



Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Φροντιστήριο 10

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

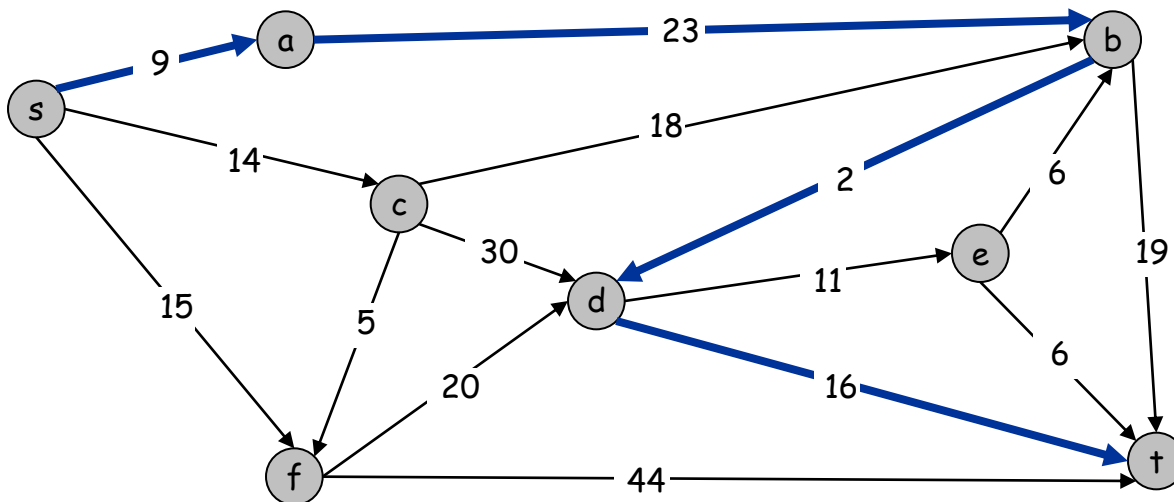
Συντομότερες Διαδρομές

Πρόβλημα Συντομότερης Διαδρομής

Δίκτυο συντομότερων διαδρομών.

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
- Αφετηρία s , προορισμός t
- $l_e \equiv l(e) \geq 0$: κόστος της ακμής e
- $l(P) = \sum_{e \in P} l(e)$: κόστος διαδρομής P

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής $s-t$: βρείτε τη συντομότερη (κατευθυνόμενη) διαδρομή από τον s στον t . Κόστος συντομότερης $s-t$ διαδρομής $\equiv \delta(s,t)$



