



Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Φροντιστήριο 2

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



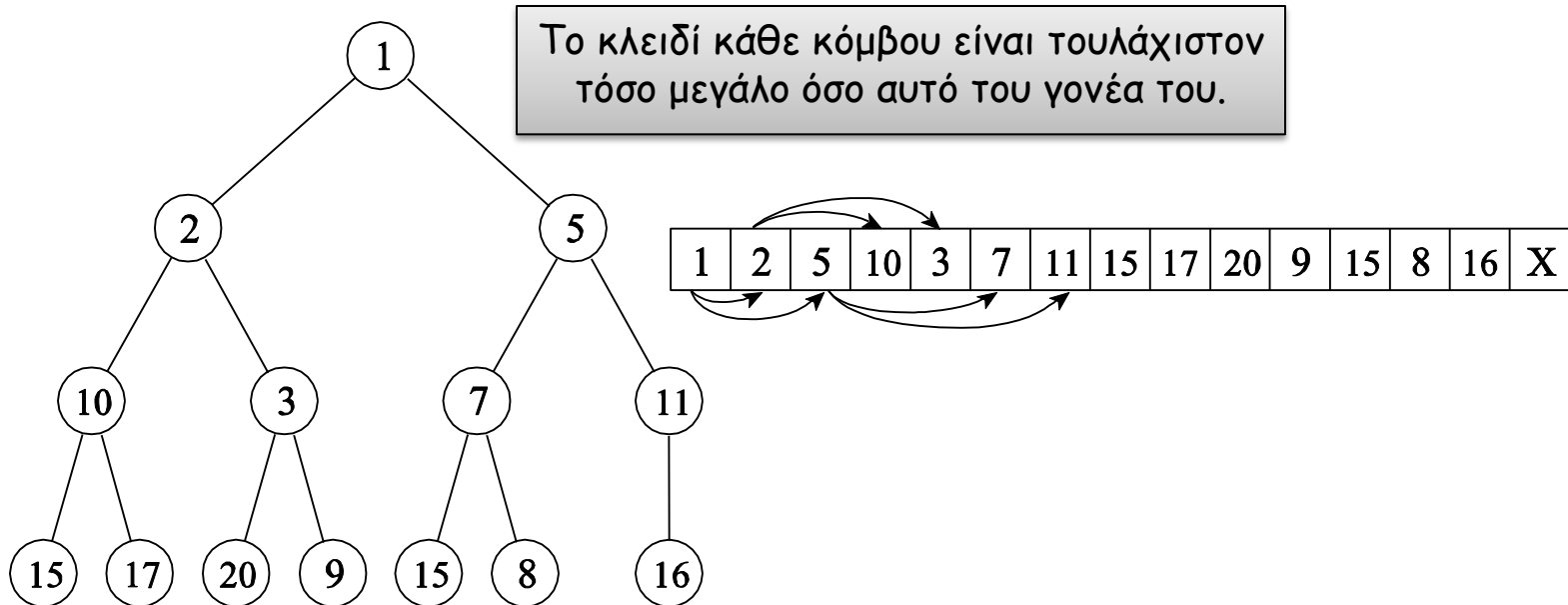
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Διαδικός σωρός

Σωρός (Heap)

Ορισμός: ισοσταθμισμένο δυαδικό δένδρο.

Συνδυάζει πλεονεκτήματα ταξινομημένου πίνακα και λίστας.



Διάταξη σωρού: για κάθε στοιχείο v , σε έναν κόμβο i , το στοιχείο w στο γονέα του i ικανοποιεί τη σχέση: $key(w) \leq key(v)$

Για κάθε κόμβο στη θέση i : $parent(i) = \lfloor i/2 \rfloor$, $leftChild(i) = 2i$, $rightChild(i) = 2i+1$

Η διαδικασία Heapify-up

Στόχος: διόρθωση ενός σχεδόν σωρού με μετακίνηση ενός στοιχείου προς τη ρίζα
Σχεδόν σωρός με πολύ μικρό κλειδί στη θέση $H[i]$: το στοιχείο v στη θέση i , έχει πολύ μικρό κλειδί $H[i]$, που πιθανόν παραβιάζει την ιδιότητα διάταξης σωρού.

```
Heapify-up( $H, i$ ):  
  If  $i > 1$  then  
    έστω  $j = \text{parent}(i) = \lfloor i/2 \rfloor$   
    If  $\text{key}[H[i]] < \text{key}[H[j]]$  then  
      Κάνε εναλλαγή των στοιχείων  $H[i]$  και  $H[j]$   
      Heapify-up( $H, j$ )  
    Endif  
  Endif
```

Χρόνος Heapify-up: $O(\log n)$

Εισαγωγή στοιχείου: τοποθέτηση του νέου στοιχείου ως τελευταίο στον σωρό και κλήση της Heapify-up.

