

# Κεφάλαιο 3 :

## Μοντέλα Θεωρίας Αναμονής

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων

**Γιάννης Γαροφαλάκης**

**Καθηγητής**

# Ορισμός συστημάτων αναμονής

- **Συστήματα αναμονής (Queueing Systems):**  
Συστήματα στα οποία οι αφίξεις «πελατών» δημιουργούν απαιτήσεις εξυπηρέτησης από πόρους πεπερασμένης δυνατότητας εξυπηρέτησης.
- Σχηματίζονται «ουρές», όταν δημιουργούνται απαιτήσεις σύγχρονης χρησιμοποίησης πόρων.

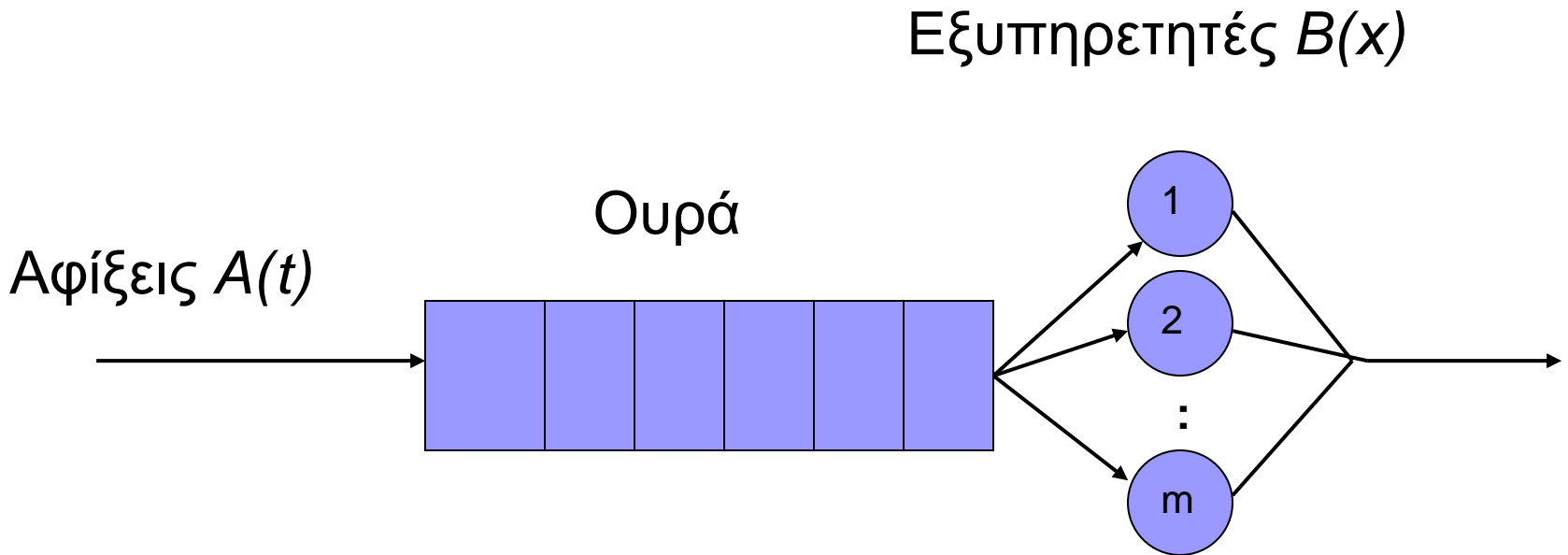
# Ορισμός συστημάτων αναμονής (2)

- Οι ουρές επηρεάζονται από τη **μέση τιμή** και τη **στατιστική διακύμανση** του ρυθμού αφίξεων.
  - **Ανεξέλεγκτες ουρές** όταν: μέση τιμή ρυθμού αφίξεων μεγαλύτερη από μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης
  - **Σχηματισμός ουρών** και λόγω στατιστικών διακυμάνσεων των αφίξεων
- **Θεωρία αναμονής (Queueing Theory)**: ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων, η απόδοση των οποίων επηρεάζεται από φαινόμενα αναμονής.

# Φορτίο εργασίας συστημάτων αναμονής (Μη-εκτελέσιμο)

- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)*  
 $A(t) = \text{Prob}[\text{χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων} \leq t]$
- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη (Χ.Ε.)*  
 $B(x) = \text{Prob}[\text{χρόνος εξυπηρέτησης} \leq x]$
- Συνήθως υποθέτουμε ότι οι παραπάνω **Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΔ)** συγκροτούνται από ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες **Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)**

# Ένα Σύστημα Αναμονής



# Άλλα μεγέθη περιγραφής του συστήματος

- Αριθμός εξυπηρετητών (servers) στο σύστημα  $m$ .
- Χωρητικότητα του συστήματος (ουρά και servers) σε πελάτες  $K$  (default:  $K = \infty$ )
- Πληθυσμός υποψηφίων πελατών  $M$  (default:  $M = \infty$ )
- Πολιτική εξυπηρέτησης, δηλαδή ο τρόπος επιλογής πελατών από την ουρά για τον (τους) εξυπηρετητές. (default: FCFS ή FIFO)
- Κλάσεις πελατών (default: 1)
- Ομάδες προτεραιότητας πελατών (default: 1)
- Διαθεσιμότητα εξυπηρετητή (default: 100%)

# Μετρικές απόδοσης

- *Χρόνος απόκρισης – response time* (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για ένα πελάτη.
- *Χρόνος αναμονής* για ένα πελάτη.
- *Ρυθμαπόδοση (throughput)*
- *Αριθμός πελατών* στο σύστημα.
- *Χρησιμοποίηση (Utilization)* του συστήματος.

# Συμβολισμός συστημάτων αναμονής

## ■ $A/B/m$

- $A, B$ : Συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας  $X.A$  και  $X.E$  αντίστοιχα. Εκφράζονται ως
  - $M$  (για την εκθετική κατανομή).
  - $D$  (για τη ντετερμινιστική [σταθερή] κατανομή).
  - $Er$  (για την κατανομή Erlang  $r$ -βαθμίδων).
  - $G$  (για ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)
- $m$ : αριθμός εξυπηρετητών

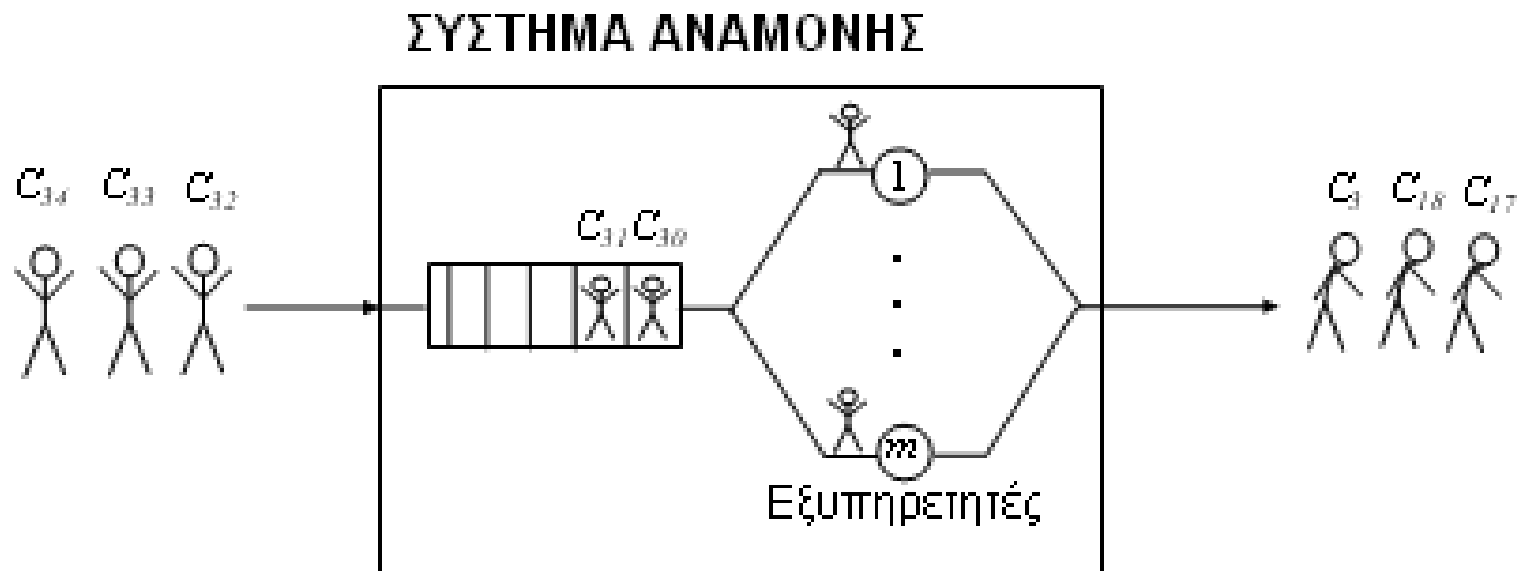
## ■ $A/B/m/K/M$

- $K$ : η χωρητικότητα του συστήματος
- $M$ : το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών  
όταν αυτά είναι διαφορετικά από  $\infty$

■ Παράδειγμα:  **$D/M/2//200$**



# Αναπαράσταση συστήματος αναμονής



- $A(t), B(x)$  : αυθαίρετα
- $m$  εξυπηρετητές
- Αριθμούμε τους πελάτες με το δείκτη  $n$  και ορίζουμε  $C_n$  τον  $n$ -οστό πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα

# Συμβολισμοί βασικών μεγεθών

- **Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:**

$\tau_n \equiv$  χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη  $C_n$

$t_n \equiv$  χρόνος μεταξύ των αφίξεων των  $C_{n-1}, C_n$

$$= \tau_n - \tau_{n-1} \text{ για } n \geq 2 \quad (t_1 = \tau_1)$$

$\text{Prob}[t_n \leq t] = A(t)$ , δηλαδή το  $A(t)$  είναι ανεξάρτητο του  $n$

$\bar{t}$  μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

Ρυθμός αφίξεων (arrival rate) των πελατών:  $\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$

- **Χρόνοι εξυπηρέτησης:**

$x_n \equiv$  χρόνος εξυπηρέτησης του  $C_n$

$\text{Prob}[x_n \leq x] = B(x)$

$\bar{x}$  : μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate) των πελατών :  $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$

# Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (2)

- **Χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:**

$w_n \equiv$  χρόνος αναμονής (στην ουρά) του  $C_n$ .