Κόστος διαδρομής (s,a,b,d,t)
 $= 9 + 23 + 2 + 16$
 $= 50$

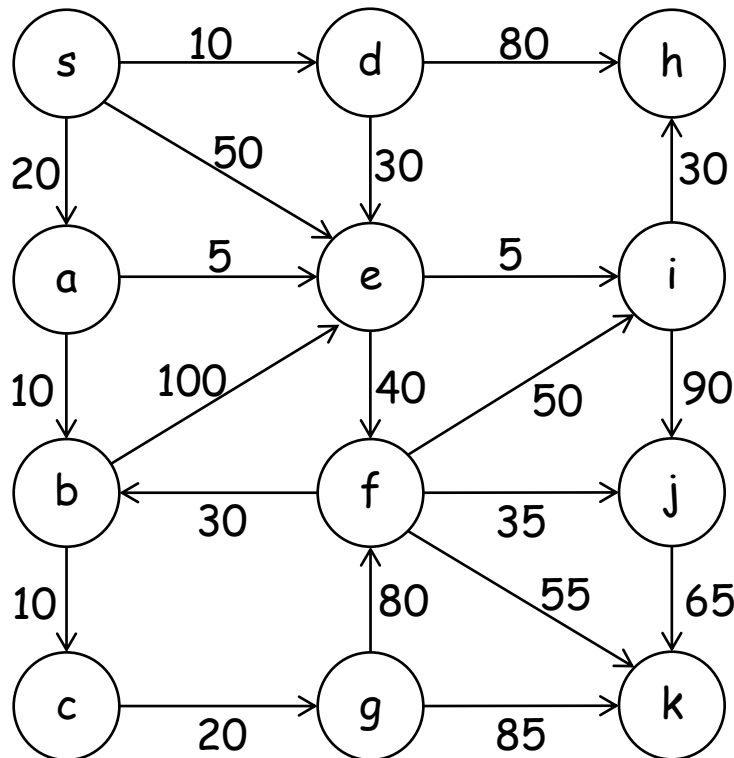
Αλγόριθμος Dijkstra

- Διατήρηση ετικέτας $d(v)$, $\forall v \in V$ (απόσταση v από s)
- Διατήρηση συνόλων S (κόμβοι $u \in S$ με $d(u) = \delta(s,u)$) και $S' = V - S$ (κόμβοι $v \in S'$ με $d(v) \geq \delta(s,v)$)
- Αρχικά $S = \emptyset$, $S' = V$, $d(s) = 0$.
- Επαναληπτικά, διάλεξε τον κόμβο $v \in S'$ με την ελάχιστη προσωρινή ετικέτα $d(v)$, διέγραψε τον από το S' και πρόσθεσέ τον στο S
 - $\forall (v,z) \in E$: if $d(z) > d(v) + \ell(v,z)$ then $d(z) = d(v) + \ell(v,z)$

Συντομότερες Διαδρομές

Άσκηση 1:

Στο παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα να βρείτε αποστάσεις (κόστη συντομότερων διαδρομών) από την κορυφή s προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Η απάντησή σας πρέπει να περιλαμβάνει ένα πίνακα συμπληρώνοντας: α) τις κορυφές με την σειρά κατά την οποία οριστικοποιούνται («μονιμοποιούνται») από τον αλγόριθμο και (β) τις προσωρινές τιμές του $d(u)$ κάθε κορυφής μέχρι την οριστικοποίησή τους.

