Τα απλά συστήματα αναμονής μπορούν να χρησιμοποιηθούν
  - είτε ως μοντέλα μελέτης *ενός* πόρου κάποιου πληροφοριακού συστήματος,
  - ή ως μοντέλα για μια μακροσκοπική μελέτη του συστήματος θεωρώντας το έναν πόρο.
- Τα *δίκτυα συστημάτων αναμονής* μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα για πολύπλοκα πληροφοριακά συστήματα που περιέχουν περισσότερους από έναν πόρους και στα οποία οι «πελάτες» μετακινούνται από τον έναν πόρο στον άλλο.

Παράδειγμα – Ανοικτό Δίκτυο



Παράδειγμα – Κλειστό Δίκτυο



Central Server Model

Ορισμοί

- **Δίκτυο συστημάτων αναμονής** είναι μια συλλογή απλών συστημάτων αναμονής, στην οποία κάθε «πελάτης» που αναχωρεί από ένα απλό σύστημα, μετακινείται σε κάποιο άλλο (πιθανώς το ίδιο), ή αναχωρεί από το δίκτυο, αν αυτό επιτρέπεται.
- **Ανοικτό** δίκτυο συστημάτων αναμονής είναι αυτό στο οποίο επιτρέπονται αφίξεις από το περιβάλλον του δικτύου και αναχωρήσεις προς το περιβάλλον.
- **Κλειστό** δίκτυο είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπονται αφίξεις και αναχωρήσεις, αλλά διατηρείται ένας σταθερός αριθμός ***N*** μετακινούμενων «πελατών».

Περιγραφή δικτύων συστημάτων αναμονής

- Ένα δίκτυο συστημάτων αναμονής, μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο M σταθμών.
- Κάθε σταθμός αναπαριστά κάποια παροχή υπηρεσίας με τη βοήθεια c_i servers στο σταθμό i, $i = 1,2,3,\ldots,M$.
- Γενικά, οι πελάτες μπορούν να αφιχθούν από το περιβάλλον στο δίκτυο σε οποιοδήποτε σταθμό και να εγκαταλείψουν το σύστημα από οποιοδήποτε σταθμό.
- Μπορούν να διασχίσουν το σύστημα από διαφορετικά μονοπάτια κάθε φορά.
- Μπορούν να επιστρέψουν σε σταθμούς που έχουν προηγουμένως επισκεφτεί, να παραλείψουν εντελώς κάποιους από αυτούς, ή ακόμα να επιλέξουν να παραμείνουν στο σύστημα για πάντα

