



Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 10η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός συντομότερης διαδρομής
- Ανάλυση μοντέλου εύρεσης συντομότερων διαδρομών
- Περιγραφή και ανάλυση του αλγορίθμου του Dijkstra

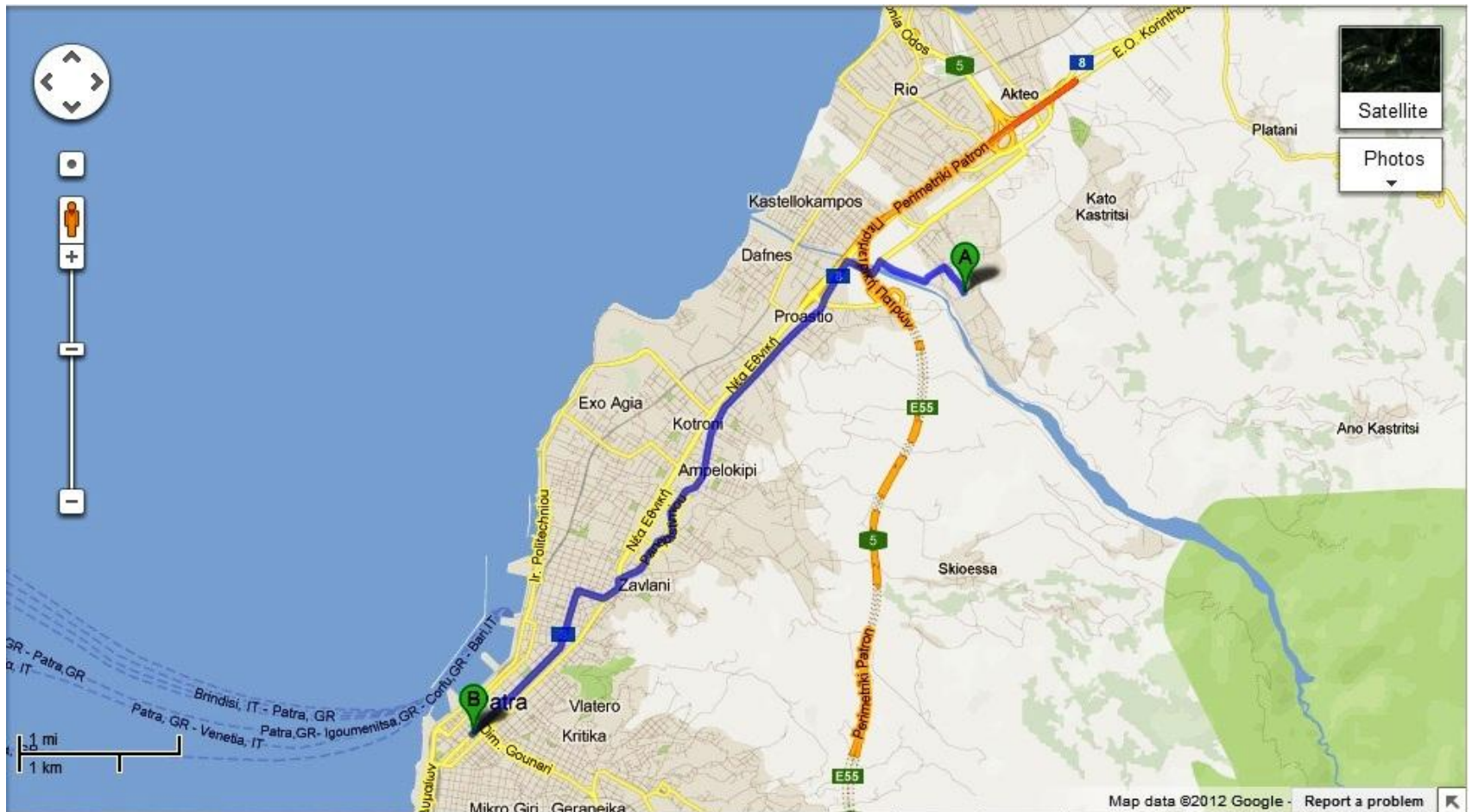
Περιεχόμενα ενότητας

- Συντομότερες Διαδρομές - Αλγόριθμος Dijkstra

Άπληστοι Αλγόριθμοι

- Συντομότερες Διαδρομές - Αλγόριθμος Dijkstra

Συντομότερες Διαδρομές σε ένα Γράφημα



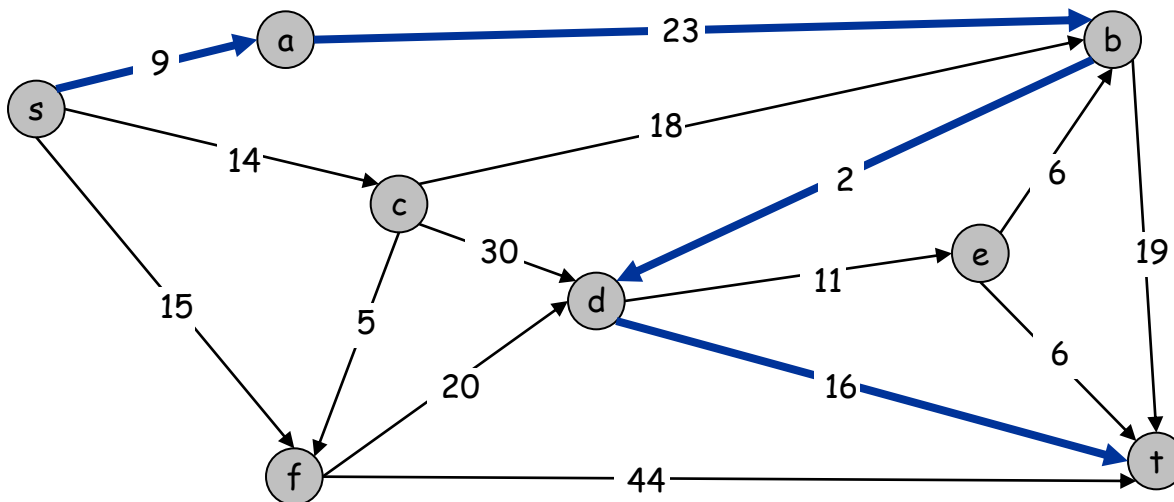