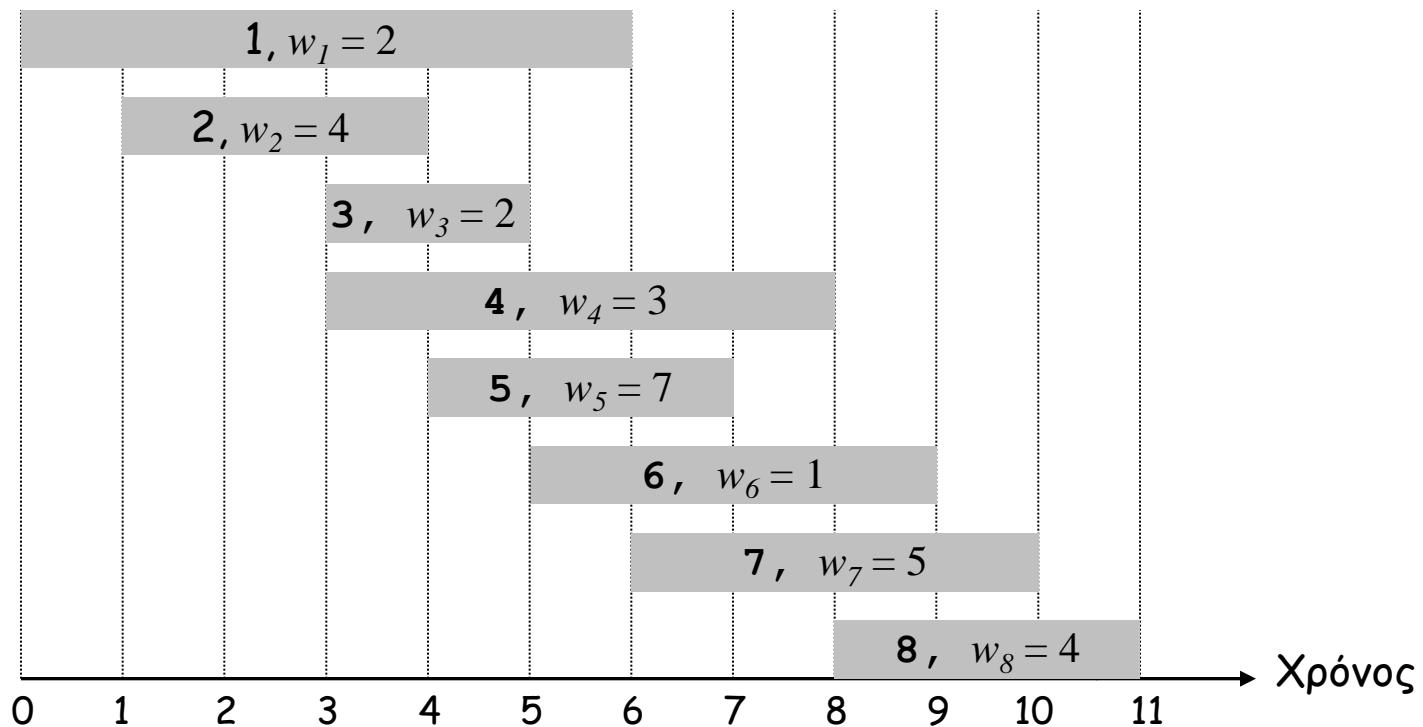


Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Πρόβλημα σταθμισμένου χρονοπρογραμματισμού διαστημάτων.

- Σύνολο αιτημάτων ή εργασιών $\{1, \dots, n\}$
- Το αίτημα j ξεκινά την στιγμή s_j , τελειώνει την στιγμή f_j , και έχει **βαρύτητα** w_j
- Δύο αιτήματα είναι **συμβατά** αν δεν επικαλύπτονται.
- Στόχος: εύρεση υποσυνόλου $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ συμβατών αιτημάτων **μέγιστης βαρύτητας** $\sum_{i \in S} w_i$.



Δυναμικός Προγραμματισμός: Δυαδική επιλογή

$OPT(j)$ = τιμή της βέλτιστης λύσης προβλήματος αποτελούμενο από αιτήματα 1, 2, ..., j

- Περίπτωση 1: Η $OPT(j)$ επιλέγει το αίτημα j, με βαρύτητα v_j
 - Δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα ασύμβατα αιτήματα $\{p(j) + 1, p(j) + 2, \dots, j - 1\}$
 - Πρέπει να περιέχει την βέλτιστη λύση $OPT(p(j))$ στο πρόβλημα που αποτελείται από τα συμβατά αιτήματα $\{1, 2, \dots, p(j)\}$ που έχουν απομείνει
- Περίπτωση 2: Η $OPT(j)$ δεν επιλέγει το αίτημα j
 - Πρέπει να περιέχει την βέλτιστη λύση $OPT(j - 1)$ στο πρόβλημα που αποτελείται από τα συμβατά αιτήματα $\{1, 2, \dots, j-1\}$ που έχουν απομείνει

Βέλτιστο υποπρόβλημα

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{αν } j = 0 \\ \max\{v_j + OPT(p(j)), OPT(j - 1)\} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων - Απομνημόνευση

Απομνημόνευση.

- Αποθήκευσε τα αποτελέσματα κάθε υποπροβλήματος σε μια καθολικά προσπελάσιμη θέση μνήμης.
- Αναζήτηση όποτε χρειαστεί.