Δίκτυα Jackson

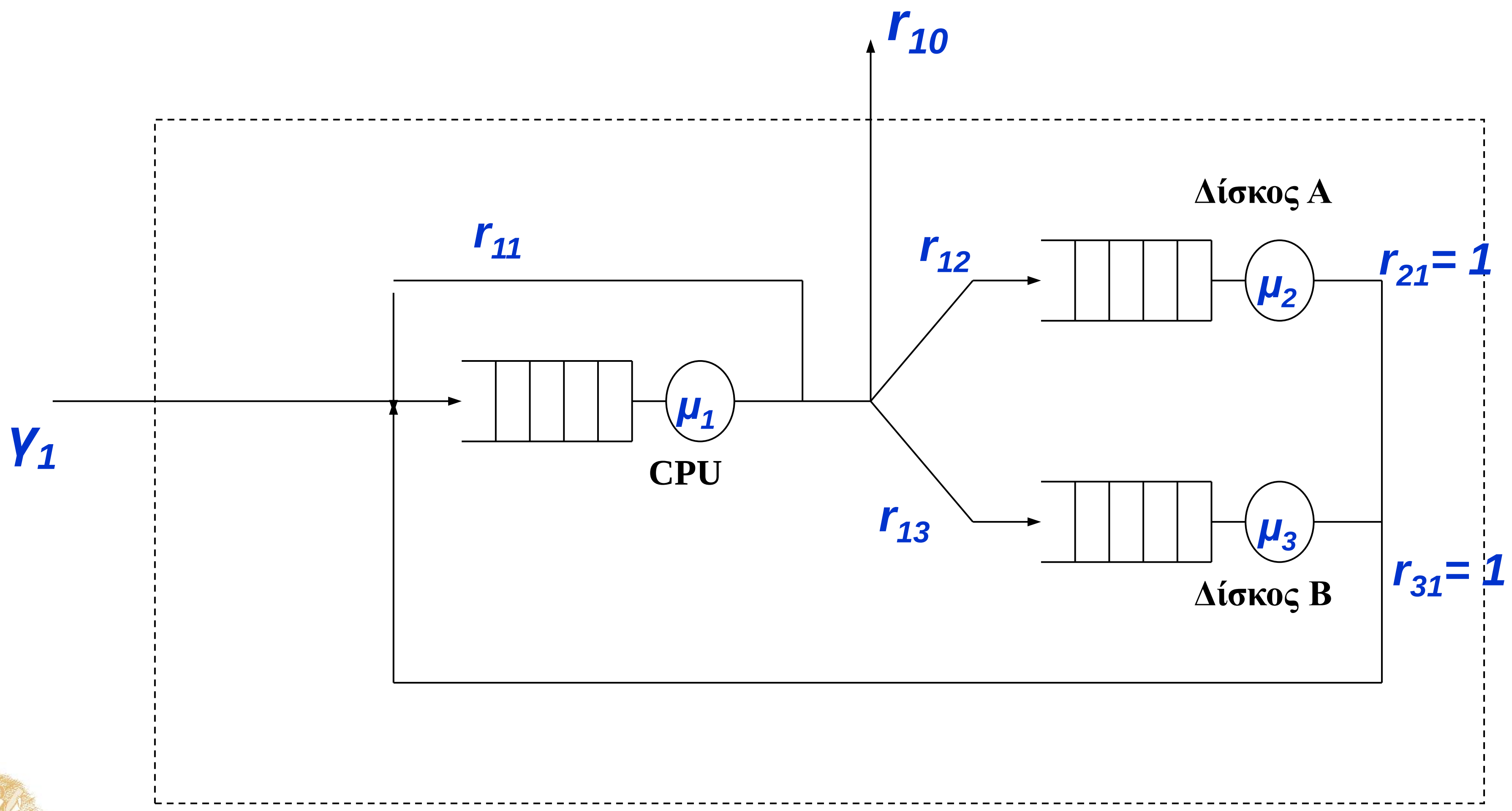
- Οι αφίξεις από το περιβάλλον στο σταθμό $\boldsymbol{i}$ (ουρές μήκους ∞) ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό $\boldsymbol{\gamma_i}$
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ίδιοι στους servers κάθε σταθμού, ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο $\boldsymbol{\mu_i}$ (θεωρούμε 1 server ανά σταθμό, εύκολα > 1)
- Η πιθανότητα ένας πελάτης που τελείωσε την εξυπηρέτηση του στον σταθμό $\boldsymbol{i}$, να πάει στο σταθμό $\boldsymbol{j}$ (routing probability), είναι $\boldsymbol{r_{ij}}$ (ανεξάρτητη από την κατάσταση του συστήματος) με $i = 1,2,\ldots,M$, $j = 1,2,\ldots,M$.
- Η πιθανότητα $\boldsymbol{r_{i0}}$ υποδεικνύει την πιθανότητα ο πελάτης να αναχωρήσει από το δίκτυο, από το σταθμό $\boldsymbol{i}$.
- Κλειστά Δίκτυα Jackson:
  - $\boldsymbol{\gamma_i = 0}$ για όλα τα i (κανένας πελάτης δεν μπορεί να εισέλθει στο δίκτυο)
  - $\boldsymbol{r_{i0} = 0}$ για όλα τα i (κανένας πελάτης δεν μπορεί να αναχωρήσει από το δίκτυο)

Ανοιχτά δίκτυα Jackson (1)

- Σύστημα Markov – Ζητάμε λύση Μόνιμης κατάστασης
- ***N**$_i$* τυχαία μεταβλητή για τον αριθμό πελατών στο σταθμό ***i***
- Θέλουμε $\Pr\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_M = n_M\} \equiv p_{n_1, n_2, \ldots, n_M}$
- Βασική κατάσταση: $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots, n_M$

Κατάσταση	**Συμβολισμός**
$n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots, n_M$	$\overline{n}$
$n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_j, \ldots, n_M$	$\overline{n}; i^+$
$n_1, n_2, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j, \ldots, n_M$	$\overline{n}; i^-$
$n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_M$	$\overline{n}; i^+ j^-$

Παράδειγμα – Ανοικτό Δίκτυο



Ανοιχτά δίκτυα Jackson (2)

- Νόμος διατήρησης της ροής πιθανότητας (Εξίσωση ▲):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{M}\gamma_i p_{\bar{n};i^-} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{M} \mu_i r_{ij} p_{\bar{n};i^+ j^-} + \sum_{i=1}^{M}\mu_i r_{i0} p_{\bar{n};i^+}}_{\text{Προς την κατάσταση } \bar{n}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(1-r_{ii}) p_{\bar{n}} + \sum_{i=1}^{M}\gamma_i p_{\bar{n}}}_{\text{Από την } \bar{n}}$$