Εικόνα 1

Πρόβλημα Συντομότερης Διαδρομής

Δίκτυο συντομότερων διαδρομών.

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
- Αφετηρία s , προορισμός t
- $l_e \equiv l(e) \geq 0$: κόστος της ακμής e
- $l(P) = \sum_{e \in P} l(e)$: κόστος διαδρομής P

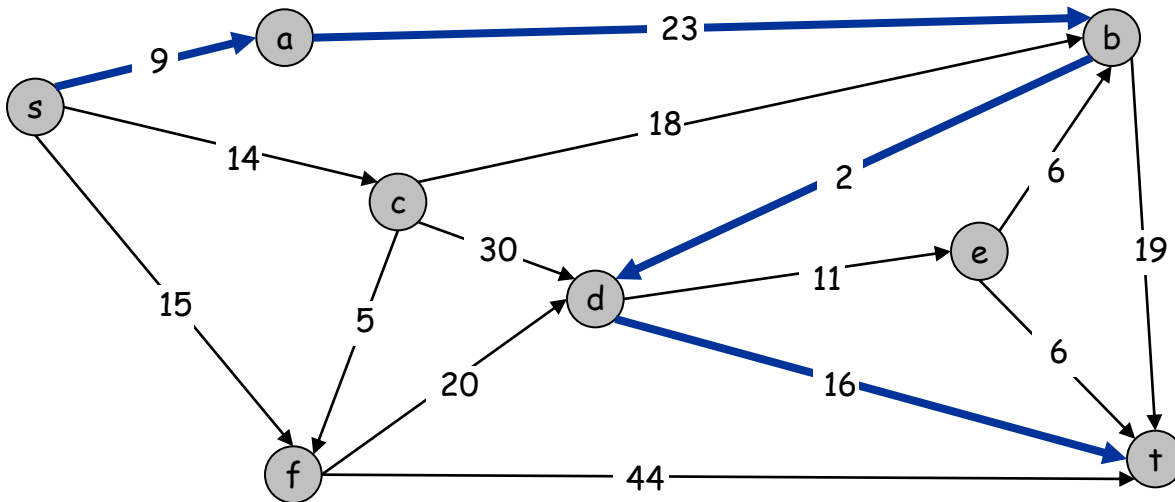
Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής $s-t$: βρείτε τη συντομότερη (κατευθυνόμενη) διαδρομή από τον s στον t . Κόστος συντομότερης $s-t$ διαδρομής $\equiv \delta(s,t)$