$W = \bar{w}$  μέσος χρόνος αναμονής

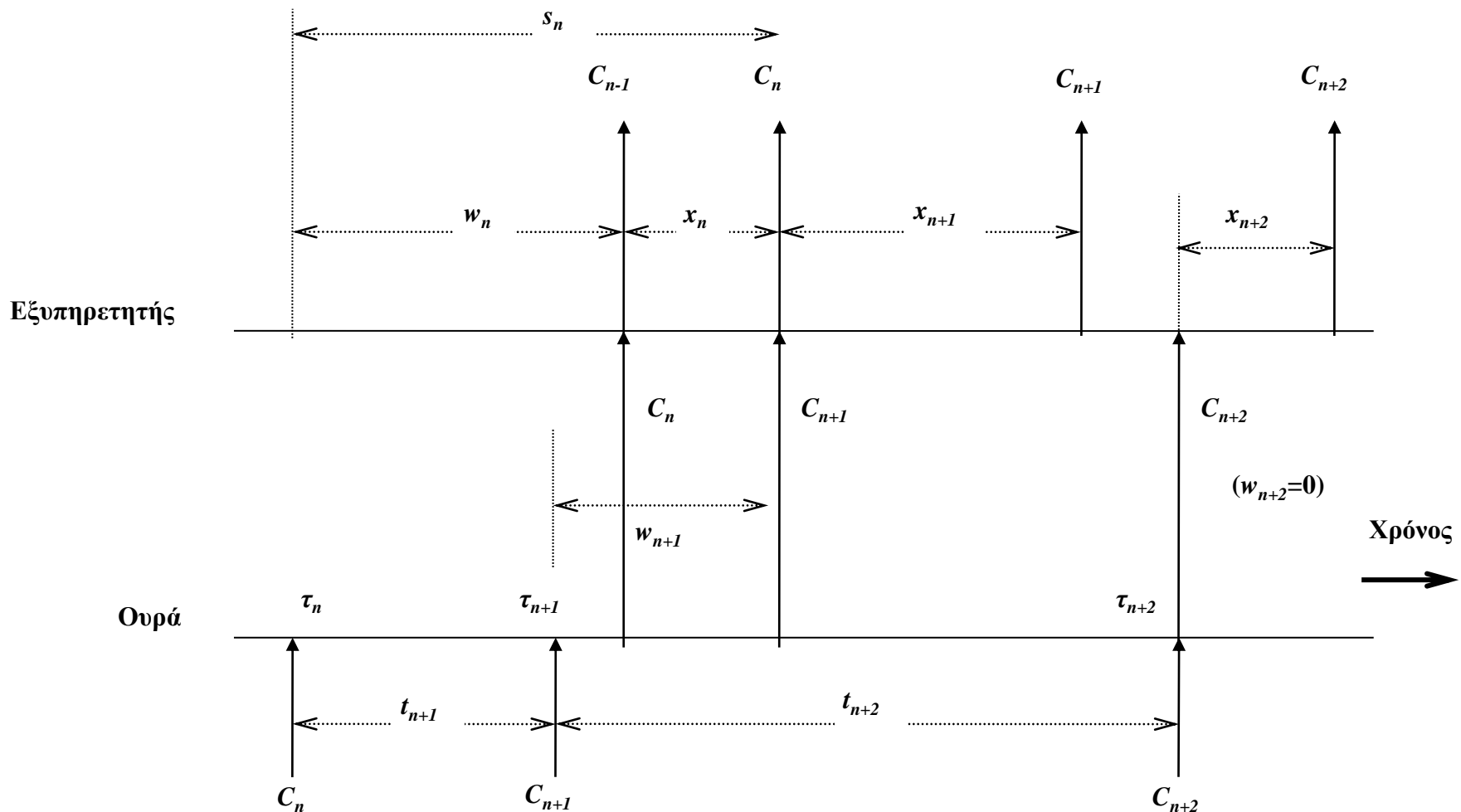
- **Συνολικός χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (χρόνος απόκρισης):**

$s_n \equiv$  χρόνος συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) του  $C_n$

$$= w_n + x_n$$

$T = W + \bar{x}$  μέσος χρόνος συστήματος (  $T \equiv \bar{s}$  )

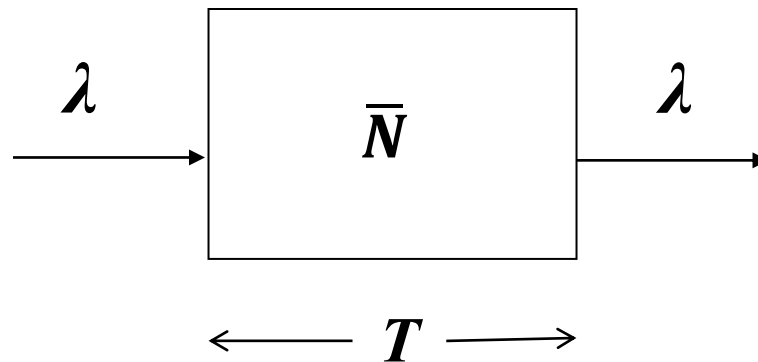
# Χρονικό Διάγραμμα Συστήματος Αναμονής (1 εξυπηρετητής – FCFS)



# Νόμος του Little

- Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ' αυτό.

$$\bar{N} = \lambda \cdot T$$

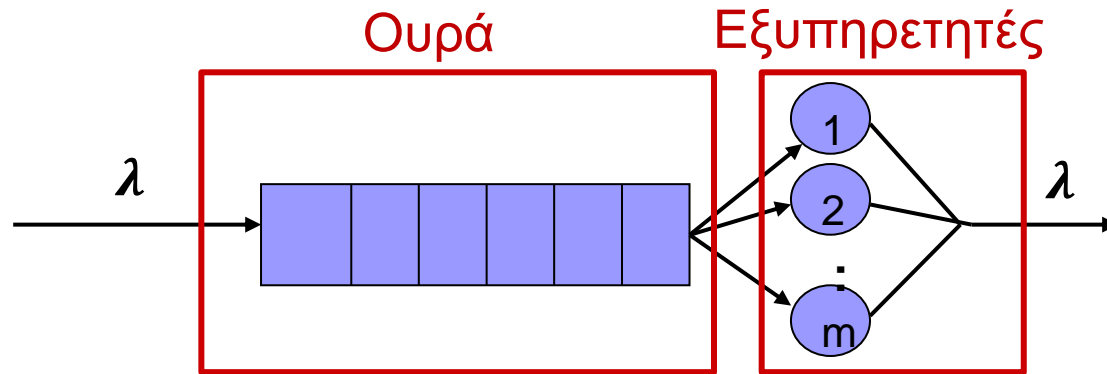


# Νόμος του Little (2)

- *Διαισθητική αιτιολόγηση:* ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα βρει μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών  $\bar{N}$  που θα υπάρχει όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν  $\lambda \cdot T$  πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

- Ο Νόμος δίνει μια χρήσιμη σχέση μεταξύ ορισμένων βασικών μεγεθών ενός συστήματος αναμονής, αλλά δεν αποτελεί «λύση» στο γενικό μας πρόβλημα: Ουσιαστικά συνδέει ένα γνωστό μέγεθος εισόδου ( $\lambda$ ), με δύο άγνωστα μεγέθη ( $\bar{N}$ ,  $T$ ) τα οποία είναι μετρικές απόδοσης που θέλουμε να βρούμε.

# Νόμος του Little (3)



- Για όρια του συστήματος μόνο στην ουρά

$$\bar{N}_q = \lambda \cdot W$$

- Για όρια συστήματος μόνο στον(-ους) εξυπηρετητή(-ές)

$$\bar{N}_s = \lambda \cdot \bar{x}$$

# Χρησιμοποίηση (Utilization)

- Ο **συντελεστής απασχόλησης ή χρησιμοποίηση**  $\rho$ , ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται «δουλειά» στο σύστημα, προς το **μέγιστο** ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μπορεί να εκτελέσει αυτή τη «δουλειά». Δηλαδή για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = (\text{μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών}) \times (\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}) / 1$$

→  $\rho = \lambda \cdot \bar{x}$  για σύστημα με 1 εξυπηρετητή

- Στην περίπτωση  $m$  (ίδιων) εξυπηρετητών:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$$

- $\rho = \{\text{Μέση τιμή του ποσοστού εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι}\}$ . Διότι:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m} = \frac{\bar{N}_s}{m} \quad (\text{N. Little})$$

Δηλαδή, για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = \bar{N}_s$$



# Σταθερό σύστημα αναμονής

- **Σταθερό** σύστημα αναμονής, είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου (άπειρου) μήκους.
- Σε ένα σταθερό σύστημα ισχύει  $0 \leq \rho < 1$

# G/G/1

- Έστω  $\tau$  ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος περιμένουμε ο **αριθμός των αφίξεων  $A$**  να είναι πολύ κοντά στην τιμή  $\lambda \cdot \tau$ . Επίσης, έστω  $p_0$  η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος  $\tau$ , ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος για  $\tau - \tau \cdot p_0$  sec και άρα ο **αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται  $B$**  στο χρονικό διάστημα  $\tau$ , είναι περίπου  $\frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$
- **$A = B$** :  $\lambda \cdot \tau \cong \frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$  οπότε για  $\tau \rightarrow \infty$ , έχουμε:  $\lambda \bar{x} = 1 - p_0$
- Οπότε  **$\rho = 1 - p_0$**   
όπου  $p_0$  η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα

# Στοχαστικές διαδικασίες

- **Στοχαστική Διαδικασία (Σ.Δ.):** ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.),  $X(t)$ , όπου οι Τ.Μ. έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο  $t$ .
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
  - **ο χώρος καταστάσεων** (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
    - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές  $\rightarrow$  Σ.Δ. **διακριτών-καταστάσεων** (αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων  $\leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$
    - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα  $\rightarrow$  Σ.Δ. **συνεχών-καταστάσεων**
  - **η χρονική παράμετρος** (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
    - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [  $X_n$  – Στοχαστική Ακολουθία ]
    - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [  $X(t)$  ]
  - **η στατιστική σχέση μεταξύ των Τ.Μ.**

# Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις ΤΜ

$\vec{X} = [X(t_1), X(t_2), \dots]$ , δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}; \vec{t}) \equiv P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

για όλα τα  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  και  $n$ .

# Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

## 1. Στάσιμες ΣΔ

Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό  $\tau$ , πρέπει:  $F_{\bar{X}}(\bar{x}; \vec{t} + \tau) = F_{\bar{X}}(\bar{x}; \vec{t})$  όπου  $\vec{t} + \tau = (t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$ .

## 2. Ανεξάρτητες ΣΔ

Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}; \vec{t}) \equiv f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{X_1}(x_1; t_1) \dots f_{X_n}(x_n; t_n)$$

# Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

## 3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov  $\{X(t)\}$ , η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή  $X(t_{n+1})$  θα είναι ίση με  $\mathbf{x}_{n+1}$ , εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή  $X(t_n) = \mathbf{x}_n$  και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

**Ιδιότητα Markov** (για αλυσίδα Markov):

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) = \mathbf{x}_{n+1} | X(t_n) = \mathbf{x}_n, X(t_{n-1}) = \mathbf{x}_{n-1}, \dots, X(t_1) = \mathbf{x}_1] = \\ = P[X(t_{n+1}) = \mathbf{x}_{n+1} | X(t_n) = \mathbf{x}_n] \end{aligned}$$

όπου  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ , ενώ τα  $x_i$  περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Θα αποδείξουμε αργότερα ότι ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

**Εκθετική Κατανομή** (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη - **Γεωμετρική Κατανομή** (διαδικασία διακριτού χρόνου).

# Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (4)

## 4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Δηλαδή αν  $X(t_n) = i$ , τότε  $X(t_{n+1}) = i - 1$  ή  $X(t_{n+1}) = i + 1$  μόνο.

## 5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα σε αυτές τις στιγμές λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

# Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (5)

## 6. Τυχαίοι περίπατοι

Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

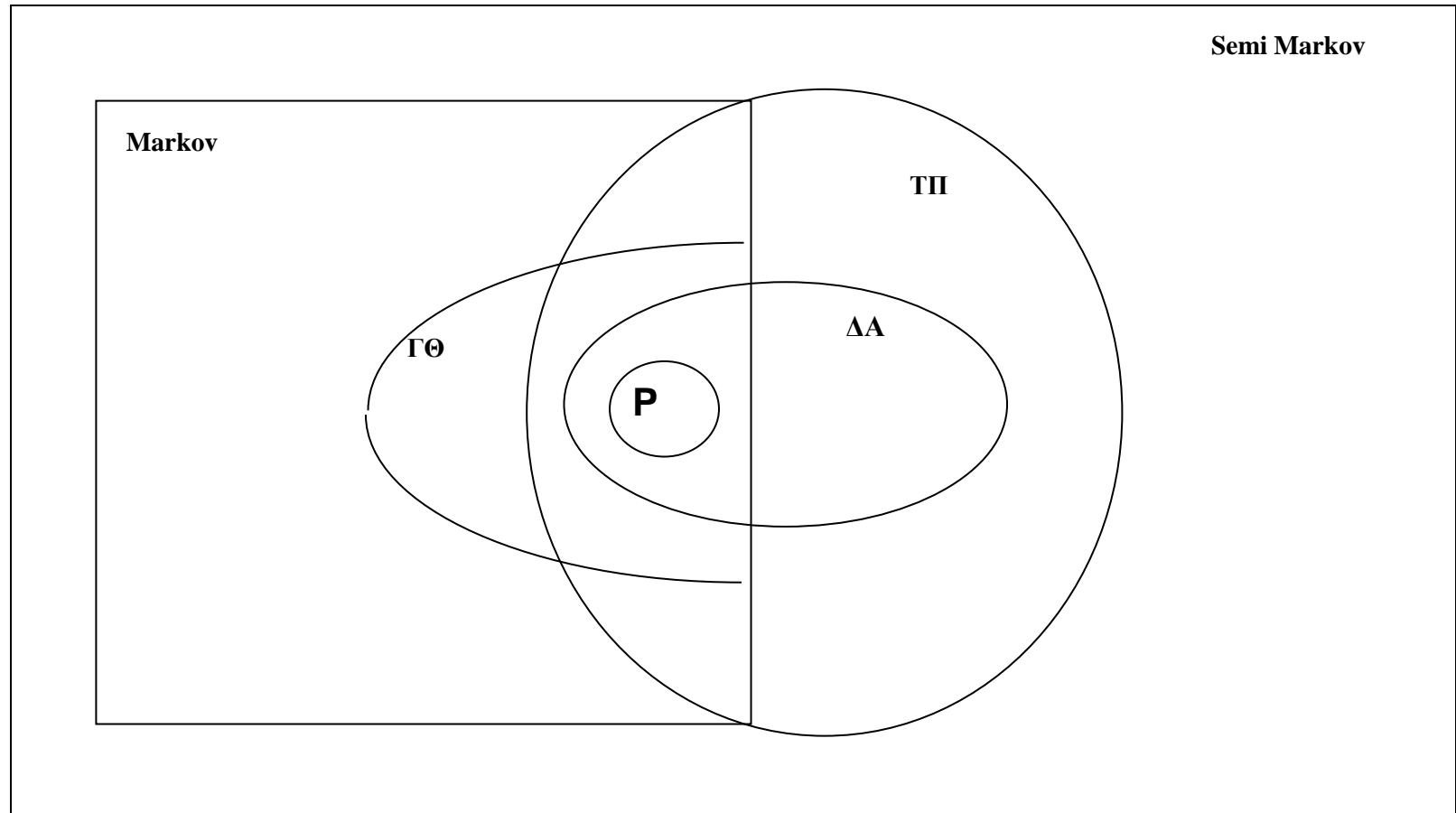
Δηλαδή, μια ακολουθία TM  $\{S_n\}$  είναι τυχαίος περίπατος αν:  
 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  όπου  $n = 1, 2, \dots$ ,  $S_0 = 0$  και  $X_1, X_2, \dots$  είναι ακολουθία ανεξάρτητων TM με κοινή κατανομή.

## 7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- $S_n$  είναι τώρα η TM που καθορίζει τη χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η  $n$ -οστή μεταβολή κατάστασης και  $\{X_n\}$  είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων TM, όπου η  $X_n$  αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της  $(n-1)$ -οστής και  $n$ -οστής μεταβολής κατάστασης. Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.



# Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



**P:** Poisson

# Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την κατάσταση  $E_i$  όπου είναι στο βήμα  $(n-1)$ , στην κατάσταση  $E_j$  κατά το βήμα  $n$

$$P[X_n = j \mid X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$$

Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

# Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι **πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος** είναι ανεξάρτητες του  $n$ , τότε έχουμε μια **ομογενή αλυσίδα Markov**. Ορίζουμε:

$$p_{ij} \equiv P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$$

- Πιθανότητες μετάβασης  $m$ -βημάτων:

$$p_{ij}^{(m)} \equiv P[X_{n+m} = j \mid X_n = i]$$

- Εύκολα βγαίνει:  $p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$

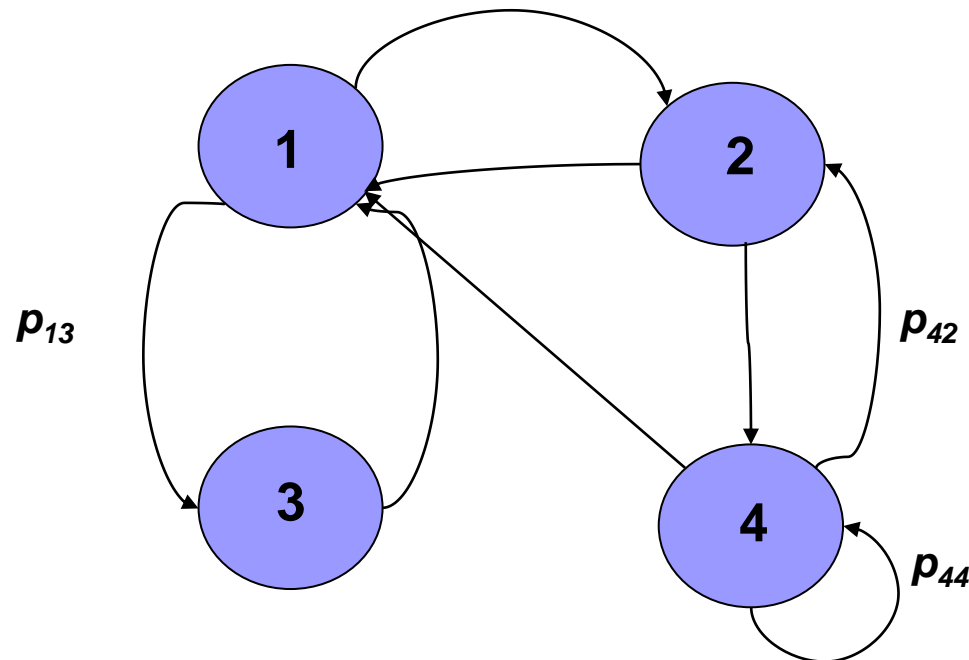
- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την  $E_i$  στην  $E_j$  μέσα σε  $m$  βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την  $E_i$  σε κάποια  $E_k$  μέσα σε  $(m-1)$  βήματα και μετά από την  $E_k$  στην  $E_j$  στο επόμενο βήμα

# Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος  $m_0$  για κάθε ζευγάρι καταστάσεων  $E_i, E_j$ :

$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$

ΑΜΕΙΩΤΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

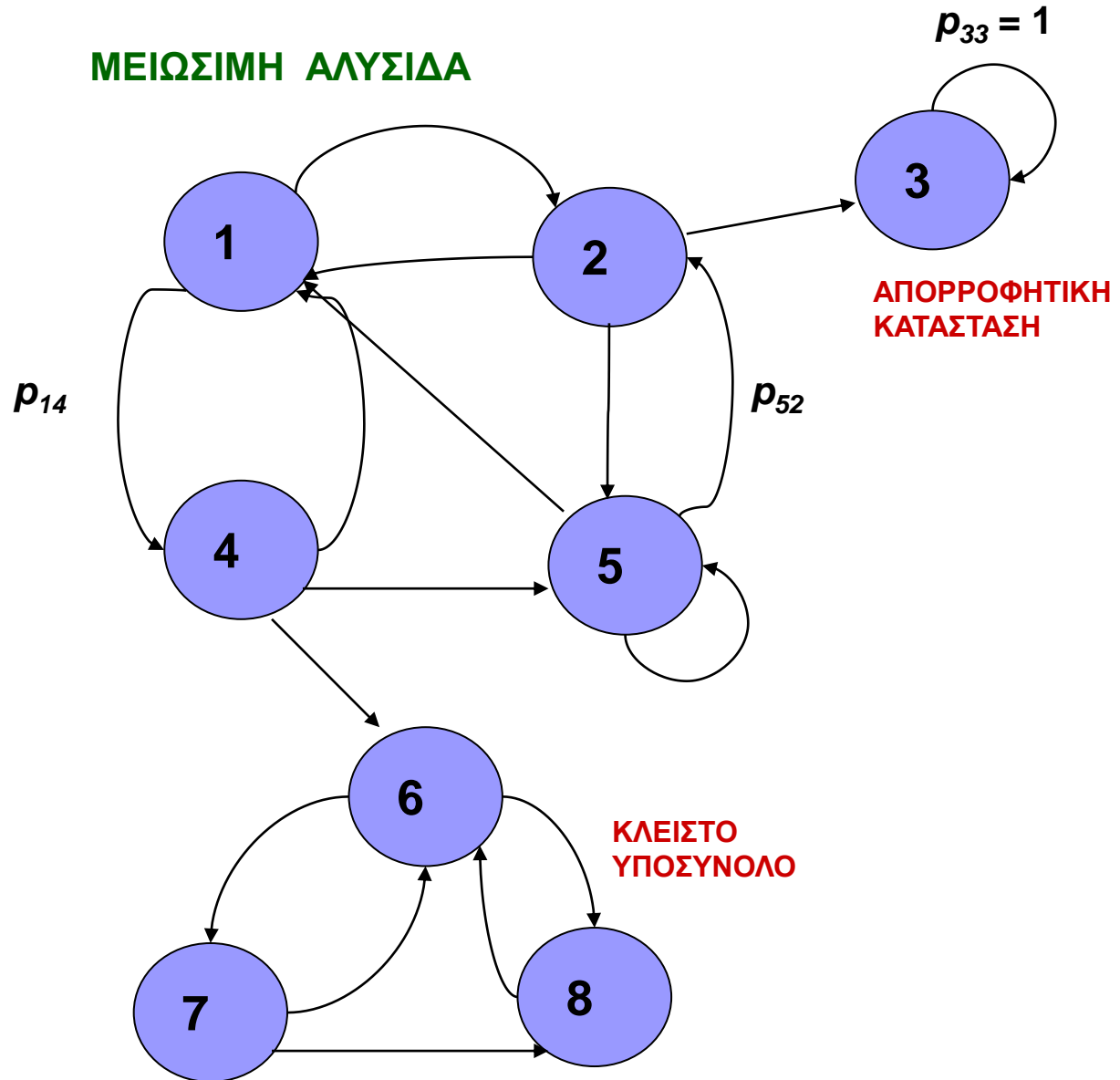


# Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων  $A1$  λέγεται **κλειστό** αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του  $A1$  σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του  $A1$ .
- Αν το  $A1$  αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω  $E_i$ , τότε αυτή καλείται **απορροφητική** κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η  $E_i$  απορροφητική, είναι  $p_{ii} = 1$ .
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα, η αλυσίδα λέγεται **μειώσιμη**.