- Για την κατάσταση $\bar{0} = (0,0,\ldots,0)$ $\quad \sum_{i=1}^{M}\gamma_i p_{\bar{0}} = \sum_{i=1}^{M}\mu_i r_{i0} p_{\bar{0};i^+}$

- Και η προφανής σχέση: $\quad \sum_{όλα\ τα\ \bar{n}} p_{\bar{n}} = 1$

Ανοιχτά δίκτυα Jackson (3)

- Έστω $\boldsymbol{\lambda_i}$ ο συνολικός *ενεργός (effective) μέσος ρυθμός αφίξεων στο σταθμό i* (throughput). Ισχύει

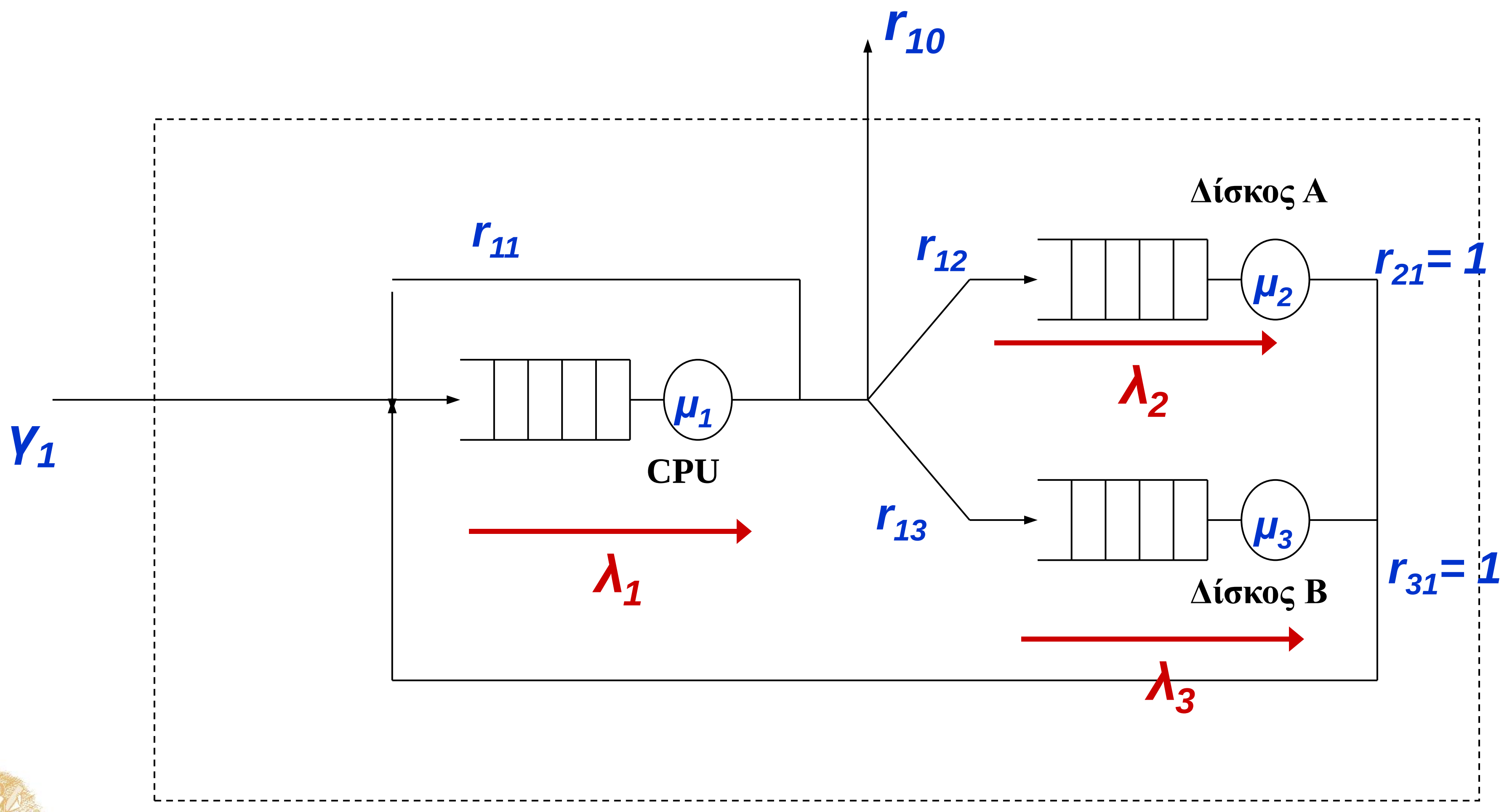
$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{M} r_{ji}\lambda_j$$