Κόστος διαδρομής (s,a,b,d,t)
 $= 9 + 23 + 2 + 16$
 $= 50$

Συντομότερες Διαδρομές

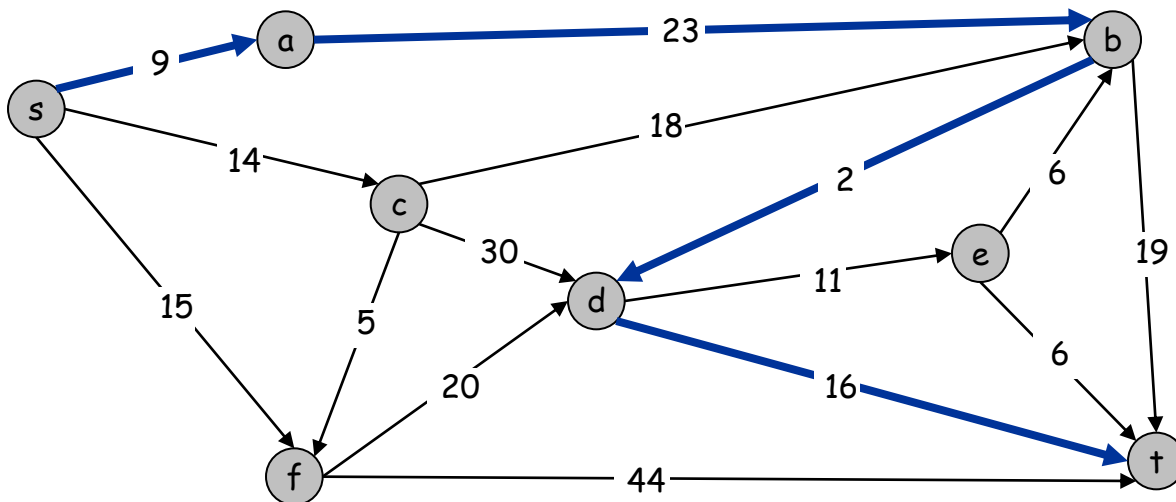
Ιδιότητα. Έστω $P = (v_1, \dots, v_k)$ μια συντομότερη $v_1 - v_k$ διαδρομή. Τότε, οποιαδήποτε υποδιαδρομή (v_i, \dots, v_j) , $1 \leq i < j \leq k$, της P είναι μια συντομότερη $v_i - v_j$ διαδρομή.



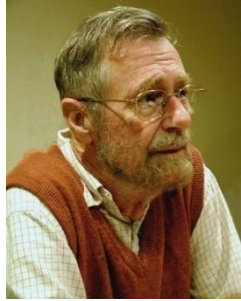
Συντομότερες Διαδρομές

ΣΔ από Αφετηρία (ΣΔΑ). Έστω $s \in V$ διακεκριμένος κόμβος του $G = (V, E)$. Ζητείται τα βρεθούν οι ΣΔ $s-t$ για κάθε $t \in V$.