Είσοδος: $n, s_1, \dots, s_n, f_1, \dots, f_n, v_1, \dots, v_n$

Ταξινόμησε τα αιτήματα κατά χρόνο λήξης, έτσι ώστε $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$
Υπολόγισε $p(1), p(2), \dots, p(n)$

```
for j = 1 to n
    M[j] = empty ← Καθολικός πίνακας απομνημόνευσης
M[0] = 0
M-Compute-Opt(n)

M-Compute-Opt(j) {
    if (M[j] is empty)
        M[j] = max{vj + M-Compute-Opt(p(j)), M-Compute-Opt(j-1)}
    return M[j]
}
```

Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων - Εύρεση Λύσης

Ερ. Ο αλγόριθμος βρίσκει τη βέλτιστη τιμή. Τι γίνεται αν θέλουμε την ίδια την λύση :

Απ. Εκτελούμε ένα επιπλέον βήμα μετεπεξεργασίας του M , «ινχηλατώντας» τη λύση

```
Run M-Compute-Opt(n)
Run Find-Solution(n)

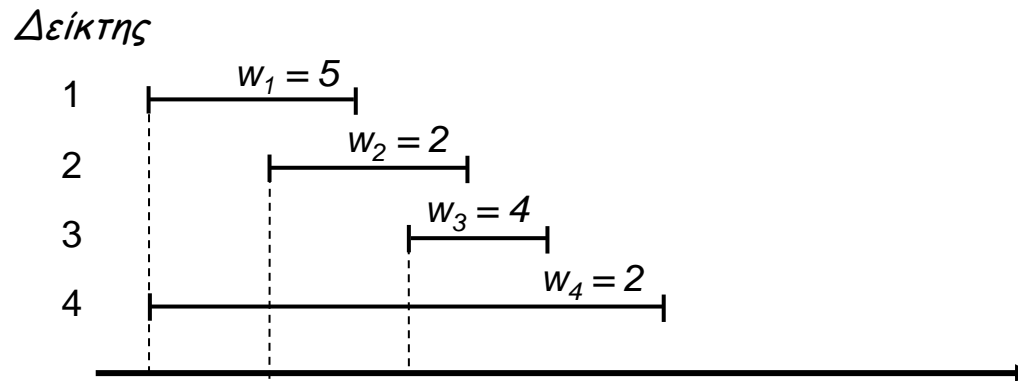
Find-Solution(j) {
    if (j = 0)
        μην εκτυπώσεις τίποτα
    else if ( $v_j + M[p(j)] > M[j-1]$ )
        εκτύπωσε το j
        Find-Solution(p(j))
    else
        Find-Solution(j-1)
}
```

- # επαναληπτικών κλήσεων $\leq n \Rightarrow O(n)$.

Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Άσκηση 2:

Βρείτε ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων αιτημάτων από το παρακάτω διάγραμμα, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό βάρος.



Διάτρεξη Γραφήματος

Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

DFS δαισθητικά. Εξερεύνηση από κάποιον κόμβο u με προτεραιότητα «βάθους»: ακολουθούμε ακμή (u,v) , ανακαλύπτοντας τον v , μετά ακολουθούμε ακμή (v,z) , ανακαλύπτοντας τον z , κοκ.

Ο αλγόριθμος DFS (R : σύνολο κόμβων που έχουν ανακαλυφθεί).

DFS(u):