# Παράδειγμα

ΜΕΙΩΣΙΜΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



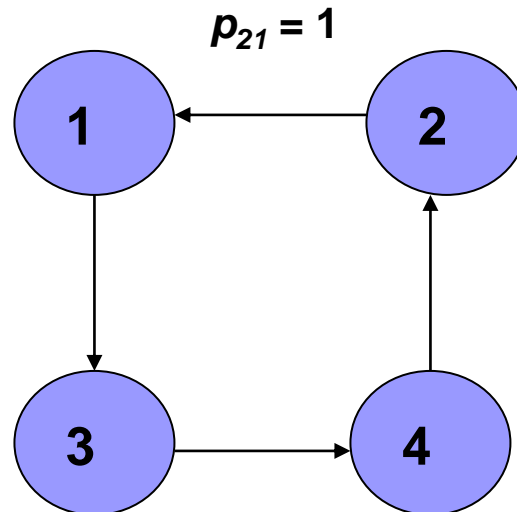
# Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

- $f_j^{(n)} \equiv \text{Prob} [ \text{Η πρώτη επιστροφή στην } E_j \text{ γίνεται μετά από } n \text{ βήματα από την αναχώρηση από την } E_j ]$
- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = \text{Prob}[ \text{Κάποτε να επιστρέψουμε στην } E_j ]$
- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση  $E_j$ ,  $f_j$ , είναι  $f_j = 1$ , η κατάσταση  $E_j$  λέγεται **επαναληπτική**.
- Αν  $f_j < 1$ , λέγεται **μεταβατική**.

# Ορισμοί για αλυσίδες Markov (4)

- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην  $E_j$  είναι  $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ , ( $\gamma$  ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος) τότε η  $E_j$  λέγεται **περιοδική** με περίοδο  $\gamma$ . Αν  $\gamma = 1$  τότε η  $E_j$  είναι **μη-περιοδική**.

## ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ





# Ορισμοί για αλυσίδες Markov (5)

- Για τις καταστάσεις με  $f_j = 1$ , ορίζουμε το **Μέσο Χρόνο Επανάληψης της** (επιστροφής στην)  $E_j$  :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην  $E_j$ ,  $M_j$ , είναι  $M_j = \infty$ , η  $E_j$  λέγεται **μηδενικά επαναληπτική**, ενώ αν είναι  $M_j < \infty$ , η  $E_j$  λέγεται **βέβαια επαναληπτική**.

# Θεώρημα 1

- Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε **όλες μεταβατικές**, είτε **όλες βέβαια επαναληπτικές** ή **όλες μηδενικά επαναληπτικές**. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο  $\gamma$ .

# Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P[X_n = j]$  : Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση  $E_j$  κατά το  $n$ -στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$  : στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση  $E_j$  κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$$

- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης  $\{\pi_j^{(0)}\}$  έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα  $\{\pi_j\}$  είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

# Θεώρημα 2

Σε μια **αμείωτη** και **μη-περιοδική ομογενή αλυσίδα Markov**, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$  υπάρχουν πάντα, και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι **μεταβατικές** ή όλες είναι **μηδενικά επαναληπτικές**, οπότε  $\pi_j = 0$  και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.
2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι **βέβαια επαναληπτικές** και τότε  $\pi_j > 0$  για όλα τα  $j$ , στην οποία περίπτωση το σύνολο  $\{\pi_j\}$  είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες  $\pi_j$  καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i$$

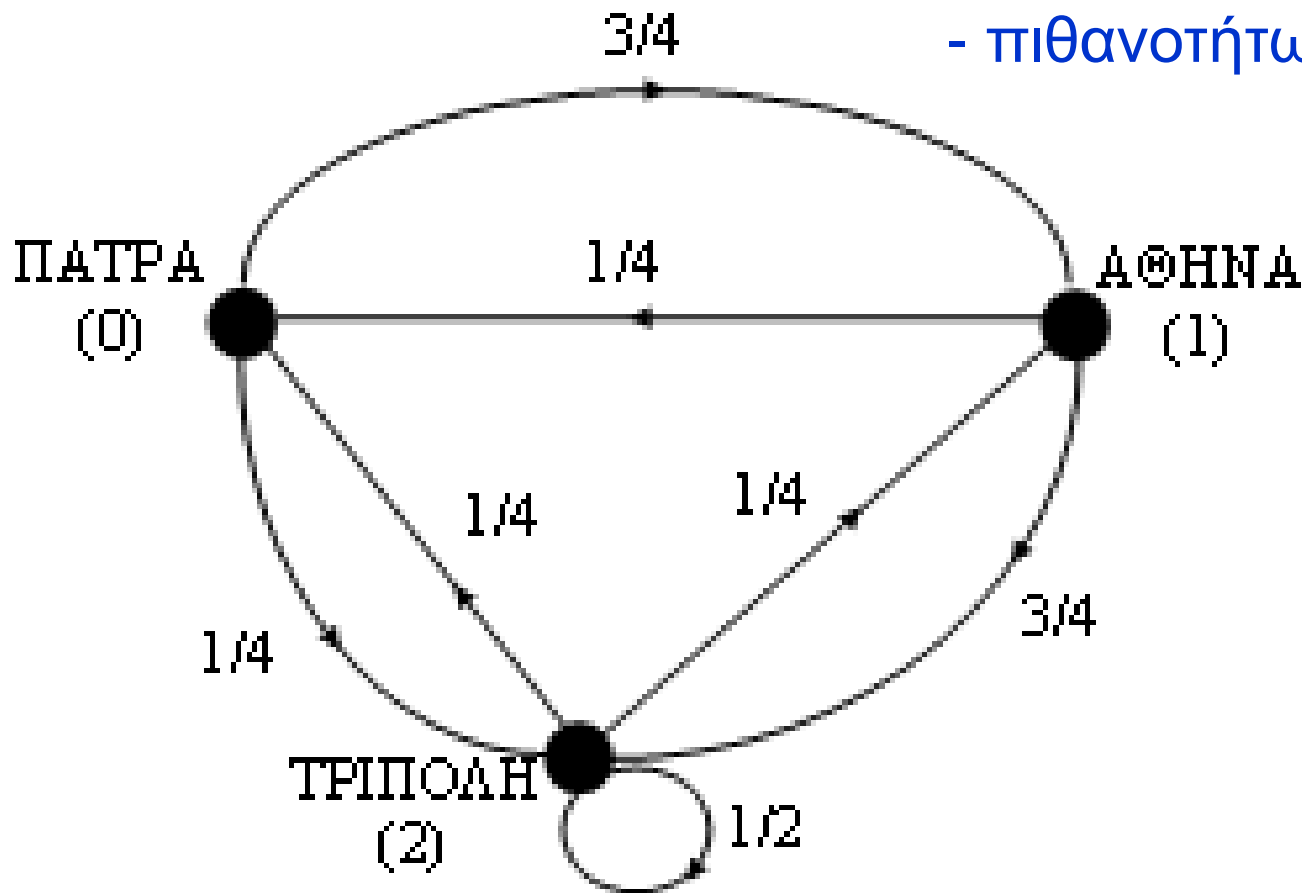
$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

# Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση  $E_j$  λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.  
Δηλαδή αν  $f_j = 1$ ,  $M_j < \infty$  και  $\gamma = 1$ .
- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι **εργοδικές**, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια **εργοδική**.

# Παράδειγμα

Διάγραμμα καταστάσεων -  
- πιθανοτήτων μεταβάσεων



# Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

- $\vec{\mathbf{P}} = [p_{ij}]$  πίνακας μεταβάσεων

- $\vec{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$  διάνυσμα πιθανοτήτων

- Από το θεώρημα 2:  $\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

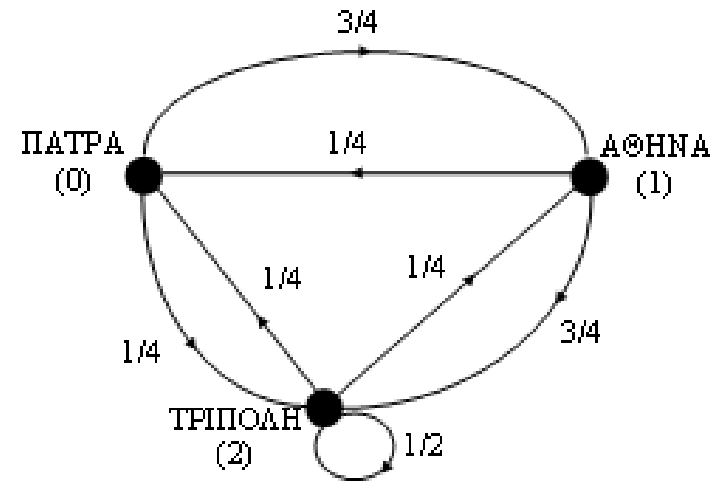
## ■ Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\pi_0 = 0 \cdot \pi_0 + \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi_0 + \frac{3}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$



Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τις:

$$\pi_0^{(n+1)} = 0 \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_1^{(n+1)} = \frac{3}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + 0 \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{3}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{2} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_0^{(n)} + \pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} = 1$$

για  $n \rightarrow \infty$



# Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (3)

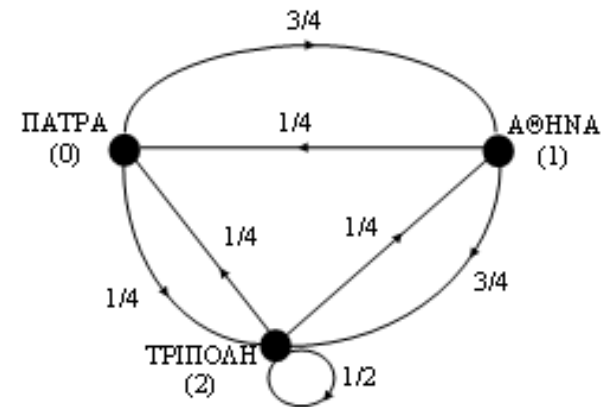
## ■ Αποτέλεσμα:

$$\pi_0 = 1/5 = 0.20$$

$$\pi_1 = 7/25 = 0.28$$

$$\pi_2 = 13/25 = 0.52$$

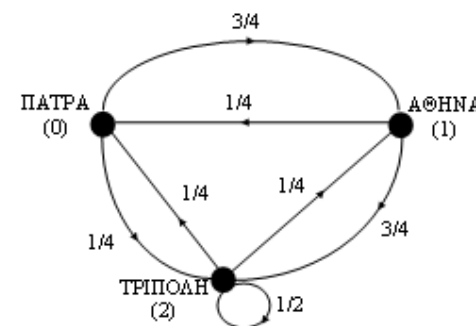
Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης



# Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

- Υπολογισμός πιθανοτήτων  $\pi_j^{(n)}$  : η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση  $E_j$  τη χρονική στιγμή  $n$ .
- $\vec{\pi}^{(n)} \equiv [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$  διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα  $n$
- Ισχύει ότι 
$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}$$
$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(0)} \cdot (\mathbf{P})^n$$

# Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (2)



- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η  $\vec{\pi}^{(0)} = [1, 0, 0]$ , δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	...	$\infty$
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	...	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	...	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	...	0.52

- Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.

# Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

*Prob [ Το σύστημα να παραμείνει στην  $E_i$  για ακριβώς  $m$  επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην  $E_i ] = (1 - p_{ii}) p_{ii}^m$*

Γεωμετρική κατανομή  
(Ιδιότητα αμνησίας)

# Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (1)

Τα απλούστερα συστήματα:  $M/M/m/K$

- Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων  $\tilde{t}$  (Στοχαστική Διαδικασία «όμοιων» αφίξεων)

$$A(t) = A_{\tilde{t}}(t) = Prob[\tilde{t} \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

- Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης  $\tilde{x}$

$$B(x) = B_{\tilde{x}}(x) = Prob[\tilde{x} \leq x] = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

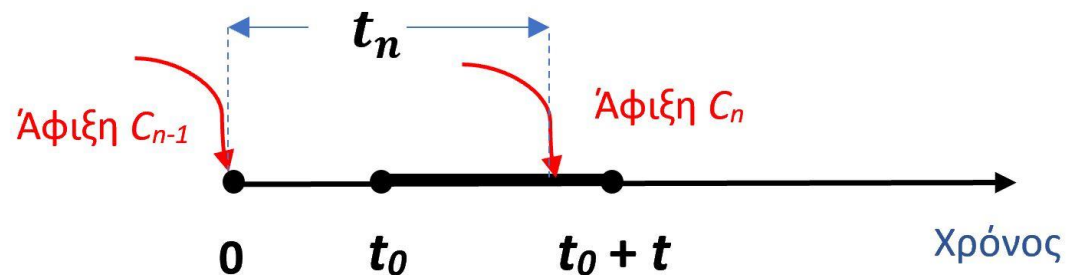
## Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (2)

- **Ιδιότητα της αμνησίας:** «ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός».

- **ΑΦΙΞΕΙΣ:**

Αν έχει περάσει χρόνος  $t_0$  από την τελευταία άφιξη (του  $C_{n-1}$ )

$$Prob[ t_n \leq t + t_0 \mid t_n > t_0 ] = Prob[ t_n \leq t ]$$



- **ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ:**

Αν έχει περάσει χρόνος  $x_0$  εξυπηρέτησης του πελάτη  $C_n$

$$Prob[ x_n \leq x + x_0 \mid x_n > x_0 ] = Prob[ x_n \leq x ]$$

# Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (3)

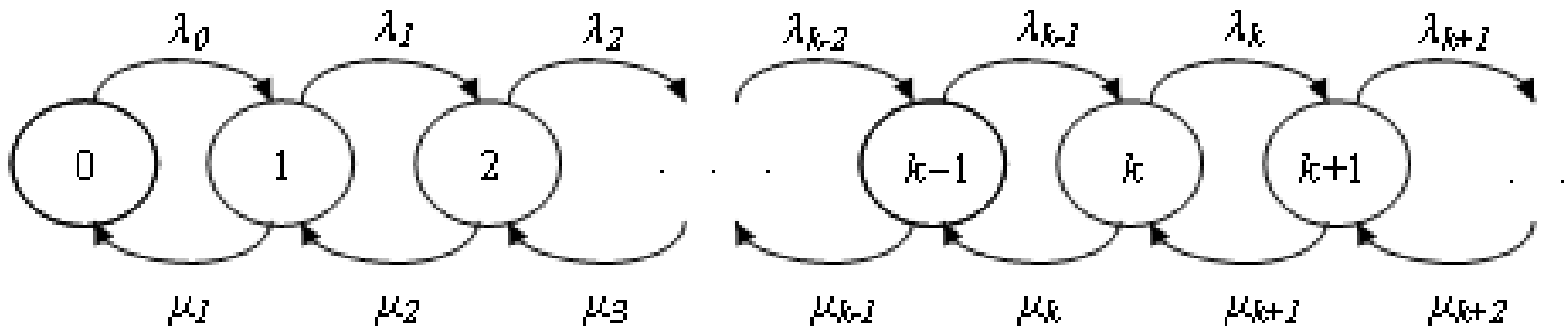
- $P_k(t) = \text{Prob}[k \text{ πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή } t]$   
για  $0 \leq k \leq K, t \geq 0$
- $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \text{Prob}[k \text{ πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον}]$
- *Κατανομή μόνιμης κατάστασης.*
- Υπάρχει, αν το σύστημα είναι σταθερό ( $0 \leq \rho < 1$ )

## ***Νόμος ισορροπίας της ροής πιθανότητας***

Στη μόνιμη κατάσταση, ο «ρυθμός ροής πιθανότητας» μιας αλυσίδας Markov από κάθε κατάσταση, είναι ίσος με το «ρυθμό ροής πιθανότητας» προς την κατάσταση.

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (1)

- Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ , τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις  $j-1$  ή  $j+1$ .
- $\lambda_k$ : ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν  $k$  πελάτες στο σύστημα
- $\mu_k$ : ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν  $k$  πελάτες στο σύστημα



**Διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μεταβάσεων**



## Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (2)

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **από** την κατάσταση  $k$ } =

$$p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **προς** την κατάσταση  $k$ } =

$$p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$$

- Με βάση το νόμο ισορροπίας ροής

- Για  $k \geq 1$   $p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k) = p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$  (1)

- Για  $k = 0$   $p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$  (2)

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (3)

- Ισχύει πάντα ότι 
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \quad (3)$$

- Λύνοντας τις εξισώσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

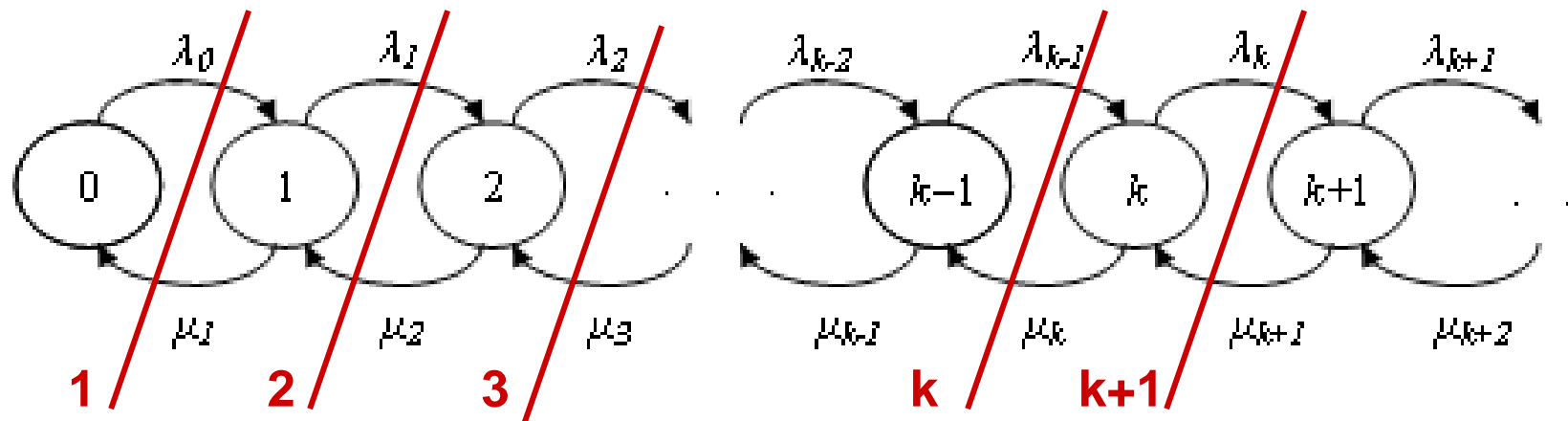
$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad (4)$$

- Η παραπάνω λύση υπάρχει (δηλαδή, υπάρχει μόνιμη κατάσταση), αν  $p_0 > 0$ , δηλαδή αν ο παρονομαστής της σχέσης (4) είναι μικρότερος από  $\infty$ . Για να ισχύει το τελευταίο, θα πρέπει η ακολουθία  $\lambda_k / \mu_k$  να συγκλίνει, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιο  $k_0$  τέτοιο ώστε: 
$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 \quad \text{για όλα τα } k \geq k_0$$

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (4)

## ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Ο Νόμος διατήρησης της ροής εφαρμόζεται και σε κάθε «σύνορο» της αλυσίδας Markov:



**1:**  $\rho_0 \cdot \lambda_0 = \rho_1 \cdot \mu_1$

**2:**  $\rho_1 \cdot \lambda_1 = \rho_2 \cdot \mu_2$

:

**k:**  $\rho_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = \rho_k \cdot \mu_k$

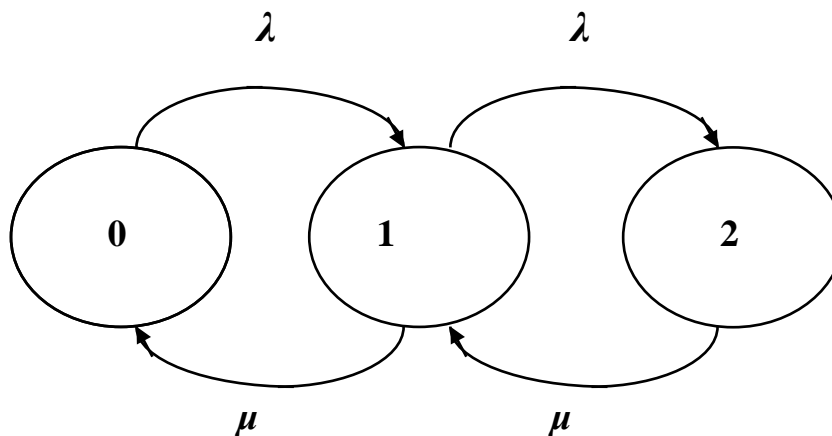
Ίδια Αποτελέσματα

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (5)

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μας δίνεται μια αλυσίδα Markov γεννήσεων – θανάτων, η οποία έχει μόνο τρεις καταστάσεις  $\{0, 1, 2\}$ , ενώ ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \text{ για } k = 0, 1 \quad \text{και} \quad \mu_k = \mu \text{ για } k = 1, 2$$



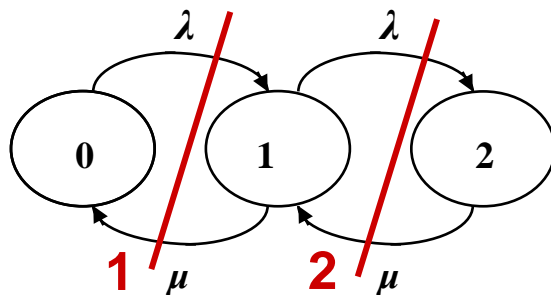
Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Για την κατάσταση 0:  $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 1:  $p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 2:  $p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda$

Από τις παραπάνω 3 σχέσεις, μόνο οι 2 είναι ανεξάρτητες.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:



**1:**  $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

**2:**  $p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$

.....ανεξάρτητες.

# Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Χρησιμοποιούμε την  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$  με 2 από τις παραπάνω, και παίρνουμε την τελική λύση:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

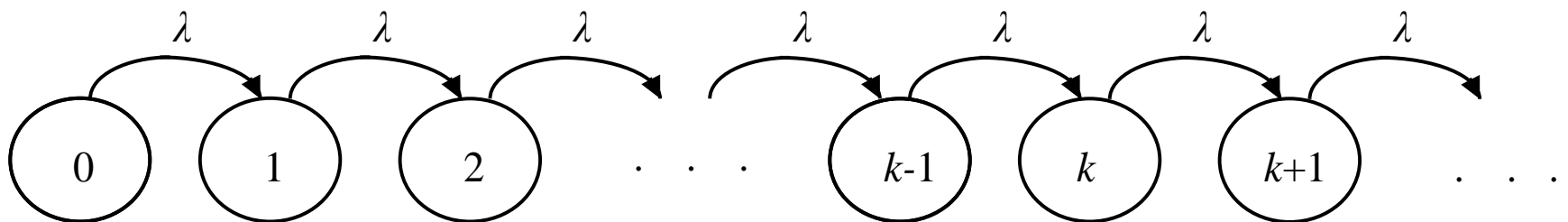
$$p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

$$p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

- Η αλυσίδα αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα **M/M/1/2**. Γιατί;
- Στο σύστημα αυτό επιτρέπεται  $\lambda/\mu \geq 1$ . Γιατί;

# Διαδικασίες Poisson (1)

- Ειδική περίπτωση Γεννήσεων-Θανάτων (μόνο αφίξεις)
  - $\lambda_k = \lambda$  για όλα τα  $k$
  - $\mu_k = 0$  για όλα τα  $k$



Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων Διαδικασίας Poisson

Δεν είναι εργοδικό σύστημα. Όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές.

# Διαδικασίες Poisson (2)

- Έστω το σύστημα ξεκινά τη στιγμή  $t = 0$ , άδειο. Δηλαδή:

$$P_{\kappa}(0) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ 0, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

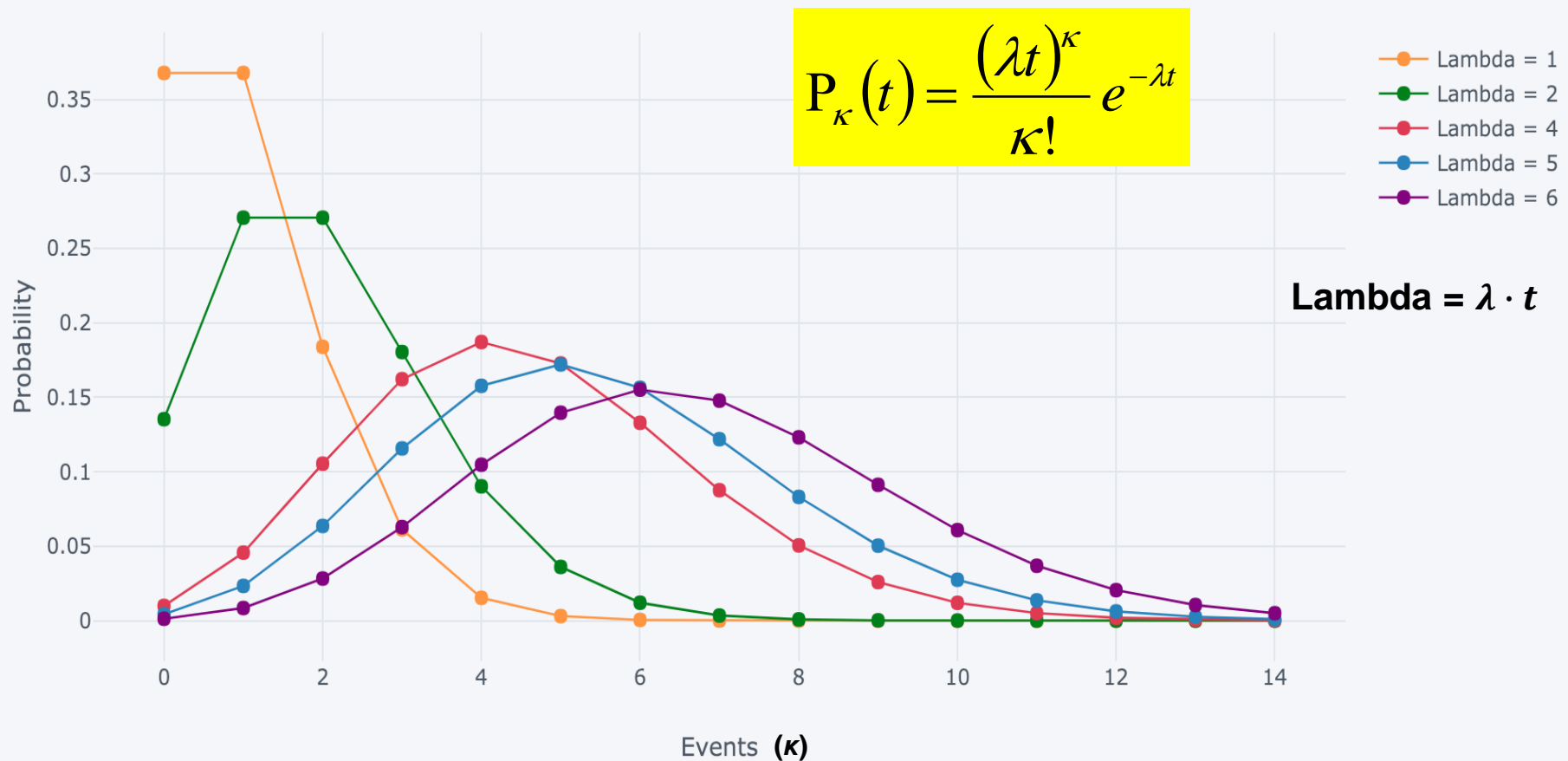
- Τη χρονική στιγμή  $t$ :  $P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$  για  $k \geq 0, t \geq 0$   
Κατανομή Poisson

- Μέση Τιμή και Διακύμανση (αριθμού αφίξεων στο  $[0, t]$ ), ίσα με  $\lambda t$ . (αναμενόμενο).
- Δηλαδή, στο M/M/1, η διαδικασία μόνο των αφίξεων, είναι Poisson



# Η κατανομή Poisson

Probability of Events in One Interval



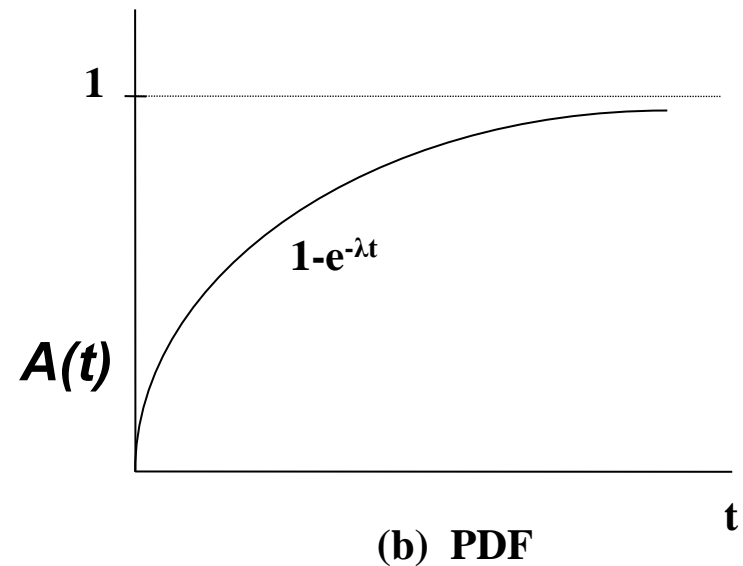
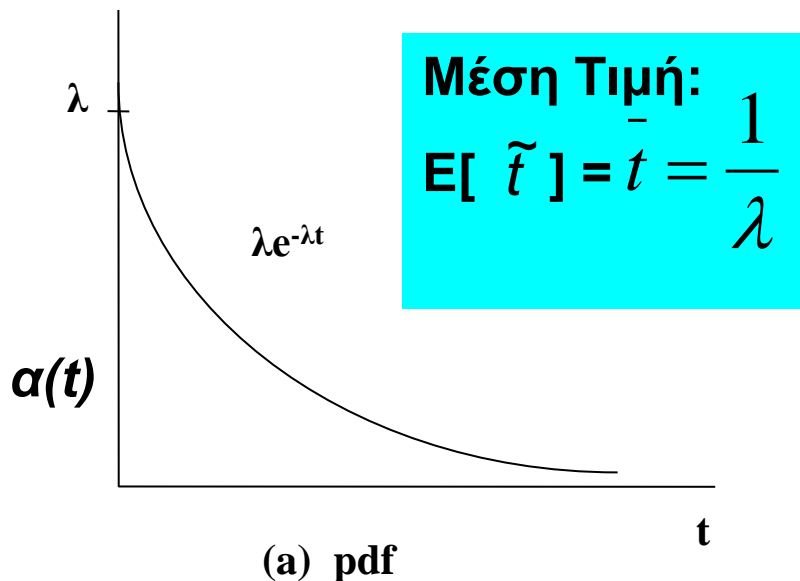
# Poisson αφίξεις → Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ αφίξεων

$$P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$$

- $\tilde{t}$  = TM για το χρόνο μεταξύ αφίξεων, με PDF  $A(t)$  και pdf  $\alpha(t)$

$$A(t) = 1 - P[\tilde{t} > t] = 1 - \overbrace{P_0(t)}^{\text{Poisson}} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{PDF Εκθετικής})$$

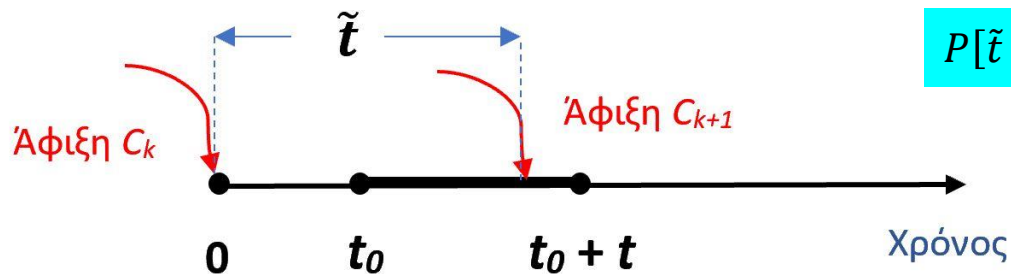
$$\text{Παράγωγος ως προς } t: \quad \alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{pdf Εκθετικής})$$