Ιδιότητα. Η λύση του ΣΔΑ είναι ένα γεννητικό δένδρο T του G με ρίζα τον s , που ονομάζεται Δένδρο Συντομότερων Διαδρομών. Το κόστος μιας διαδρομής $s-v$ στο T ισούται με $\delta(s,v)$ (κόστος ΣΔ στο G).



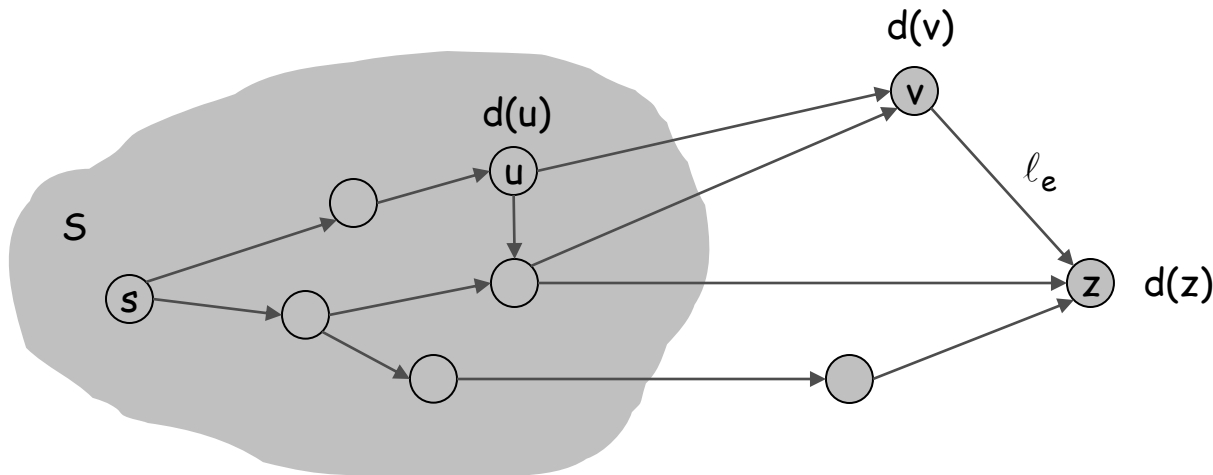
Αλγόριθμος Dijkstra



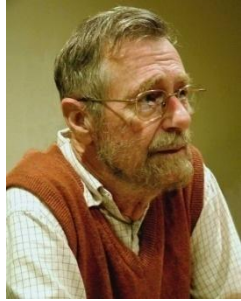
Εικόνα 2

Αλγόριθμος Dijkstra.

- Διατήρηση ετικέτας $d(v)$, $\forall v \in V$ (απόσταση v από s)
- Διατήρηση συνόλων S (κόμβοι $u \in S$ με $d(u) = \delta(s,u)$) και $S' = V - S$ (κόμβοι $v \in S'$ με $d(v) \geq \delta(s,v)$)
- Αρχικά $S = \emptyset$, $S' = V$, $d(s) = 0$.
- Επαναληπτικά, διάλεξε τον κόμβο $v \in S'$ με την ελάχιστη προσωρινή ετικέτα $d(v)$, διέγραψε τον από το S' και πρόσθεσέ τον στο S
 - $\forall (v,z) \in E$: if $d(z) > d(v) + \ell(v,z)$ then $d(z) = d(v) + \ell(v,z)$



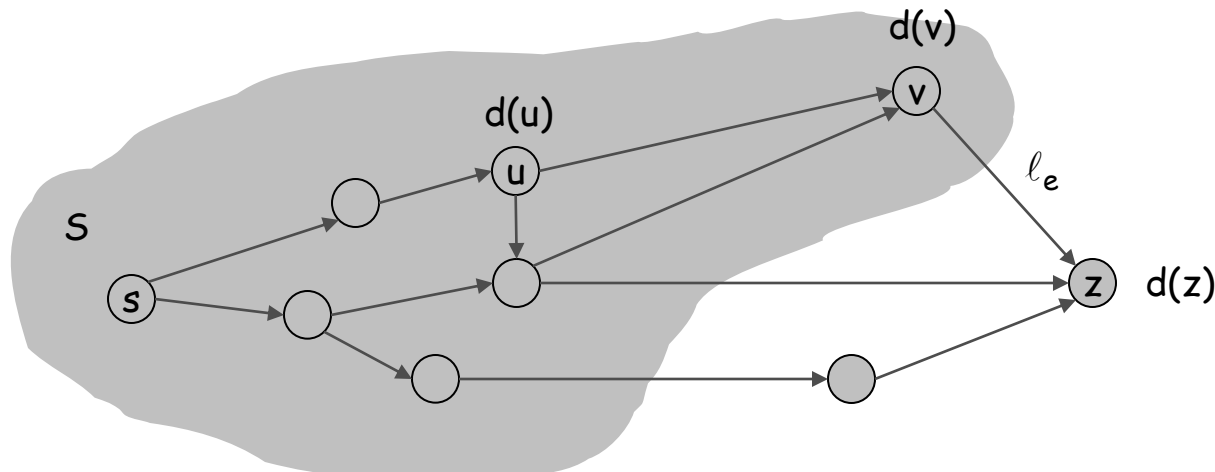
Αλγόριθμος Dijkstra



Εικόνα 2

Αλγόριθμος Dijkstra.

- Διατήρηση ετικέτας $d(v)$, $\forall v \in V$ (απόσταση v από s).
- Διατήρηση συνόλων S (κόμβοι $u \in S$ με $d(u) = \delta(s,u)$) και $S' = V - S$ (κόμβοι $v \in S'$ με $d(v) \geq \delta(s,v)$)
- Αρχικά $S = \emptyset$, $S' = V$, $d(s) = 0$.
- Επαναληπτικά, διάλεξε τον κόμβο $v \in S'$ με την ελάχιστη προσωρινή ετικέτα $d(v)$, διέγραψε τον από το S' και πρόσθεσέ τον στο S
 - $\forall (v,z) \in E$: if $d(z) > d(v) + \ell(v,z)$ then $d(z) = d(v) + \ell(v,z)$



Αλγόριθμος Dijkstra - Απόδειξη Ορθότητας

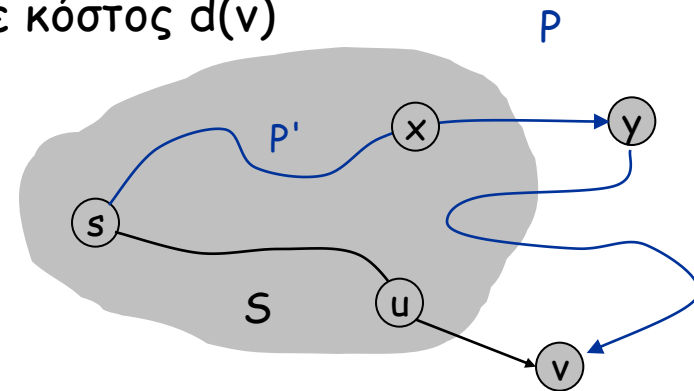
Ιδιότητα. $\forall u \in S$, $d(u)$ είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής $s-u$.

Απόδειξη. (με επαγωγή στο $|S|$)

Βάση επαγωγής: Για $|S| = 1$ ισχύει ($d(s) = 0$).

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ισχύει για $|S| = k \geq 1$.

- Έστω v ο επόμενος κόμβος που προστίθεται στο S , και έστω (u,v) η επιλεγμένη ακμή
- Συντομότερη διαδρομή $s-u \oplus (u,v) \equiv$ διαδρομή $s-v$ κόστους $d(v)$
- Έστω P οποιαδήποτε $s-v$ διαδρομή
Θα δείξουμε ότι δεν είναι συντομότερη από αυτή με κόστος $d(v)$
- Έστω (x,y) η πρώτη ακμή της P που "φεύγει" από το S , και έστω P' η υποδιαδρομή $s-x$



$$\ell(P) \geq \ell(P') + \ell(x,y) = d(x) + \ell(x,y) = d(y) \geq d(v)$$

↑
Μη αρνητικά κόστη

↑
Επαγωγική
υπόθεση

↑
Ορισμός $d(y)$

↑
Ο Dijkstra επέλεξε τον v
αντί του y

Αλγόριθμος Dijkstra - Υλοποίηση

- Επόμενος κόμβος προς εξερεύνηση = κόμβος με ελάχιστο $d(v)$
- Εξερεύνηση v : \forall προσκείμενη ακμή $e = (v, z)$, ενημέρωση $d(z) = d(v) + \ell(v, z)$

Αποδοτική υλοποίηση. Διατηρήστε το S' σαν μια ουρά προτεραιότητας (PQ) από κόμβους με προτεραιότητα $d(v)$.

```
Dijkstra(G,  $\ell$ , s) {  
  foreach ( $v \in V$ ) { $d[v] = \infty$ ;  $\pi[v] = 0$ ;}  
  Αρχικοποίησε μια άδεια ουρά προτεραιότητας Q;  
   $d[s]=0$ ; Insert(Q,s);  
  while (Q δεν είναι άδεια) {  
     $v \leftarrow$  ExtractMin(Q) // διαγραφή του στοιχείου με ελάχιστο  $d[]$   
    foreach  $e = (v, z) \in E$  {  
       $M = d[v] + \ell(v, z)$ ;  
      if ( $\pi[z] = 0 \wedge z \neq s$ ) then { $d[z] = M$ ; Insert(Q,z);  $\pi[z] = v$ }  
        // αν  $d[z] = \infty$ , εισαγωγή στην Q  
      else if  $d[z] > M$  then { $d[z] = M$ ; ChangeKey(Q,z);  $\pi[z] = v$ }  
        // μείωση προτεραιότητας  
    }  
  }  
}
```

Αλγόριθμος Dijkstra - Υλοποίηση

- Επόμενος κόμβος προς εξερεύνηση = κόμβος με ελάχιστο $d(v)$
- Εξερεύνηση v : \forall προσκείμενη ακμή $e = (v, z)$, ενημέρωση $d(z) = d(v) + \ell(v, z)$

Αποδοτική υλοποίηση. Διατηρήστε το S' σαν μια ουρά προτεραιότητας (PQ) από κόμβους με προτεραιότητα $d(v)$.

Λειτουργία PQ	Dijkstra	Πίνακας	Διαδ. Σωρός	d-μερής Σωρός	Ουρά Fib [†]
Insert	n	n	$\log n$	$d \log_d n$	1
ExtractMin	n	n	$\log n$	$d \log_d n$	$\log n$
ChangeKey	m	1	$\log n$	$\log_d n$	1
IsEmpty	n	1	1	1	1
Σύνολο		n^2	$m \log n$	$m \log_{m/n} n$	$m + n \log n$

[†] Ουρά Fibonacci: τα όρια των διακριτών λειτουργιών είναι **επιμερισμένοι** χρόνοι

Βιβλιογραφία

1. J. Kleinberg and E. Tardos, *Σχεδιασμός Αλγορίθμων*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*, ελληνική έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012
3. K. Mehlhorn and P. Sanders, *Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων - Τα βασικά εργαλεία*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2014
4. S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, *Αλγόριθμοι*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
5. Θ. Παπαθεοδώρου, *Αλγόριθμοι: Εισαγωγικά Θέματα και Παραδείγματα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Πηγές εικόνων - Χρήση Έργων Τρίτων

Εικόνα 1: σελ. 6,

<https://www.google.gr/maps>

(δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας την υπηρεσία Google Maps)

Εικόνα 2: σελ. 10-11,

http://en.wikipedia.org/wiki/Eindhoven_University_of_Technology#mediaviewer/File:Edsger_Wybe_Dijkstra.jpg

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.