



Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 4η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή στις μεθόδους ταιριάσματος ζευγαριών
- Περιγραφή και ανάλυση του αλγορίθμου πρότασης και απόρριψης

Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμός και συνθήκες ευστάθειας σε ταιριάσματα
- Αλγόριθμος πρότασης και απόρριψης [Gale-Shapley 1962]

Ευσταθές Ταίριασμα

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος



Εικόνα 1: n άνδρες



Εικόνα 2: n γυναίκες

- Βρείτε το «κατάλληλο» ταίρι, για κάθε άνδρα και για κάθε γυναίκα
- **Σκοπός:** **ευσταθές** ταίριασμα = τέλειο & χωρίς ασταθή ζευγάρια
 - **Τέλειο:** μονογαμία
 - **Ασταθές** ζευγάρι (X,Y) : ο άνδρας X και η γυναίκα Y προτιμούν ο ένας τον άλλον από τους τωρινούς συντρόφους τους

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

Σκοπός. Δεδομένων n ανδρών και n γυναικών, βρείτε ένα "κατάλληλο" ταίριασμα.

- Οι συμμετέχοντες βαθμολογούν μέλη του αντίθετου φύλου.
- Κάθε άνδρας κατατάσσει τις γυναίκες με σειρά προτίμησης από την καλύτερη στη χειρότερη.
- Κάθε γυναίκα κατατάσσει τους άνδρες με σειρά προτίμησης από τον καλύτερο στον χειρότερο.

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Εφαρμογή 1 - Ταιριάζοντας Ειδικευόμενους Ιατρούς σε Νοσοκομεία

NRMP (υπηρεσία National Resident Matching Program των ΗΠΑ)

- Αρχική χρήση αμέσως μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο
- Στοιχεία Μαρτίου 2005: 23.000+ ειδικευόμενοι

Πριν την αρχή της χρήσης υπολογιστών

Σκοπός. Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ νοσοκομείων και ειδικευόμενων ιατρών, σχεδιάστε μια **αυτοεπιβαλλόμενη** διαδικασία προσλήψεων.

Ασταθές ζευγάρι: ο αιτών x και το νοσοκομείο y είναι **ασταθή** εάν

- Ο x προτιμά το y , από κάποιο νοσοκομείο το οποίο του έχει ανατεθεί.
- Το y προτιμά τον x από κάποιον ειδικευόμενο που έχει αποδεχθεί.

Ευσταθής ανάθεση. Ανάθεση χωρίς ασταθή ζευγάρια.

- Φυσική και επιθυμητή κατάσταση.
- Ξεχωριστό ατομικό συμφέρον αποτρέπει οποιεσδήποτε «παράτυπες» συμφωνίες μεταξύ αιτούντων και νοσοκομείων.

Εφαρμογή 2 - Ταιριάζοντας Φοιτητές σε Εταιρείες για Πρακτική Άσκηση

Σκοπός. Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ εταιρειών και φοιτητών, σχεδιάστε μια **αυτοεπιβαλλόμενη** διαδικασία αναθέσεων.

Ασταθές ζευγάρι: ο αιτών x και η εταιρεία y είναι **ασταθή** εάν

- Ο x προτιμά την y , από κάποια εταιρεία που του έχει ανατεθεί.
- Η y προτιμά τον x από κάποιον φοιτητή που έχει αποδεχθεί.

Ευσταθής ανάθεση. Ανάθεση χωρίς ασταθή ζευγάρια.

- Φυσική και επιθυμητή κατάσταση.
- Ξεχωριστό ατομικό συμφέρον αποτρέπει οποιεσδήποτε «παράτυπες» συμφωνίες μεταξύ φοιτητών και εταιρειών.

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος (Gale-Shapley 1962)

Nobel Οικονομικών 2012

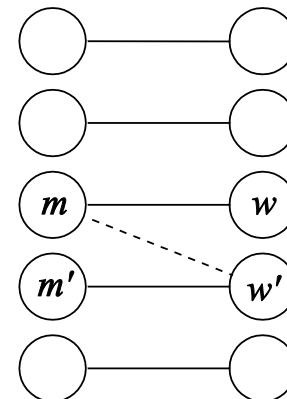
Τέλειο ταίριασμα: καθένας ταιριάζεται μονογαμικά.