Η εκθετική κατανομή

# Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής

Έστω ότι γίνεται μια άφιξη τη χρονική στιγμή  $0$ . Τώρα, έστω ότι πέρασαν  $t_0$  δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των οποίων δεν έγινε άφιξη. Αν αυτή τη στιγμή  $t_0$  ρωτήσουμε «ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να γίνει μέσα στα επόμενα  $t$  δευτερόλεπτα από τώρα», η απάντηση θα είναι:

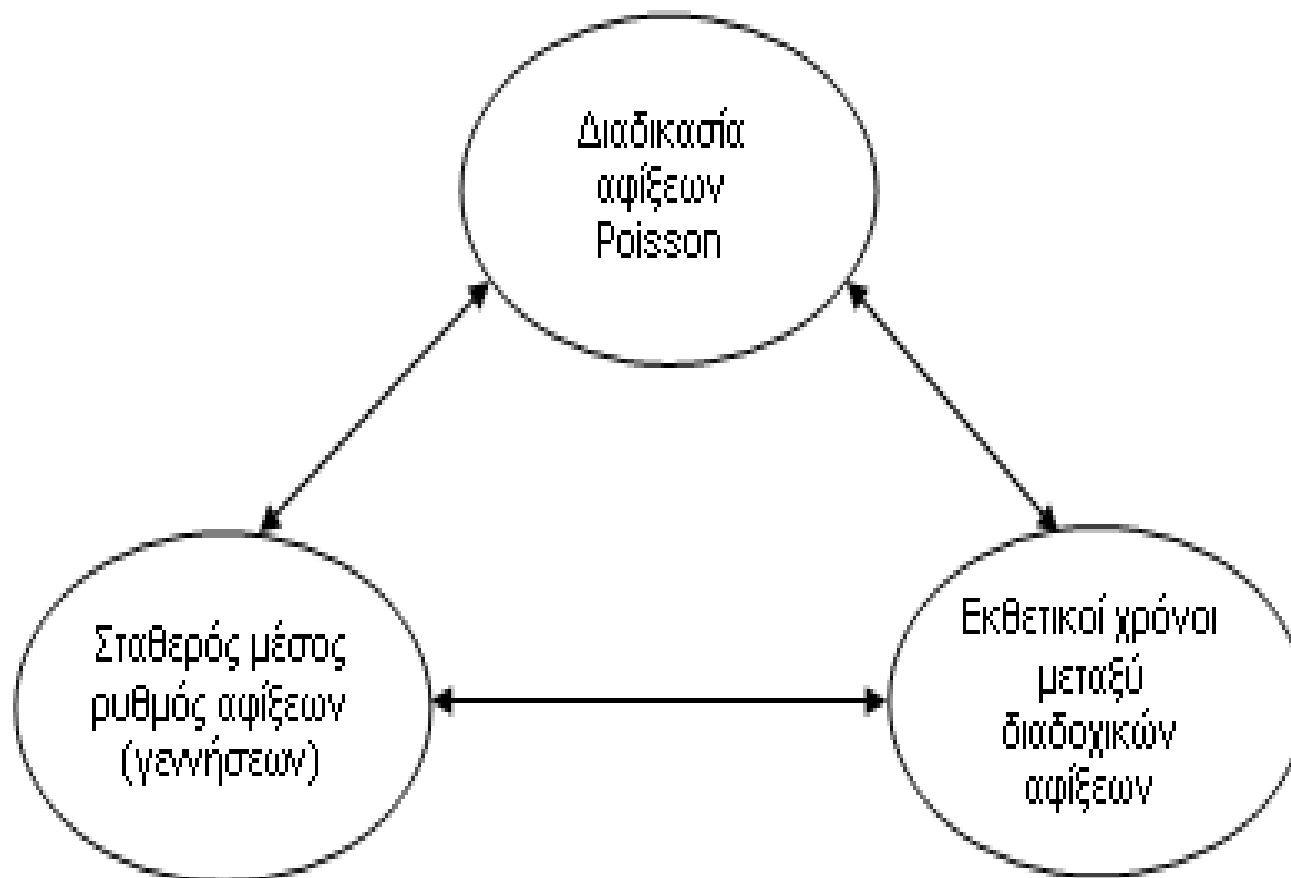


$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{P[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]} = \frac{P[\tilde{t} \leq t + t_0] - P[\tilde{t} \leq t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]}$$

$$\Leftrightarrow P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} \Leftrightarrow$$

$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = P[\tilde{t} \leq t]$$

# Σχέσεις



# Το κλασικό Σύστημα Αναμονής

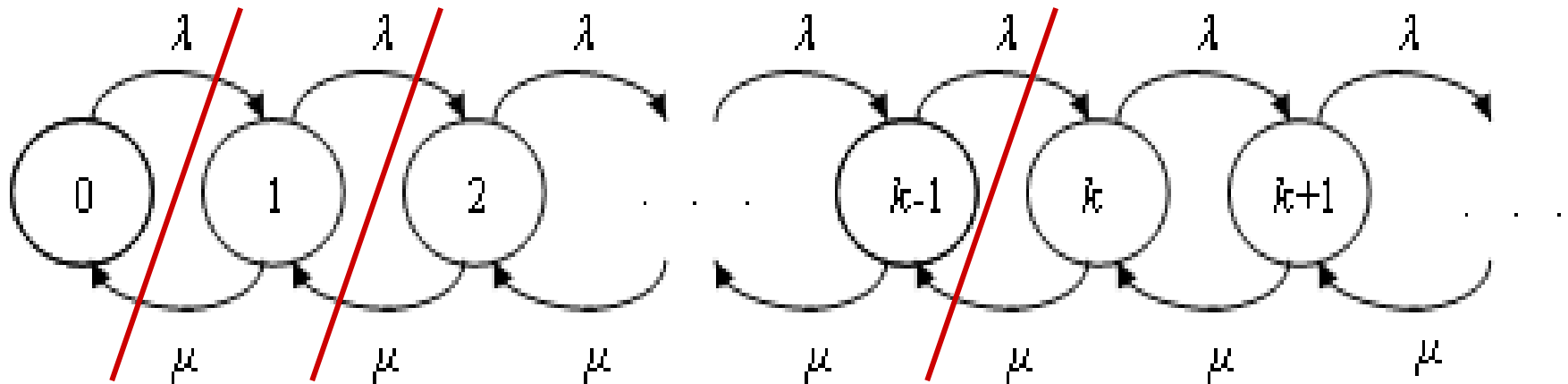
## *M/M/1*

- *Εκθετική* κατανομή της διαδικασίας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- *Εκθετική* κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης
- Ένας εξυπηρετητής
- Άπειρο μήκος ουράς
- Αλυσίδα Markov Γεννήσεων – Θανάτων
- Με τη συνηθισμένη παραδοχή ότι οι *ρυθμοί* αφίξεων και εξυπηρέτησης δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός παρόντων πελατών), ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

# Το Σύστημα Αναμονής $M/M/1$ (συνέχεια)



Διάγραμμα καταστάσεων - ρυθμών μεταβάσεων για το σύστημα  $M/M/1$ .

**Για τη λύση:**

$$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$$

$$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$$

:

$$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$$

:

και 
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

# Λύση συστήματος $M/M/1$

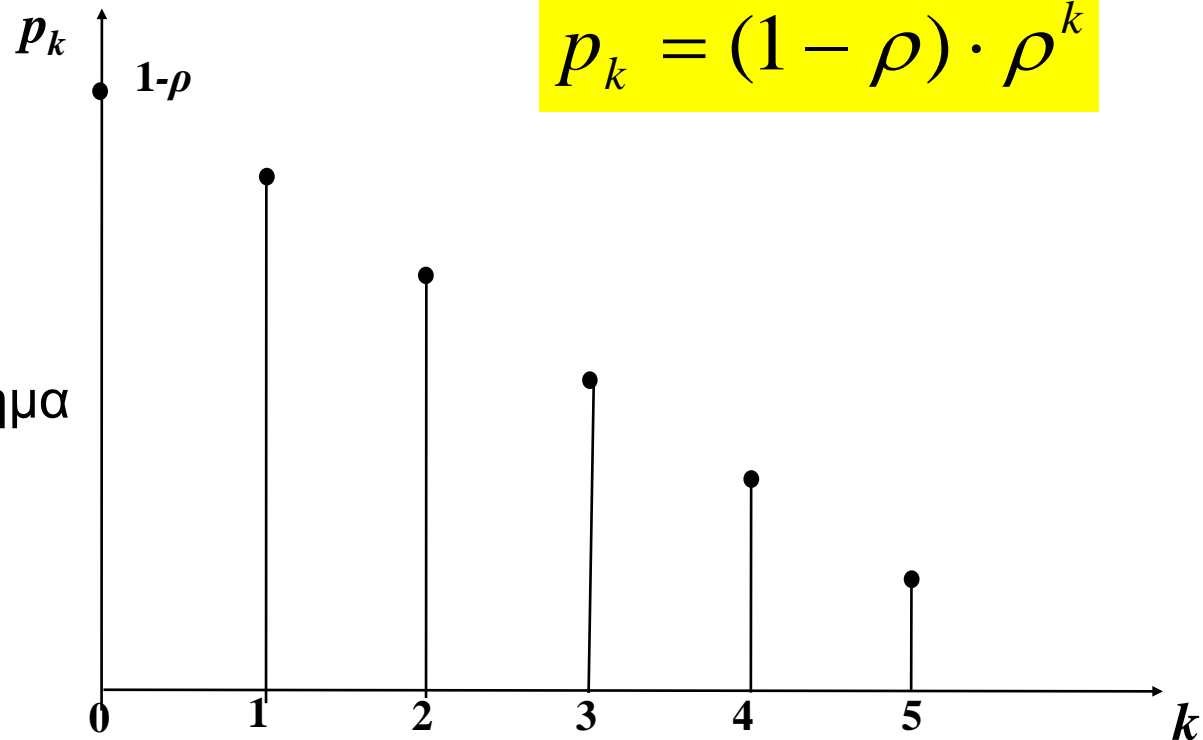
- Χρησιμοποίηση (G/G/1):  $\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \frac{\lambda}{\mu}$
- Συνθήκη σταθερότητας:  $0 < \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$
- Από τη γενική λύση των διαδικασιών Γ-Θ (ή την προσέγγιση της προηγούμενης διαφάνειας):

$$p_k = (1 - \rho) \cdot \rho^k \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Περιέχεται το:  $p_0 = 1 - \rho$

# Λύση συστήματος $M/M/1$ (συν)

- Τα  $p_k$  ακολουθούν τη Γεωμετρική Κατανομή
- Εξαρτώνται από τα  $\lambda$  και  $\mu$ , μόνο μέσω του λόγου ΤΟΥΣ  $\rho$



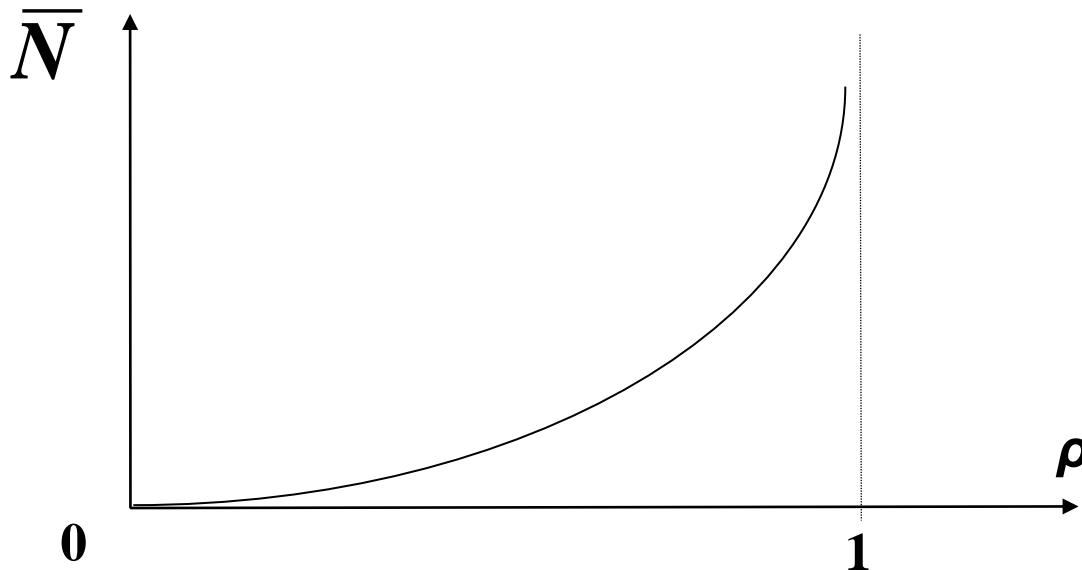
Τα  $p_k$  στο σύστημα  $M/M/1$ .



# Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

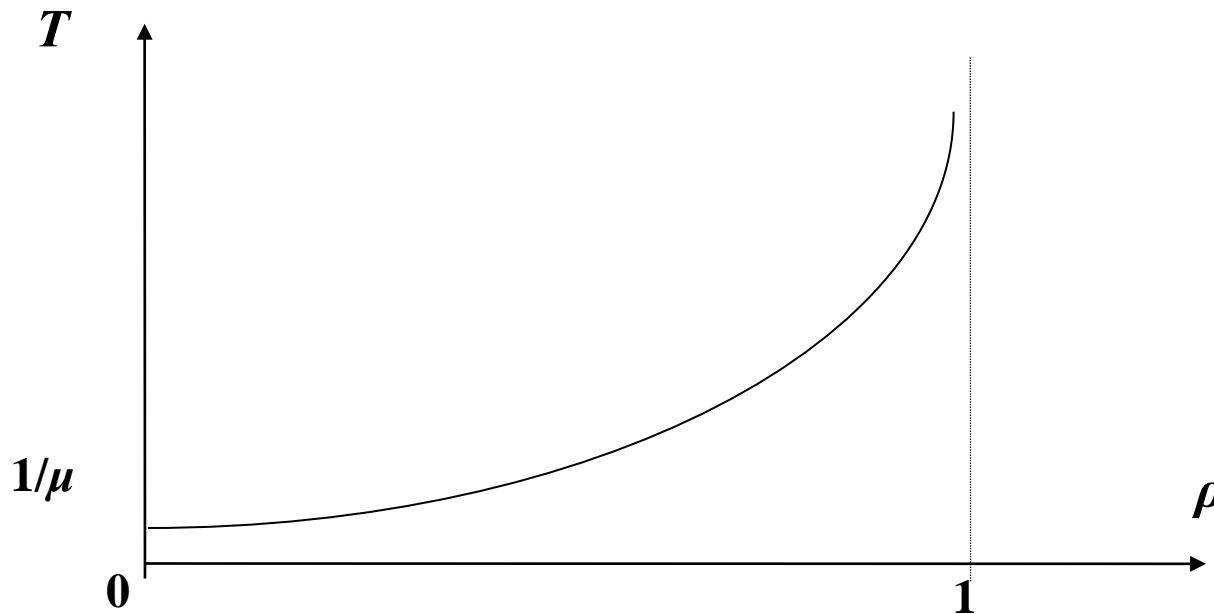


# Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα  
(*Response Time*)

Με χρήση του *Νόμου του Little*:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$



# Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον  $n$  πελάτες στο σύστημα

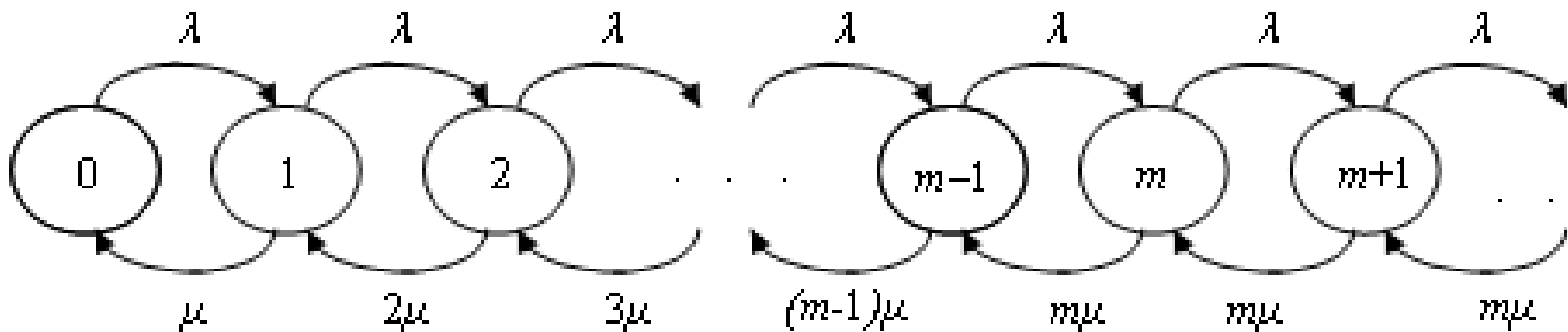
$$P_{(n)} = \text{Prob}[n \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$$

$$P_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = (1 - \rho) \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \frac{1}{1 - \rho} = \rho^n$$

# Το σύστημα αναμονής $M/M/m$

- $m$  ίδιοι εξυπηρετητές
- Ο καθένας με ρυθμό εξυπηρέτησης  $\mu$
- Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, ίδια με του  $M/M/1$
- $\lambda_k = \lambda$  για  $k = 0, 1, 2, \dots$

- $$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ m\mu & \text{για } m \leq k \end{cases}$$



# Το σύστημα αναμονής $M/M/m$ (συν)

## ■ Χρησιμοποίηση

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

## Συνθήκη Σταθερότητας

$$0 < \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

## ■ Λύση μόνιμης κατάστασης

$$P_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!} & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} & \text{για } k \geq m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left( \frac{(m\rho)^m}{m!} \right) \left( \frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

# Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$

- Πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά ένας πελάτης:

$\Pi = Prob[ m \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} = p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m\rho + \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

# Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$ (συν)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (response time)

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{\Pi}{m(1-\rho)} \right) \quad (\text{N. Little})$$

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\Pi}{m\mu(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m\rho = \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

# Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$

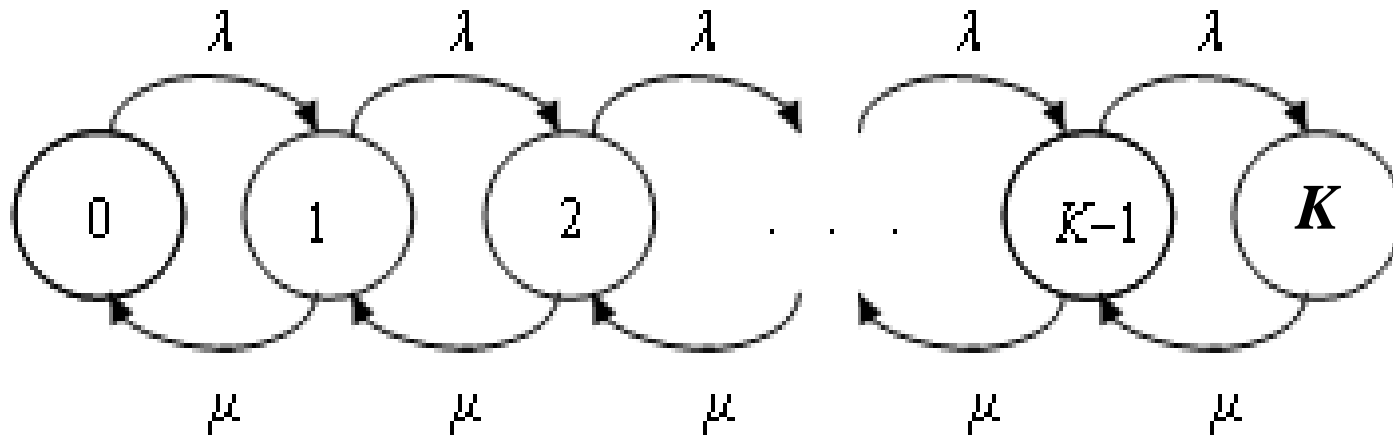
- Ίδια χαρακτηριστικά με το  $M/M/1$ , αλλά περιορισμένη χωρητικότητα σε πελάτες.
- Στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ  $K$  πελάτες (στην ουρά και στον εξυπηρετητή).
- Πελάτες που φθάνουν και βρίσκουν γεμάτο το σύστημα, χάνονται.
- Οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης του  $M/M/1/K$ :

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{για } 0 \leq k < K \\ 0 & \text{για } k \geq K \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & \text{για } 1 \leq k \leq K \\ 0 & \text{για } k > K \end{cases}$$



# Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)



## ■ Λύση συστήματος

$$P_k = \begin{cases} \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{για } 0 \leq k \leq K \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

# Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

## ΜΕΤΡΙΚΕΣ

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^K k p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \sum_{k=2}^K (k-1) p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - (\lambda/\mu) \cdot \frac{1 + K(\lambda/\mu)^K}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

# Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

■ Παράδειγμα: Το μοντέλο μιας τηλεφωνικής συσκευής χωρίς κράτηση κλήσεων (παλιό αναλογικό σύστημα):

$M/M/1/1$

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 0 \\ \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$p_0$  : Πιθανότητα να μιλήσει, κάποιος που καλεί

$p_1$  : Πιθανότητα να βρει κατειλημμένη τη συσκευή, κάποιος που καλεί

$\lambda$  : Μέσος ρυθμός με τον οποίο γίνονται κλήσεις στη συσκευή

$\bar{x} = 1/\mu$  : Μέση χρονική διάρκεια μιας συνομιλίας