Χρόνος: $O(\log n)$

Η διαδικασία Heapify-down

Στόχος: διόρθωση ενός σχεδόν σωρού με μετακίνηση ενός στοιχείου προς τα φύλλα
Σχεδόν σωρός με πολύ μεγάλο κλειδί στη θέση $H[i]$: το στοιχείο v στη θέση i , έχει πολύ μεγάλο κλειδί $H[i]$, που πιθανόν παραβιάζει την ιδιότητα διάταξης σωρού.

```
Heapify-down( $H, i$ ):  
  Έστω  $n = \text{length}(H)$   
  If  $2i > n$  then  
    Τερμάτισε με αμετάβλητο  $H$   
  Else if  $2i < n$  then  
    Έστω  $\text{left} = 2i$ , και  $\text{right} = 2i+1$   
    Έστω  $j$  ο δείκτης που ελαχιστοποιεί τα  $\text{key}[H[\text{left}]]$  και  $\text{key}[H[\text{right}]]$   
  Else if  $2i = n$  then  
    Έστω  $j = 2i$   
  Endif  
  If  $\text{key}[H[j]] < \text{key}[H[i]]$  then  
    Κάνε εναλλαγή των στοιχείων πίνακα  $H[i]$  και  $H[j]$   
    Heapify-down( $H, j$ )  
  Endif
```

Χρόνος Heapify-down: $O(\log n)$

Διαγραφή στοιχείου v : αντικατάσταση του v με το τελευταίο στοιχείο του σωρού και κλήση της Heapify-down.

Χρόνος: $O(\log n)$

Κατασκευή Σωρού

Άσκηση 1:

Δίνεται το διάνυσμα $A = [50, 15, 20, 30, 10, 40, 12, 3, 8, 25, 7]$.
Εκτελέστε αναλυτικά τον αλγόριθμο κατασκευής σωρού.

Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Βασικό Θεώρημα Αναδρομών

Έστω

$$a, b \in \mathbb{R}^+, b > 1, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_0^+, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(n) = O(n^\gamma \log_b^\delta n),$$

$$T(n) = \begin{cases} g(1) & , n = 1 \\ aT(n/b) + g(n) & , n > 1 \end{cases}$$

Τότε,

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a} \log_b^\delta n) & , a > b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^{\delta+1} n) & , a = b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^\delta n) & , a < b^\gamma, \gamma > 0 \vee \delta \geq 1 \\ O(\log_b n) & , a < 1, \gamma = 0 \wedge \delta < 1 \end{cases}$$

για $n = b^k$

Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Άσκηση 2:

Να δοθεί ο κλειστός τύπος, σε ασυμπτωτικό συμβολισμό, της αναδρομικής σχέσης $T(n^2) = 3T(n^2/3) + n$, εφαρμόζοντας το Βασικό Θεώρημα.

Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Άσκηση 3:

Να δοθεί ο κλειστός τύπος, σε ασυμπτωτικό συμβολισμό, της αναδρομικής σχέσης $T(n) = 16T(n/8) + n^{2/3}$, εφαρμόζοντας το Βασικό Θεώρημα.

Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Άσκηση 4:

Να δοθεί ο κλειστός τύπος, σε ασυμπτωτικό συμβολισμό, της αναδρομικής σχέσης $T(n) = 2T(n/2) + n^2$, εφαρμόζοντας το Βασικό Θεώρημα.

Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Άσκηση 5:

Έστω, A_1 και A_2 , δυο αναδρομικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν τη μέθοδο «Διαίρει & Βασίλευε».

A_1 : Διαιρεί το πρόβλημα Π μεγέθους n σε 3 υποπροβλήματα το καθένα μεγέθους $n/3$ και συνδυάζει τις λύσεις των υποπροβλημάτων σε χρόνο $n \log n$.

A_2 : Διαιρεί το πρόβλημα Π μεγέθους n σε 4 υποπροβλήματα το καθένα μεγέθους $n/4$ και συνδυάζει τις λύσεις των υποπροβλημάτων σε χρόνο n .

α) Βρείτε τις αναδρομικές σχέσεις για τους χρόνους εκτέλεσης $T_1(n)$ και $T_2(n)$, αντίστοιχα των αλγορίθμων A_1 και A_2 .

β) Εφαρμόστε το Βασικό Θεώρημα για να βρείτε τη χρονική πολυπλοκότητα των $T_1(n)$ και $T_2(n)$.

γ) Ποιος αλγόριθμος από τους A_1 και A_2 είναι πιο αποδοτικός;

Σύγκριση Ρυθμού Αύξησης

Σύγκριση Ρυθμού Αύξησης

Άσκηση 6:

Ταξινομήστε την παρακάτω λίστα συναρτήσεων σε αύξουσα σειρά ως προς το ρυθμό αύξησης.

- $T_1(n) = O(n^2)$
- $T_2(n) = O(\log n)$
- $T_3(n) = O(n^3)$
- $T_4(n) = O(2^n)$

Τέλος Φροντιστηρίου



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.