- Ορίζουμε $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ για *i = 1,2,3,…,M*
- Η λύση στη μόνιμη κατάσταση (*λύση μορφής γινομένου*):

$$p_{\bar{n}} \equiv p_{n_1,n_2,\ldots,n_M} = (1-\rho_1)\rho_1^{\,n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{\,n_2}\ldots(1-\rho_M)\rho_M^{\,n_M}$$

  - Το δίκτυο *συμπεριφέρεται* σαν κάθε σταθμός του να είναι ένα ανεξάρτητο ***M/M/1*** με παραμέτρους $\boldsymbol{\lambda_i}$ και $\boldsymbol{\mu_i}$
  - Η συνολική κατανομή πιθανότητας μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο των λύσεων των επί μέρους *M/M/1*
  - Στην πραγματικότητα *δεν* είναι *M/M/1* τα επί μέρους συστήματα (λόγω των

Παράδειγμα – Ανοικτό Δίκτυο



Ανοιχτά δίκτυα Jackson (4)

- Για να αποδείξουμε ότι η λύση $p_{\bar{n}} \equiv C\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M}$ με $C=\prod_{i=1}^{M}(1-\rho_i)$ ικανοποιεί την εξίσωση ροής πιθανότητας, βάζουμε τη λύση στην Εξίσωση ▲:

  (με $R_{\bar{n}} \equiv \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M}$ έχουμε $p_{\bar{n}} = CR_{\bar{n}}$)

$$\sum_{i=1}^{M}\gamma_i CR_{\bar{n};i^-} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{M}\mu_i r_{ij} CR_{\bar{n};i^+j^-} + \sum_{i=1}^{M}\mu_i r_{i0} CR_{\bar{n};i^+} \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{M}\mu_i(1-r_{ii})CR_{\bar{n}} + \sum_{i=1}^{M}\gamma_i CR_{\bar{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots\ldots \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{M}\lambda_i r_{i0} \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{M}\gamma_i$$ **ΙΣΧΥΕΙ**

- Για το *C*: $\sum_{\gamma\iota\alpha\ o\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \bar{n}} p_{\bar{n}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n_M=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} C\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M} = 1 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

$$\Leftrightarrow \quad C = (1-\rho_1)\ldots(1-\rho_2)(1-\rho_M) = \prod_{i=1}^{M}(1-\rho_i)$$

Κλειστά δίκτυα Jackson (1)

- Έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό από ***N*** πελάτες, που ταξιδεύουν μέσα στο δίκτυο με τους ***M*** σταθμούς.
- Για $\gamma_i = 0$ και $r_{i0} = 0$, η Εξίσωση ▲ γίνεται:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{M} \sum_{i=1}^{M} \mu_i r_{ij} p_{\bar{n};i^+ j^-} = \sum_{i=1}^{M} \mu_i (1 - r_{ii}) p_{\bar{n}}$$

- Οι Gordon και Newell (1967) απέδειξαν ότι και η λύση των κλειστών δικτύων είναι *μορφής γινομένου* (product form):

$$p_{\bar{n}} = C \rho_1^{\,n_1} \rho_2^{\,n_2} \ldots \rho_M^{\,n_M} \equiv C \mathfrak{R}_{\bar{n}}$$

(Εξίσωση ■)

- Τα ***ρ****ᵢ* είναι οι ***σχετικές χρησιμοποιήσεις***, και υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^{M} \mu_j r_{ji} \rho_j$$

(Εξίσωση ●)

Κλειστά δίκτυα Jackson (2)

- Το ***C*** υπολογίζεται από την: $\sum_{\acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \bar{n}} p_{\bar{n}} = 1$

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_M=N} C\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M} = 1 \Rightarrow C = \left[\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_M=N} \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M}\right]^{-1}$$

- Η λύση αυτή, συνήθως γράφεται: ***G(N)*** *= 1/C*

ώστε:

$$\boxed{p_{\bar{n}} = p_{n_1,n_2,\ldots,n_M} = \frac{1}{G(N)}\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M}}$$

όπου:

$$\boxed{G(N) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_M=N} \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}\ldots\rho_M^{n_M}}$$