- Κάθε άνδρας παίρνει ακριβώς μια γυναίκα.
- Κάθε γυναίκα παίρνει ακριβώς έναν άνδρα.

Ευστάθεια: δεν υπάρχει κίνητρο για κάποιο ζευγάρι συμμετεχόντων να υπονομεύσουν από κοινού την ανάθεση.

- Σε ένα ταίριασμα M , ένα **μη ταιριασμένο** ζευγάρι $m-w'$ είναι **ασταθές** αν ο άνδρας m και η γυναίκα w' προτιμούν ο ένας τον άλλο από τους τωρινούς συντρόφους τους.
- Το ασταθές ζευγάρι $m-w'$ θα μπορούσε να καλυτερεύσει την κατάστασή του εάν ο καθένας εγκατέλειπε τον σύντροφό του.

Μία αστάθεια: ο m και η w' προτιμούν και οι δύο ο ένας τον άλλο, σε σχέση με τον τρέχοντα σύντροφό τους.



Ευσταθές ταίριασμα: τέλειο ταίριασμα χωρίς ασταθή ζευγάρια.

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος: Δεδομένων των λιστών προτιμήσεων από n άνδρες και n γυναίκες, βρείτε ένα ευσταθές ταίριασμα αν υπάρχει.

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

Ερώτηση. Είναι η ανάθεση Κ-Ε, Ν-Μ, Π-Α ευσταθής;

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

Ερώτηση. Είναι η ανάθεση Κ-Ε, Ν-Μ, Π-Α ευσταθής;

Απάντηση. Όχι. Η Μαρία και ο Κώστας θα γίνουν ζευγάρι.

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

Ερώτηση. Είναι η ανάθεση Κ-Α, Ν-Μ, Π-Ε ευσταθής;

Απάντηση. Ναι.

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Αλγόριθμος ??

Αλγόριθμος πρότασης και απόρριψης



Εικόνα 3

Αλγόριθμος πρότασης και απόρριψης. [Gale-Shapley 1962] Διαισθητική μέθοδος που μας εγγυάται την εύρεση ενός ευσταθούς ταιριάσματος.



Αλγόριθμος πρότασης και απόρριψης [Gale-Shapley 1962]

Εικόνα 4



Αρχικά κάθε άτομο είναι ελεύθερο.

while (κάποιος άνδρας είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει πρόταση σε κάθε γυναίκα) {

 Διάλεξε έναν τέτοιον άνδρα m

$w = 1^{\text{η}}$ γυναίκα της λίστας του m στην οποία δεν έχει γίνει ακόμα πρόταση

if (w είναι ελεύθερη)

m και w δεσμεύονται

else if (w προτιμά τον m από τον τωρινό σύντροφο m')

m και w δεσμεύονται, και ο m' γίνεται ελεύθερος

else

 Η w απορρίπτει τον m

}

Απόδειξη Ορθότητας: Τερματισμός

Παρατήρηση 1. Οι άντρες κάνουν πρόταση στις γυναίκες σε φθίνουσα σειρά προτίμησης.

Παρατήρηση 2. Όταν μια γυναίκα ταιριάζεται, δεν ξαναμένει ποτέ μόνη της. Μόνο ανταλλάσει με καλύτερους συντρόφους.

Ισχυρισμός. Ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από το πολύ n^2 επαναλήψεις του βρόχου while.

Απόδειξη. Σε κάθε επανάληψη ένας άντρας κάνει πρόταση σε μια νέα γυναίκα. Υπάρχουν μόνο n^2 δυνατές προτάσεις. ■

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αντρέας	A	B	Γ	Δ	E
Βασίλης	B	Γ	Δ	A	E
Γιάννης	Γ	Δ	A	B	E
Δημήτρης	Δ	A	B	Γ	E
Έκτορας	A	B	Γ	Δ	E

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	B	Γ	Δ	E	A
Βάσω	Γ	Δ	E	A	B
Γεωργία	Δ	E	A	B	Γ
Δήμητρα	E	A	B	Γ	Δ
Ελένη	A	B	Γ	Δ	E

Απαιτούνται $n(n-1) + 1$ προτάσεις

Απόδειξη Ορθότητας: Τελειότητα

Ισχυρισμός. Όλοι οι άνδρες και οι γυναίκες ταιριάζονται.

Απόδειξη. (άτοπο)

- Έστω ότι ο Έκτορας δεν έχει ταιριάξει μέχρι το τέλος του αλγόριθμου.
- Τότε κάποια γυναίκα, έστω η Άννα, δεν έχει ταιριάξει επίσης μετά το πέρας του αλγορίθμου.
- Από την Παρατήρηση 2, στην Άννα δεν έχει γίνει ποτέ πρόταση.
- Άτοπο, διότι ο Έκτορας έχει κάνει πρόταση σε όλες, αφού καταλήγει χωρίς ταίρι. ■

Απόδειξη Ορθότητας: Ευστάθεια

Ισχυρισμός. Δεν υπάρχουν ασταθή ζευγάρια.

Απόδειξη. (άτοπο)

- Έστω ένα ασταθές ζευγάρι, «Άννα-Έκτορας»: κάθε ένας προτιμά τον άλλο από τον τωρινό του σύντροφο στο ταίριασμα S^* κατά Gale-Shapley.

Οι άντρες κάνουν πρόταση
σε φθίνουσα σειρά προτίμησης

S^*

- Περίπτωση 1: Ο Ε δεν έκανε πρόταση ποτέ στην Α.
 - ⇒ Ε προτιμάει την σύντροφο του από την Α.
 - ⇒ το ζευγάρι «Άννα-Έκτορας» είναι ευσταθές.

Άννα-Δημήτρης
Βάσω-Έκτορας
...

- Περίπτωση 2: Ο Ε έκανε πρόταση στην Α.
 - ⇒ η Α απέρριψε τον Ε (αμέσως ή αργότερα)
 - ⇒ η Α προτιμά τον τωρινό της σύντροφο από τον Ε. ← Οι γυναίκες μόνο ανταλλάσσουν
 - ⇒ το ζευγάρι «Άννα-Έκτορας» είναι ευσταθές.
- Σε κάθε περίπτωση το ζευγάρι «Άννα-Έκτορας» είναι ευσταθές, άτοπο. ■

Σύνοψη

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος. Δεδομένων η ανδρών και η γυναικών, και των προτιμήσεών τους, βρες ένα ευσταθές ταίριασμα αν υπάρχει.

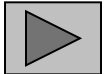
Αλγόριθμος Gale-Shapley. Εγγυάται την εύρεση ενός ευσταθούς ταιριάσματος για **οποιοδήποτε** στιγμιότυπο του προβλήματος.

Ερώτημα . Πώς θα υλοποιηθεί ο αλγόριθμος GS αποδοτικά;



Εικόνα 4

Αλγόριθμος πρότασης και απόρριψης [Gale-Shapley 1962]



Αρχικά κάθε άτομο είναι ελεύθερο.

```
while (κάποιος άνδρας είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει  
πρόταση σε κάθε γυναίκα) {
```

```
    Διάλεξε έναν τέτοιον άνδρα  $m$ 
```

```
     $w = 1^{\eta}$  γυναίκα της λίστας του  $m$  στην οποία δεν έχει γίνει  
    ακόμα πρόταση
```

```
    if ( $w$  είναι ελεύθερη)
```

```
         $m$  και  $w$  δεσμεύονται
```

```
    else if ( $w$  προτιμά τον  $m$  από τον τωρινό σύντροφο  $m'$ )
```

```
         $m$  και  $w$  δεσμεύονται, και ο  $m'$  γίνεται ελεύθερος
```

```
    else
```

```
        Η  $w$  απορρίπτει τον  $m$ 
```

```
}
```

Αποδοτική Υλοποίηση

Αποδοτική υλοποίηση. Υλοποίηση σε χρόνο $O(n^2)$.

Αναπαράσταση ανδρών και γυναικών.

- Σύνολα ανδρών και γυναικών $\{1, \dots, n\}$

Λίστες προτιμήσεων - χώρος $O(n^2)$.

- Κάθε άνδρας m διατηρεί μια λίστα προτιμήσεων για τις γυναίκες $\text{ManPref}[m, i]$
- Κάθε γυναίκα w διατηρεί μια λίστα προτιμήσεων για τους άνδρες $\text{WomanPref}[w, i]$

Ζητήματα υλοποίησης σε $O(1)$ χρόνο.

1. Αναγνώριση ελεύθερου άνδρα
2. Για έναν άνδρα m : εύρεση της γυναίκας με την υψηλότερη κατάταξη στη λίστα του στην οποία δεν έχει κάνει ακόμη πρόταση
3. Για μια γυναίκα w : έλεγχος δέσμευσης της και αν ναι τότε προσδιορισμός του συντρόφου της w .
4. Για μια γυναίκα w και δύο άνδρες m και m' : απόφαση ποιον από τους m και m' προτιμά η w

Αποδοτική Υλοποίηση

1. Αναγνώριση ελεύθερου άνδρα.

- Λίστα ελεύθερων ανδρών - επιλογή από αρχή λίστας, διαγραφή αν δεσμευθεί, ένθεση αποδεσμευμένου άνδρα στο τέλος της λίστας

2. Για έναν άνδρα m : εύρεση της γυναίκας με την υψηλότερη κατάταξη στη λίστα του στην οποία δεν έχει κάνει ακόμη πρόταση.

- Επιπλέον πίνακας `Next`. Αρχικά, $Next[m]=1$.
- $Next[m]$ = θέση επόμενης γυναίκας που θα κάνει πρόταση
- Ο m κάνει πρόταση στην $w = ManPref[m, Next[m]]$ και μετά θέτει $Next[m]=Next[m]+1$

3. Για μια γυναίκα w : έλεγχος δέσμευσης της και αν ναι τότε προσδιορισμός του συντρόφου της w .

- Επιπλέον πίνακας `Current`. Αρχικά, $Current[w]=null$ (αδέσμευτη).
- $Current[w]$ = τρέχων σύντροφος της w

Αποδοτική Υλοποίηση

4. Για μια γυναίκα w και δύο άνδρες m και m' : απόφαση ποιον από τους m και m' προτιμά η w .
- Για κάθε γυναίκα, δημιουργούμε την **αντίστροφη** της λίστας προτίμησής της
 - Σταθερός χρόνος για κάθε ερώτηση απόφασης μετά από $O(n)$ προεργασία

Άννα	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος
WomanPref	8	3	7	1	4	5	6	2

Άννα	1	2	3	4	5	6	7	8
Inverse	4ος	8ος	2ος	5ος	6ος	7ος	3ος	1ος

```
for i = 1 to n
  Inverse[w, WomanPref[w, i]] = i
```

Η Άννα προτιμάει τον άνδρα 3 από τον 6
αφού $\text{inverse}[3] < \text{inverse}[6]$

2

7

Βιβλιογραφία

1. J. Kleinberg and E. Tardos, *Σχεδιασμός Αλγορίθμων*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*, ελληνική έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012
3. K. Mehlhorn and P. Sanders, *Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων - Τα βασικά εργαλεία*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2014
4. S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, *Αλγόριθμοι*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
5. Θ. Παπαθεοδώρου, *Αλγόριθμοι: Εισαγωγικά Θέματα και Παραδείγματα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης *Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1]* ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Πηγές εικόνων - Χρήση Έργων Τρίτων

Εικόνα 1: σελ. 6,

<http://pixabay.com/en/men-group-leader-businessmen-305814/>

Εικόνα 2: σελ. 6,

<http://pixabay.com/en/women-ladies-females-girls-walking-310023/>

Εικόνα 3: σελ. 15,

<http://pixabay.com/en/couple-love-marriage-proposal-47192/>

Εικόνα 4: σελ. 16, 21

<http://pixabay.com/en/wedding-bride-and-groom-figures-407487/>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.