 Σημείωσε ότι το u "Εξερευνήθηκε" και πρόσθεσε το u στην R

For κάθε ακμή (u, v) που πρόσκειται στον κόμβο u

If ο κόμβος v δεν έχει σημειωθεί ότι "Εξερευνήθηκε" **then**

 Κάλεσε αναδρομικά την **DFS(v)**

Endif

Endfor

Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

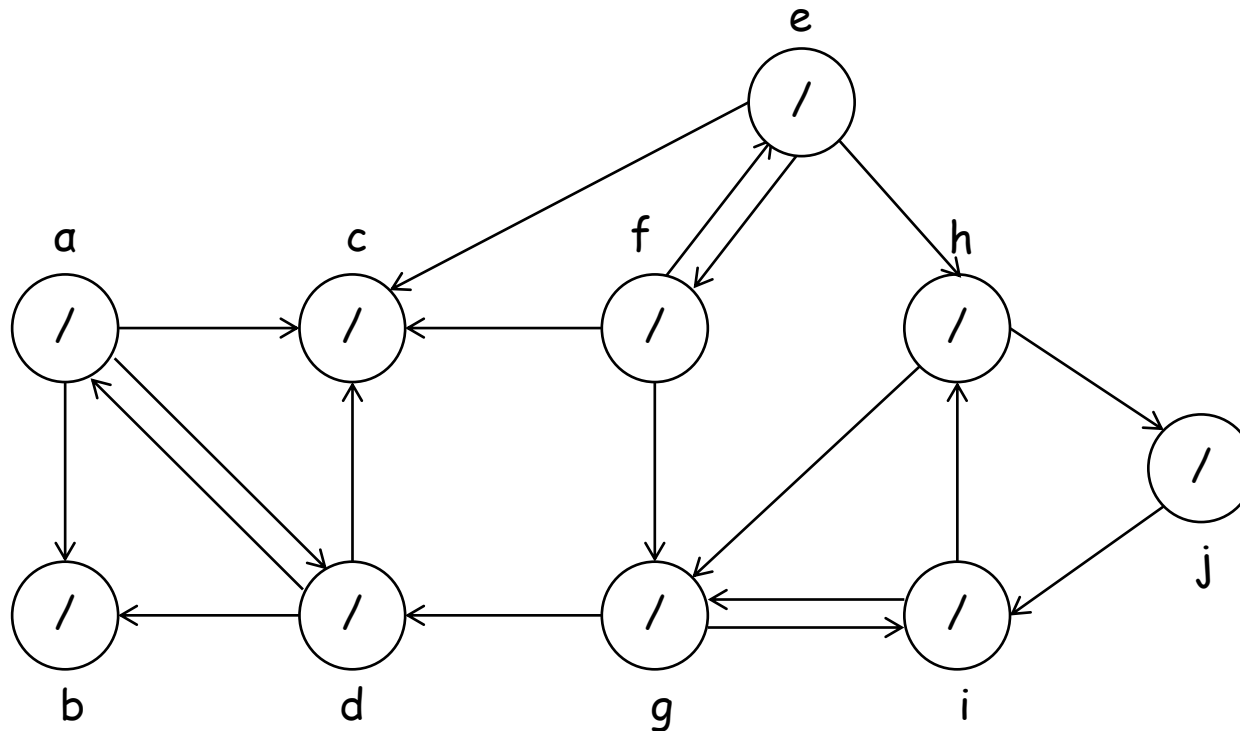
```
DFS(G) {
  forall u ∈ V {Discovered(u)=false; π[u]=0;}
  t=0; // καθολικός μετρητής χρόνου
  forall u ∈ V {if Discovered(u)=false then DFS-Visit(u)}
}

DFS-Visit(u)
  Discovered(u)= true; t=t+1; d[u]=t; // χρόνος ανακάλυψης
  forall (u,v) ∈ E {
    if Discovered(v)=false then {
      Discovered(v)=true;
      π[v] = u; // T = T ∪ (u,v)
      DFS-Visit(v);
    }
  }
  t = t + 1;
  f[u] = t; // χρόνος εγκατάλειψης
}
```


Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

Άσκηση 3:

Στο κατευθυνόμενο γράφημα του παρακάτω σχήματος να δώσετε τους χρόνους ανακάλυψης (πρώτης επίσκεψης) και εγκατάλειψης σε μία Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ), η οποία αρχίζει από την κορυφή d. Οι χρόνοι να γραφούν πάνω στο σχήμα, στο εσωτερικό κάθε κορυφής, αριστερά ο χρόνος ανακάλυψης και δεξιά ο χρόνος εγκατάλειψης.



Τέλος Φροντιστηρίου



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης *Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1]* ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.