- Γενικά, υπάρχουν $\binom{N+M-1}{N}$ τρόποι κατανομής *N* πελατών σε *M* κόμβους.
- Για μεγάλα *N*, *M*, δύσκολος ο υπολογισμός. Αλγόριθμος;

Αλγόριθμος του Buzen (1)

- Για τον υπολογισμό του ***G(N)*** ορίζεται η βοηθητική συνάρτηση

$$g_m(n) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i}$$

- $g_m(n) = G(N)$ αν *m=M* και *n=N* , δηλαδή $g_M(N) = G(N)$
- Ισχύει: $g_m(n) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n / n_m=0} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i} + \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n / n_m>0} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i}$

$$= \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n / n_m=0} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i} + \rho_m \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n-1} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i}$$

Αλγόριθμος του Buzen (2)

- Δηλαδή:

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

- Οι αρχικές τιμές για την $g_m(n)$ είναι:

$$\begin{cases} g_0(n) = 0 & n = 1,2,\ldots,N \\ g_m(0) = 1 & m = 1,2,\ldots,M \end{cases}$$

(Κανένας Σταθμός)
(Κανένας Πελάτης)

- Αλγόριθμος:

for $m \leftarrow 1$ to M do
for $n \leftarrow 1$ to N do
$G(n) \leftarrow G(n) + \rho(m) \cdot G(n-1)$

Αλγόριθμος του Buzen (3)

ΒΗΜΑ 1:

Υπολογισμός των $\boldsymbol{\rho_i}$ από τις Εξισώσεις ●:

$$\mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^{M} \mu_j r_{ji} \rho_j$$

Τα $\boldsymbol{\rho_i}$ είναι οι *σχετικές χρησιμοποιήσεις* των σταθμών του δικτύου. Θέτουμε κάποιο $\boldsymbol{\rho_i = 1}$ για να βρούμε τα υπόλοιπα σε σχέση με αυτό.

Αλγόριθμος του Buzen (4)

ΒΗΜΑ 2: [Υπολογισμός του *G(N)*]

Σταθμοί / Πελάτες	ρ_1	ρ_2	·	ρ_{m-1}	ρ_m	·	·	ρ_M
0	$1 = g_1(0)$	$1 = g_2(0)$	·	·	$1 = g_m(0)$	·	·	$1 = g_M(0) = G(0)$
1	$\rho_1 = g_1(1)$	$g_2(1)$	·	·	·	·	·	$g_M(1) = G(1)$
2	$\rho_1^{\,2} = g_1(2)$	$g_2(2)$	·	·	·	·	·	$g_M(2) = G(2)$
3	$\rho_1^{\,3} = g_1(3)$	$g_2(3)$	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
n-1	·	·	·	·	$g_m(n-1)$ $\downarrow \times \rho_m$	·	·	·
n	$\rho_1^{\,n} = g_1(n)$	·	·	$g_{m-1}(n) \rightarrow$	$g_m(n)$	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
N-1	·	·	·	·	·	·	·	$g_M(N-1) = G(N-1)$
N	$\rho_1^{\,N} = g_1(N)$	·	·	·	·	·	·	$g_M(N) = G(N)$

Αλγόριθμος του Buzen (5)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΙΚΩΝ [έχουμε όλα τα *G(0), G(1), ..., G(N)*]

$$P(n_i \geq j) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_M=N \,/\, n_i \geq j} \frac{\rho_1^{\,n_1} \rho_2^{\,n_2} \cdots \rho_M^{\,n_M}}{G(N)}$$

$$= \rho_i^{\,j} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_M=N-j} \frac{\rho_1^{\,n_1} \rho_2^{\,n_2} \cdots \rho_M^{\,n_M}}{G(N)} \qquad = \rho_i^{\,j} \, \frac{G(N-j)}{G(N)}$$

$$P(n_i = j) = P(n_i \geq j) - P(n_i \geq j+1)$$

$$= \frac{\rho_i^{\,j}}{G(N)} \left[G(N-j) - \rho_i \cdot G(N-j-1) \right]$$

Αλγόριθμος του Buzen (6)

$$P(n_i \geq j, n_k \geq l) = \rho_i^{\,j} \rho_k^{\,l} \frac{G(N-j-l)}{G(N)}$$

- Χρησιμοποίηση (*απόλυτη τιμή*):

$$U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$$

- Μέσος αριθμός εργασιών σε ένα σταθμό:

$$E[n_i] = \sum_{j=1}^{N} P(n_i \geq j) = \sum_{j=1}^{N} \rho_i^{\,j} \frac{G(N-j)}{G(N)}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης