ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Μαθηματικές Θεμελιώσεις της Επιστήμης των Υπολογιστών

ΤΟΜΟΣ Ι

ΣΩΤΗΡΗΣ Ε. ΝΙΚΟΛΕΤΣΕΑΣ

ΠΑΥΛΟΣ Γ. ΣΠΥΡΑΚΗΣ

GUTENBERG
ΑΘΗΝΑ 2003

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η Πιθανοτική Μέθοδος (The Probabilistic Method) έχει πρόσφατα αναπτυχθεί ραγδαία και αποτελεί ήδη ένα από τα πλέον ισχυρά εργαλεία της Συνδυαστικής. Ο μείζων λόγος αυτής της ταχείας ανάπτυξης της μεθόδου είναι ο σημαντικότατος ρόλος τον οποίο διαδραματίζει η χρήση της τυχαιότητας (randomness) στις Θεμελιώσεις της Επιστήμης του Υπολογισμού.

Η βασική ιδέα της Μεθόδου είναι η εξής: Για να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας συνδυαστικής δομής που ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες, κατασκευάζουμε έναν κατάλληλο πιθανοτικό δειγματοχώρο και αποδεικνύουμε ότι ένα τυχαία επιλεγόμενο μέλος αυτού του δειγματοχώρου ικανοποιεί αυτές τις επιθυμητές ιδιότητες με θετική (μη μηδενική) πιθανότητα.

Την Πιθανοτική Μέθοδο επινόησε ο μεγάλος Μαθηματικός Paul Erdös, ο οποίος και συνέχισε να συνεισφέρει τα μέγιστα στην ανάπτυξή της τα τελευταία 50 περίπου έτη, μέχρι τον Οκτώβρη του 1996, οπότε απεβίωσε. Θα θέλαμε να αφιερώσουμε την πρώτη αυτή παρουσίαση της Πιθανοτικής Μεθόδου στο ελληνικό αναγνωστικό κοινό στον Paul Erdös, ως ένδειξη ελάχιστης τιμής στο μεγάλο αυτό επιστήμονα και άνθρωπο.

Ο αναγνώστης αυτού του βιβλίου απλά απαιτείται να έχει μαθηματική ωριμότητα. Σελίδα προς σελίδα το βιβλίο εξηγεί, ανάμεσα σε άλλα, πώς να χρωματίσουμε γράφους έξυπνα, πώς να προβλέψουμε αποτελέσματα αγώνων σε τουρνουά, πώς να ανακαλύπτουμε ανεξάρτητες ομάδες και κλίκες σε σύνολα (για παράδειγμα) ανθρώπων, με ποιον τρόπο γίνεται γρήγορη επέκταση, πότε είναι χρήσιμη η απληστία, πώς να ταιριάζουμε ζευγάρια. Το βιβλίο μπορεί επομένως να ιδωθεί και σαν ένα μέσο για την κατασκευή ή επίλυση μαθηματικών γρίφων και συνδυαστικών παιχνιδιών.

Κατά βάθος όμως, η Πιθανοτική Μέθοδος είναι ο συνεκτικός ιστός για πολλά εντυπωσιακά (και φαινομενικά ασύνδετα) αποτελέσματα της Συνδυαστικής και η βάση της Θεωρίας των Πιθανοτικών Αλγόριθμων, των νεότατων αυτών μεθόδων Υπολογισμού που αυξάνουν σημαντικά τη δύναμη οποιασδήποτε Υπολογιστικής Μηχανής.

Το βιβλίο δίνει έμφαση στη μεθοδολογία[1]. Περιέχει αναλυτικά παραδείγματα και μπορεί να αποτελέσει διδακτικό εργαλείο για Μεταπτυχιακές Σπουδές στους κλάδους της Επιστήμης των Υπολογιστών ή των Μαθηματικών. Προτιμήσαμε επίσης, αντί να διακόπτουμε συνεχώς τη ροή της σκέψης του αναγνώστη για να δίνουμε στο βασικό τμήμα του βιβλίου τους ορισμούς των γραφοθεωρητικών, πιθανοθεωρητικών και μαθηματικών εννοιών κάθε φορά που τέτοιες έννοιες εμφανίζονται, να παρουσιάσουμε όλους αυτούς τους ορισμούς συγκεντρωτικά και με αναλυτικό τρόπο σε τρία ξεχωριστά παραρτήματα στο τέλος του.

[1] Αυτό δε σημαίνει ότι οι συγγραφείς διαφωνούν με την αξία της απουσίας της μεθόδου κατά Feyerabend (δες [26]).

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερα τον υποψήφιο Διδάκτορα του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών Π. Ψυχάρη. Ο Π. Ψυχάρης συνεργάστηκε ερευνητικά με τους συγγραφείς στα θέματα της ανοχής σε λάθη μιας ιδιαίτερα σημαντικής για τον παράλληλο υπολογισμό κατηγορίας δικτύων διασύνδεσης (βλέπε ενότητα 7.6). Επίσης, η προσωπική ερευνητική ενασχόληση του Π. Ψυχάρη με γενετικούς αλγόριθμους (genetic algorithms) και η επιμονή του στη χρησιμοποίηση της νεότατης αυτής αλγοριθμικής μεθόδου, αποτέλεσε σημαντική πηγή έμπνευσης για τους συγγραφείς, ιδιαίτερα στα πλαίσια της εργασίας τους για την σχεδόν ομοιόμορφη κατασκευή και την προσεγγιστική απαρίθμηση όλων των ταιριασμάτων ενός γράφου (βλέπε [16]).

Επίσης θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τους υποψήφιους Διδάκτορες του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών Δ. Φωτάκη και Κ. Χατζή για τα χρήσιμα σχόλια και τις υποδείξεις τους. Τέλος, το Ερευνητικό Πανεπιστημιακό Ινστιτούτο - Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ι.Τ.Υ.), για την πολύτιμη υποστήριξή του στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

Ας σημειωθεί ότι το θέμα που αναπτύσσεται εδώ θίγεται για πρώτη φορά στην ελληνική βιβλιογραφία. Ας ευχηθούμε, η ισχυρή παράδοση της χώρας μας σε Κλάδους Συνεχών Μαθηματικών να επιτρέψει την (αναγκαία για την Επιστήμη και Τεχνολογία) ανάπτυξη της Συνδυαστικής, των Διακριτών Μαθηματικών και των άλλων κλάδων των Θεμελιώσεων της Επιστήμης του Υπολογισμού.

Πάτρα, Νοέμβριος 1996

Σ. Νικολετσέας, Π. Σπυράκης

Κεφάλαιο 1

Η μέθοδος της θετικής πιθανότητας

1.1 Η ουσία της πιθανοτικής μεθόδου

Ο όρος πιθανοτική μέθοδος αναφέρεται σε ένα ευρύτατο σύνολο μαθηματικών τεχνικών που δύσκολα μπορούν να αντιμετωπιστούν σα μία μοναδική μέθοδος. Πολύ περισσότερο που το φάσμα των χρησιμοποιούμενων από την πιθανοτική μέθοδο τεχνικών δεν αποτελεί ένα κλειστό, οριστικά διαμορφωμένο σύνολο, αλλά αναπτύσσεται μέσα στο χρόνο, προσθέτοντας στα αρχικά, κλασσικά πιθανοθεωρητικά εργαλεία (π.χ. τις μέσες τιμές και τις ροπές τυχαίων μεταβλητών) νεότερες ισχυρές τεχνικές με χαρακτηριστικότερες το Θεώρημα Τοπικότητας και τις μεθόδους των ακολουθιών διατήρησης (martingales) και των μαρκοβιανών αλυσίδων.

Επίσης, η πιθανοτική μέθοδος δεν είναι δυνατό να προσδιορισθεί μονοσήμαντα με κριτήριο τις περιοχές στις οποίες χρησιμοποιείται, αφού αποτελεί μια γενική μέθοδο με πολυάριθμες εφαρμογές σε μια μεγάλη συλλογή από διαφορετικά μεταξύ τους πεδία έρευνας.

Ωστόσο, υπάρχει ένας ενιαίος, θεμελιώδης πυρήνας της πιθανοτικής μεθόδου που διαπερνά με συνεκτικό τρόπο το σύνολο των τεχνικών της και αποκαλύπτει τη βαθύτερη εσωτερική λογική και στόχευσή της. Πρόκειται για τη χρησιμοποίηση της μεθόδου για τη μη κατασκευαστική (nonconstructive) απόδειξη ύπαρξης συνδυαστικών δομών (combinatorial structures), που πληρούν συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες. Στη γενική μορφή της η πιθανοτική μέθοδος επιτυγχάνει αυτήν την απόδειξη ύπαρξης με την ακόλουθη διαδικασία:

- Κατασκευάζοντας (με τη χρήση νοητών τυχαίων πειραμάτων) με κατάλληλο τρόπο έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο δομών, συνήθως πεπερασμένου πληθάριθμου.

- Αποδεικνύοντας ότι η υπό εξέταση ιδιότητα ισχύει σε αυτόν τον κατασκευασμένο δειγματοχώρο με θετική (μη μηδενική) πιθανότητα.

Η θετική πιθανότητα αποδεικνύει (με βάση τον αξιωματικό, θεμελιώδη ορισμό της έννοιας της πιθανότητας) την ύπαρξη τουλάχιστον μιας δομής (στον τυχαία κατασκευασμένο χώρο δομών) που πληρεί τη ζητούμενη ιδιότητα.

Θα μπορούσε κανείς να αντιτείνει, ότι η έννοια της πιθανότητας δεν είναι ουσιαστική στην παραπάνω περιγραφείσα αποδεικτική διαδικασία και ότι ενδεχομένως θα μπορούσε να παρακαμφθεί από την έννοια της απαρίθμησης (counting). Αλλωστε η πιθανότητα, στις περισσότερες περιπτώσεις (και ακριβώς επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των δειγματοχώρων που η μέθοδος κατασκευάζει είναι πεπερασμένοι), προκύπτει διαιρώντας τον αριθμό των δομών που πληρούν την υπό εξέταση ιδιότητα με το συνολικό αριθμό των κατασκευασμένων τυχαίων δομών. Θεωρητικά, η επιχειρηματολογία αυτή είναι θεμιτή. Ωστόσο, τα πράγματα είναι διαφορετικά (όσον αφορά τον αποτελεσματικό χειρισμό των εννοιών αυτών) στην πράξη: είναι σχεδόν αδύνατο σε μια σειρά από σύνθετες τεχνικές (π.χ. στη μέθοδο της δεύτερης ροπής, στο Θεώρημα Τοπικότητας κτλ.) να αντικαταστήσει κανείς την πιθανότητα με επιχειρήματα απαρίθμησης (counting arguments) των εμφανιζόμενων συνδυαστικών δομών.

1.2 Η γέννηση της πιθανοτικής μεθόδου

Συνηθίζεται στη σχετική βιβλιογραφία να επιχειρείται η εισαγωγή στην πιθανοτική μέθοδο χρησιμοποιώντας το ίδιο πάντα παράδειγμα: την εφαρμογή της στον υπολογισμό κάτω φραγμάτων (lower bounds) αριθμών Ramsey. Η προτίμηση αυτή δεν αποτελεί απλή σύμπτωση. Αντίθετα, οφείλεται σε μια σειρά από σημαντικούς λόγους.

Το 1947, ο Ούγγρος μαθηματικός Paul Erdös σε ένα άρθρο τριών σελίδων με τίτλο "Ορισμένες παρατηρήσεις για τη θεωρία των γράφων" ("Some remarks on the theory of graphs", [18]) διαπραγματεύεται από τη σκοπιά μιας νέας μεθόδου τον υπολογισμό τέτοιων φραγμάτων. Αν και ήδη από το 1943 (από τον Szele, [64]) είχαν επιχειρηθεί παρόμοιες προσεγγίσεις, το άρθρο του Erdös θεωρείται η ιδρυτική πράξη της πιθανοτικής μεθόδου και ο ίδιος αναγνωρίζεται καθολικά σαν ο θεμελιωτής της νέας αυτής μεθόδου. Και αυτό γιατί για πρώτη φορά στην ιστορία παρουσιάζεται η υπό γέννηση μέθοδος με πληρότητα και γενικότητα και ανιχνεύονται οι τεράστιες δυνατότητές της στο να δίνει επιτυχείς λύσεις σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών προβλημάτων.

Επίσης, η συγκεκριμένη εφαρμογή αναδεικνύει το σύνολο των αρετών της πιθανοτικής μεθόδου: τη σαφήνεια, την κομψότητα, τη συντομία και τη δυνατότητα επίλυσης εξαιρετικά δύσκολων υπολογιστικών προβλημάτων. Είναι χαρακτηριστικό από την άποψη αυτή ότι ο ακριβής υπολογισμός των αριθμών Ramsey παραμένει μέχρι και σήμερα ένα ανοιχτό μαθηματικό πρόβλημα, ακόμα και για τα πρώτα μέλη της οικογένειας των αριθμών αυτών. Ο υπολογισμός άνω και κάτω φραγμάτων αποτελεί το μοναδικό μέχρι τώρα τρόπο ικανοποιητικής προσέγγισής τους. Στο άρθρο του Erdös υπολογίζονται κάτω φράγματα για τους αριθμούς Ramsey, αναδεικνύοντας έτσι τη δυνατότητα που προσφέρει η πιθανοτική μέθοδος για την ικανοποιητική αντιμετώπιση δυσκολότατων μαθηματικών προβλημάτων και μάλιστα με απλό και σύντομο τρόπο.

Ακολουθούν, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου, ορισμένα διαφωτιστικά παραδείγματα, με πρώτο την ιστορική μελέτη του Erdös για τους αριθμούς Ramsey.

1.3 Αριθμοί Ramsey

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας γράφων, βλ. [32]) ότι για έναν γράφο με τουλάχιστον έξι κορυφές, είτε ο ίδιος ο γράφος είτε ο συμπληρωματικός του περιέχουν έναν πλήρη γράφο (complete graph) τριών κορυφών (τρίγωνο ή triangle: συμβολίζουμε με K_3). Με άλλα λόγια, και για να αποφύγουμε την προσφυγή στο συμπληρωματικό γράφο, ο γράφος περιέχει είτε έναν K_3 είτε έναν $\overline{K_3}$ σαν υπογράφους.

Το πρόβλημα των αριθμών Ramsey αποτελεί γενίκευση της συγκεκριμένης αυτής περίπτωσης. Αναζητάμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό $R(k,l)$ έτσι ώστε οποιοσδήποτε γράφος με τουλάχιστον $R(k,l)$ κορυφές να περιέχει είτε έναν K_k είτε έναν $\overline{K_l}$ σαν υπογράφους. Για να παρακάμψουμε τη χρήση του συμπληρώματος και να διευκολύνουμε την εκτέλεση τυχαίων πειραμάτων και την εισαγωγή πιθανοτήτων, τροποποιούμε τη διατύπωση του προβλήματος, χωρίς να αλλάζουμε την ουσία του: χρωματίζουμε με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε) τις ακμές του (πλήρους) γράφου, όπου το κόκκινο (μπλε) χρώμα αντιστοιχεί στην ύπαρξη (απουσία) ακμής στον αρχικό γράφο. Ακολουθεί, με βάση αυτήν την παραλλαγή που χρησιμοποιεί χρωματισμούς των ακμών του πλήρους γράφου, ο ορισμός των αριθμών Ramsey:

Ορισμός 1. Καλούμε αριθμό Ramsey τάξης k, l και συμβολίζουμε με $R(k,l)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n έτσι ώστε σε οποιοδήποτε χρωματισμό δύο χρωμάτων (κόκκινο, μπλε) των ακμών ενός πλήρους γράφου n κορυφών (K_n) να υπάρχει είτε ένας κόκκινος πλήρης υπογράφος μεγέθους k (K_k) είτε ένας μπλε πλήρης υπογράφος μεγέθους l (K_l). □

Ο Αγγλος μαθηματικός F. Ramsey απέδειξε στα 1930 ότι ο $R(k,l)$ είναι πεπερασμένος, για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς k, l (βλ. [56]). Παρόλα αυτά, οι αριθμοί Ramsey αποτελούν ακόμα και σήμερα (όσον αφορά τον ακριβή υπολογισμό τους) ένα άλυτο πρόβλημα. Το 1955, οι Greenwood και Gleason υπολόγισαν τους $R(3,3)$ και $R(4,4)$. Από τότε η πρόοδος υπήρξε ασήμαντη. Ακόμα και ο $R(4,5)$ παραμένει άγνωστος, ενώ περισσότερη επιτυχία υπήρξε για τους $R(3,l)$, $3 \leq l \leq 9$, οι οποίοι έχουν πια υπολογισθεί.

Ο Erdös, προσπαθώντας να εκλαϊκεύσει την τεράστια δυσκολία υπολογισμού ακόμα και των μικρής τάξης αριθμών Ramsey, διηγήθηκε κάποτε χαριτολογώντας την ακόλουθη ιστορία: Ας υποθέσουμε ότι ο πλανήτης μας δέχεται επίθεση από έναν στρατό εξωγήινων που είναι σημαντικά ισχυρότερος από τους δικούς μας στρατούς και ότι ο στρατός αυτός μας ζητάει να υπολογίσουμε τον αριθμό $R(5,5)$, διαφορετικά θα καταστρέψει τον πλανήτη μας. Στην περίπτωση αυτή ο Erdös προτείνει να επιστρατεύσουμε το σύνολο των επιστημόνων και των υπολογιστικών μηχανών του πλανήτη μας και να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτό. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου ο επιτιθέμενος στρατός μας ζήταγε την επίλυση του αριθμού $R(6,6)$, ο Erdös (υπονοώντας προφανώς τη ματαιότητα υπολογισμού του αριθμού αυτού) πιστεύει ότι είναι καλύτερο να προετοιμαστούμε για πόλεμο!

Η αδυναμία ακριβούς υπολογισμού οδήγησε αναπόδραστα στον υπολογισμό άνω και κάτω φραγμάτων, σε μια προσπάθεια για την κατά το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση των αριθμών αυτών. Η πιθανοτική μέθοδος συνεισέφερε σημαντικά στην κατεύθυνση αυτή, όπως φαίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί και αφορά στους διαγώνιους (diagonal) αριθμούς Ramsey $R(k,k)$:

Θεώρημα 1 (Erdös, 1947)**.** Αν $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, τότε $R(k,k) > n$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την πιθανοτική μέθοδο, δημιουργούμε έναν κατάλληλο δειγματοχώρο με τη χρήση του ακόλουθου τυχαίου πειράματος: χρωματίζουμε τις ακμές του K_n με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε), όπου η επιλογή του χρώματος είναι τυχαία, με ίση πιθανότητα (και ίση με 1/2) για κάθε χρώμα και υποθέτοντας στοχαστική ανεξαρτησία για το χρωματισμό διαφορετικών ακμών. Είναι φανερό ότι προκύπτει ένας πιθανοτικός δειγματοχώρος τα στοιχεία του οποίου είναι τυχαίοι διχρωματισμοί (random 2-colorings) του πλήρους γράφου K_n. Εστω S οποιοδήποτε συγκεκριμένο (fixed) σύνολο k κορυφών και M_S το γεγονός "το S είναι μονοχρωματικό", δηλαδή όλες οι $\binom{k}{2}$ ακμές του S έχουν το ίδιο χρώμα, κόκκινο ή μπλε. Προφανώς, η πιθανότητα του γεγονότος M_S είναι:

$$\Pr\{M_S\} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Εστω M το γεγονός "υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοχρωματικό σύνολο με k κορυφές". Είναι $M = \cup_S M_S$. Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας του σύνθετου γεγονότος M είναι εξαιρετικά δύσκολος, εξαιτίας των πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων των επιμέρους γεγονότων M_S. Αλλά επειδή η πιθανότητα μιας ένωσης γεγονότων είναι μικρότερη ή ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των επιμέρους γεγονότων και επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{k}$ διαφορετικά σύνολα S και αντίστοιχα γεγονότα M_S, είναι φανερό ότι:

$$\Pr\{M\} = \Pr\{\cup_S M_S\} \leq \sum_{S,|S|=k} \Pr\{M_S\} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Επομένως, αν η υπόθεση του θεωρήματος ισχύει, τότε η πιθανότητα να υπάρχει ένα μονοχρωματικό σύνολο είναι μικρότερη από 1, οπότε η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα τέτοιο μονοχρωματικό σύνολο είναι θετική. Αυτό όμως σημαίνει πως υπάρχει κάποιο σημείο στο δειγματοχώρο που ικανοποιεί την ιδιότητα της οποίας η πιθανότητα είναι θετική. Αντίστοιχα, υπάρχει ένα τυχαίος διχρωματισμός του πλήρους γράφου χωρίς κανένα μονοχρωματικό πλήρη υπογράφο μεγέθους k, επομένως $R(k,k) > n$. □

Το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα προκύπτει βρίσκοντας το μέγιστο $n = n(k)$ το οποίο εξακολουθεί να ικανοποιεί την ανισότητα της θετικής πιθανότητας. Αναζητάμε λοιπόν το μέγιστο n έτσι ώστε να είναι:

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό της πιθανοτικής μεθόδου. Γι αυτό κρίνουμε απαραίτητο, παρακάμπτοντας προσωρινά τους αριθμούς Ramsey, να το διαπραγματευτούμε με γενικό και ενιαίο τρόπο στα πλαίσια μιας ξεχωριστής ενότητας.

1.4 Πιθανοτική μέθοδος και ασυμπτωτική συμπεριφορά

Χρησιμοποιώντας την πιθανοτική μέθοδο ενδιαφερόμαστε συχνά για την ασυμπτωτική συμπεριφορά (asymptotic behaviour) συναρτήσεων που προκύπτουν κατά την ανάλυση. Το ενδιαφέρον μας να εργαζόμαστε με μεγάλα μεγέθη εισόδου (για παράδειγμα, μεγάλους αριθμούς κορυφών σε εφαρμογές γράφων) έχει αφετηρία τις έννοιες των ορίων και των οριακών θεωρημάτων και πηγάζει από την εμπειρία της εμφάνισης “στοχαστικής αιτιοκρατίας” σε στατιστικά φαινόμενα που αναφέρονται σε μεγάλα πλήθη. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε αυτήν την μάλλον εγγενή σχέση της πιθανοτικής μεθόδου με το άπειρο παραθέτοντας δύο βασικούς λόγους.

Το σύνολο των υπολογιστικών προβλημάτων που μελετά η Επιστήμη του Υπολογισμού χωρίζεται σε δύο μεγάλες κλάσεις, με κριτήριο την πολυωνυμική ή μη πολυπλοκότητα χρόνου των μέχρι σήμερα γνωστών αλγόριθμων για την επίλυσή τους. Από τη μία, τα προβλήματα για τα οποία έχουν επινοηθεί αλγόριθμοι που χρειάζονται πολυωνυμικά μεγάλους χρόνους επίλυσης. Οι αλγόριθμοι αυτοί θεωρούνται υπολογιστικά αποδοτικοί (efficient). Από την άλλη, βρίσκονται τα αποκαλούμενα “δύσκολα” (“hard”) προβλήματα. Για τα προβλήματα αυτά δεν έχουν βρεθεί μέχρι σήμερα πολυωνυμικοί αλγόριθμοι επίλυσης. Ολοι οι μέχρι σήμερα γνωστοί αλγόριθμοι παρουσιάζουν τουλάχιστον εκθετικές συμπεριφορές πολυπλοκότητας, γεγονός που καθιστά τους αλγόριθμους αυτούς μη αποδοτικούς. (Μια πλήρης εισαγωγή σε θέματα αλγόριθμων και πολυπλοκότητας υπάρχει στα βιβλία [1] και [29]).

Η συνεισφορά της πιθανοτικής μεθόδου στο χειρισμό τέτοιων προβλημάτων είναι σημαντική και συνίσταται στη δυνατότητα κατασκευής αλγόριθμων που απαιτούν πολυωνυμικό χρόνο για την επίλυση υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων, όταν οι είσοδοι των αλγόριθμων αυτών δεν είναι αυθαίρετες αλλά ακολουθούν κάποιες στατιστικές κατανομές. Η πολυωνυμικότητα (αλλά πολλές φορές και η ορθότητα) των αλγόριθμων αυτών ισχύει “με μεγάλη πιθανότητα” (with high probability, δηλαδή με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο), ή κατά μέση τιμή.

Τέτοιοι πιθανοτικοί αλγόριθμοι και αλγόριθμοι μέσης τιμής είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικοί και για την επίτευξη καλύτερων πολυπλοκοτήτων χρόνου για την επίλυση ενός προβλήματος από τους υπάρχοντες ντετερμινιστικούς. Η σημασία τέτοιων αλγόριθμων είναι ιδιαίτερη σε περιπτώσεις όπου οι καλύτεροι χρόνοι επιτυγχάνονται σε σχέση με βέλτιστους (optimal) ντετερμινιστικούς αλγόριθμους, δηλαδή αλγόριθμους των οποίων ο χρόνος είναι (ασυμπτωτικά) ίσος με κάποιο αποδεδειγμένο κάτω φράγμα πολυπλοκότητας χρόνου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, και ενώ οι ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι έχουν ήδη δώσει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, η πιθανοτική μέθοδος προσφέρει συχνά τη δυνατότητα παραπέρα βελτίωσης και επίτευξης, με μεγάλη πιθανότητα, πολυπλοκοτήτων χρόνου μικρότερων από το υπάρχον κάτω φράγμα πολυπλοκότητας, ενώ η πιθανότητα μεγαλύτερων πολυπλοκοτήτων ή λάθους είναι εξαιρετικά μικρή (τείνει στο 0). Ζητήματα πιθανοτικών αλγόριθμων θα πραγματευθούμε αναλυτικά στο δεύτερο τόμο μας.

Ενας δεύτερος βασικός λόγος για τη στενή σχέση της πιθανοτικής μεθόδου με το άπειρο είναι η πολωτική συμπεριφορά που εμφανίζουν οι συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την πιθανότητα εμφάνισης των αναλυόμενων ιδιοτήτων: η ιδιότητα είτε ισχύει “σχεδόν βέβαια” (“almost certainly”, δηλαδή με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο), είτε είναι εξαιρετικά απίθανη (η αντίστοιχη πιθανότητα τείνει στο 0). Η μετάβαση από τη μία ποιότητα στην άλλη εμφανίζεται “ξαφνικά” καθώς η κάθε φορά ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το n στους αριθμούς Ramsey, η πιθανότητα ύπαρξης ακμής p σε τυχαίους γράφους) αρχίζει να ξεπερνά μια χαρακτηριστική για κάθε ιδιότητα τιμή. Περιγράφουμε το φαινόμενο αυτής της απότομης μετάβασης από την σχεδόν απίθανη ύπαρξη μιας ιδιότητας στη σχεδόν βέβαιη ύπαρξή της μιλώντας για “συμπεριφορά κατωφλίου”.

Για τους παραπάνω λόγους, η ανάγκη μελέτης της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων που προκύπτουν κατά την ανάλυση με την πιθανοτική μέθοδο είναι εμφανής. Στην επόμενη ενότητα επανερχόμαστε στους αριθμούς Ramsey, για τους οποίους προσδιορίζουμε ένα κάτω φράγμα μέσω της ασυμπτωτικής ανάλυσης.

1.5 Ενα κάτω φράγμα για αριθμούς Ramsey

Οπως δείξαμε στην ενότητα 1.3

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1 \Rightarrow R(k,k) > n$$

Για την ασυμπτωτική ανάλυση, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling (δες Παράρτημα A) για την προσέγγιση του παραγοντικού, προκύπτει:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \sim \frac{n^k}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \sim \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

και επειδή προφανώς $2^{1-\binom{k}{2}} \sim 2^{-\frac{k(k-1)}{2}}$, τελικά αρκεί

$$\left(\frac{ne}{k}\right)^k \sim 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

οπότε

$$R(k,k) > n \sim \frac{k}{e\sqrt{2}}\, 2^{\frac{k}{2}}$$

Πόρισμα 1. Οι διαγώνιοι αριθμοί Ramsey φράσσονται από κάτω σύμφωνα με την ανισότητα:

$$R(k,k) > \frac{k}{e\sqrt{2}}\, 2^{\frac{k}{2}}$$

□

Οι Erdös και Szekeres (βλ. [23]), χρησιμοποιώντας έννοιες της κλασσικής θεωρίας γράφων απέδειξαν για τη γενική περίπτωση αριθμών Ramsey το άνω φράγμα που ακολουθεί:

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

και το οποίο, για διαγώνιους αριθμούς Ramsey, γίνεται:

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \sim \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

Συνδυάζοντας το άνω και το κάτω φράγμα, προκύπτει η ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$\sqrt{2} \leq R(k,k)^{\frac{1}{k}} \leq 4$$

Με άλλα λόγια, η k-οστή ρίζα των διαγώνιων αριθμών Ramsey είναι ένας αριθμός μεταξύ των τιμών $\sqrt{2}$ και 4, ενώ ο ακριβής υπολογισμός, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 1.3, παραμένει άλυτο πρόβλημα για $k \geq 5$. Στο τρίτο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ένα ισχυρότερο κάτω φράγμα, χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή της βασικής μεθόδου που ονομάζεται μέθοδος της διαγραφής.

Η γενίκευση σε μη διαγώνιους αριθμούς Ramsey ($R(k,l), k \neq l$) είναι εύκολη:

Θεώρημα 2. Αν για κάποιο $p \in [0,1]$

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

τότε $R(k,l) > n$.

Απόδειξη: Χρωματίζουμε τις ακμές του πλήρους γράφου K_n τυχαία με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε), όπου η πιθανότητα να χρωματιστεί μια ακμή κόκκινη (μπλε) είναι p (αντίστοιχα $1-p$) για όλες τις ακμές και υποθέτοντας στοχαστική ανεξαρτησία για το χρωματισμό διαφορετικών ακμών. Για οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο K (L) που αποτελείται από k (l) κορυφές, έστω R_K (B_L) το γεγονός "όλες οι ακμές του συνόλου χρωματίστηκαν κόκκινες (μπλε)". Λόγω της στοχαστικής ανεξαρτησίας είναι:

$$\Pr\{R_K\} = p^{\binom{k}{2}} \text{ και } \Pr\{B_L\} = (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

επομένως, αν $E = (\cup_K R_K) \cup (\cup_L B_L)$

$$\Pr\{E\} \leq \sum_{K,|K|=k} \Pr\{R_K\} + \sum_{L,|L|=l} \Pr\{B_L\} = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Επομένως, αν η υπόθεση του θεωρήματος ισχύει, τότε η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα κόκκινο K_k και κανένα μπλε K_l είναι θετική, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένας τέτοιος διχρωματισμός του γράφου, γεγονός που σημαίνει ότι $R(k,l) > n$. □

1.6 Τουρνουά με την ιδιότητα S_k

Στα πλαίσια αυτής της ενότητας περιγράφουμε μιαν άλλη εφαρμογή της βασικής πιθανοτικής μεθόδου. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας για να αποδείξουμε την ύπαρξη, για οποιοδήποτε k, πεπερασμένων τουρνουά που πληρούν μια χαρακτηριστική ιδιότητα, την ιδιότητα S_k.

Ορισμός 2. Καλούμε τουρνουά (T_n) έναν κατευθυνόμενο γράφο (directed graph) με n κορυφές και ακριβώς μία (από τις δύο δυνατές) ακμή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών. □

Η ονομασία "τουρνουά" εξηγείται με την εξής "μετάφραση" του παραπάνω γραφοθεωρητικού ορισμού: αντιστοιχούμε σε κάθε κορυφή του γράφου μια ομάδα στα πλαίσια ενός πρωταθλήματος. Κάθε ομάδα αγωνίζεται (από μία φορά μόνο) με όλες τις υπόλοιπες, ενώ δεν υπάρχουν ισοπαλίες, οπότε για κάθε ζευγάρι ομάδων που δίνουν ένα αγώνα κατευθύνουμε την ακμή μεταξύ των αντίστοιχων κορυφών στον (κατευθυνόμενο) γράφο από τη νικήτρια προς την ηττημένη ομάδα. Με βάση αυτήν την αντιστοιχία, ακολουθεί ο ορισμός της ιδιότητας S_k:

Ορισμός 3. Ενα τουρνουά T πληρεί την ιδιότητα S_k αν και μόνο αν για οποιεσδήποτε k ομάδες υπάρχει τουλάχιστον μία άλλη που τις νικά όλες. $\square$

Ο Schütte έθεσε το ακόλουθο ερώτημα: Υπάρχει για οποιοδήποτε k ένα τουρνουά T_n (προφανώς $n \geq k$) το οποίο να πληρεί την ιδιότητα S_k; Το πρόβλημα αυτό έμενε για πολλά χρόνια άλυτο, μέχρι που το 1963 ο Erdös (βλ. [19]) έδωσε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας, μια απλή, σύντομη και κομψή καταφατική απάντηση. Επιπλέον, όχι μόνο απέδειξε την ύπαρξη ενός τουρνουά T_n που πληρεί την ιδιότητα S_k, αλλά υπολόγισε και τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό ομάδων n σε ένα τέτοιο τουρνουά T_n.

Θεώρημα 3 (Erdös, 1963)**.** Για οποιοδήποτε k, υπάρχει ένα τουρνουά T_n που ικανοποιεί την ιδιότητα S_k.

Απόδειξη: Δημιουργούμε έναν δειγματοχώρο τα στοιχεία του οποίου είναι τυχαία τουρνουά. Ενα τυχαίο τουρνουά προκύπτει αποφασίζοντας για την έκβαση κάθε αγώνα με βάση ένα τυχαίο πείραμα, ισοπίθανα (με πιθανότητα $1/2$) για κάθε ένα από τα δύο δυνατά αποτελέσματα και υποθέτοντας στοχαστική ανεξαρτησία για τα αποτελέσματα διαφορετικών αγώνων.

Εστω K ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο k ομάδων και έστω E_K το γεγονός "δεν υπάρχει ομάδα που να νικάει όλες τις ομάδες στο σύνολο K". Είναι:

$$\Pr\{E_K\} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

αφού για οποιαδήποτε ομάδα εκτός K, η πιθανότητα να νικάει όλες τις ομάδες στο K είναι $(1/2)^k$, επομένως η πιθανότητα να μην τις νικάει όλες είναι $1-(1/2)^k$ και η πιθανότητα αυτό να συμβαίνει για όλες τις $n-k$ εκτός K ομάδες είναι $\left(1-(1/2)^k\right)^{n-k}$. (Στους παραπάνω υπολογισμούς και για τον πολλαπλασιασμό των πιθανοτήτων των επιμέρους γεγονότων μιας τομής γεγονότων, χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση της στοχαστικής ανεξαρτησίας).

Επομένως, η πιθανότητα να υπάρχει ένα σύνολο K για το οποίο να μην υπάρχει ομάδα που να νικάει όλες τις ομάδες του (γεγονός E) φράσσεται από τα πάνω σύμφωνα με την ανισότητα:

$$\Pr\{E\} = \Pr\{\cup_K E_K\} \leq \sum_{K,|K|=k} \Pr\{E_K\} = \binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

Επιλέγοντας n αρκετά μεγάλο ώστε:

$$\binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} < 1$$

είναι $\Pr\{E\} < 1$, οπότε $\Pr\{\overline{E}\} > 0$, δηλαδή η πιθανότητα για το γεγονός $\overline{E}$ είναι θετική, οπότε στο δειγματοχώρο υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο για το οποίο να ισχύει το γεγονός $\overline{E}$, ή αλλιώς υπάρχει ένα τουρνουά T_n για το οποίο να ικανοποιείται η ιδιότητα S_K. $\square$

Εστω $n = f(k)$ ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός κορυφών σε ένα τουρνουά T_n που ικανοποιεί την ιδιότητα S_k. Επειδή (δες Παράρτημα Γ)

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \text{ και } \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \leq e^{-\frac{n-k}{2^k}}$$

προκύπτει η παρακάτω τελική ανισότητα:

$$n > k^2\, 2^k\, (\ln 2)(1 + o(1))$$

Το αποτέλεσμα αυτό, που αποδεικνύεται με την εφαρμογή της πιθανοτικής μεθόδου με πολύ σύντομο και απλό τρόπο, είναι αρκετά καλό συγκρινόμενο με το καλύτερο μέχρι σήμερα γνωστό αποτέλεσμα (αποδείχτηκε από τον Szekeres και αναφέρεται στο βιβλίο του Moon, [46]) και το οποίο είναι:

$$n \geq c\, k\, 2^k$$

όπου c μια κατάλληλα μεγάλη σταθερά.

1.7 Σχετικά με την προβλεψιμότητα ενός τουρνουά

Στην ενότητα αυτή θα διαπραγματευθούμε μια ακόμα εφαρμογή της μεθόδου της θετικής πιθανότητας και θα αποδείξουμε ένα μάλλον μη αναμενόμενο αποτέλεσμα, που καταρχήν ξενίζει και προκαλεί έκπληξη. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα της πιθανοτικής μεθόδου να προχωράει σε μια βαθύτερη μελέτη των φαινομένων και να αποδεικνύει αποτελέσματα που έρχονται σε σύγκρουση με την "κοινή λογική" αποτελεί ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής και αναδεικνύει το βαθύ, επιστημονικό της χαρακτήρα.

Εστω ένα τουρνουά T_n με n ομάδες $1, 2, \ldots, n$ (για τον ορισμό ενός τουρνουά δες την προηγούμενη ενότητα). Ορίζουμε σα διάταξη σ των ομάδων του τουρνουά μια μετάθεση (permutation) των αριθμών $1, 2, \ldots, n$ (οπότε το $\sigma(i)$ παριστάνει τη "βαθμολογική θέση" της ομάδας i στα πλαίσια της διάταξης σ, για παράδειγμα την περυσινή ή τη συνήθη βαθμολογική θέση των ομάδων που θεωρείται ότι εκφράζει τη δυναμικότητά τους).

Θεωρώντας ότι αυτή η βαθμολογική θέση των ομάδων προδικάζει σε μεγάλο βαθμό την έκβαση των μεταξύ τους αγώνων, χαρακτηρίζουμε το αποτέλεσμα ενός αγώνα μεταξύ δύο ομάδων i και j σαν "αναμενόμενο" αν η ομάδα i επικρατεί της ομάδας j ενώ $\sigma(i) < \sigma(j)$, και σαν "έκπληξη" αν η ομάδα i νικάει την ομάδα j ενώ $\sigma(i) > \sigma(j)$. Με άλλα λόγια θεωρούμε σαν αναμενόμενα (εκπλήξεις) τα αποτελέσματα των αγώνων που συμφωνούν (δε συμφωνούν) με τη βαθμολογική θέση των ομάδων.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια συνάρτηση $fit(T, \sigma)$ που αποτελεί ένα μέτρο της συμφωνίας ή όχι μιας συγκεκριμένης διάταξης σ με τα αποτελέσματα των αγώνων στα πλαίσια των αγώνων ενός συγκεκριμένου τουρνουά T:

$$fit(T, \sigma) = \#\,[\text{αναμενόμενων αποτελεσμάτων}] - \#\,[\text{εκπλήξεων}]$$

Επίσης, ορίζουμε μια συνάρτηση $fit(T)$ που χαρακτηρίζει την "προβλεψιμότητα" ενός τουρνουά T:

$$fit(T) = \max_{\sigma} fit(T, \sigma)$$

Με άλλα λόγια η συνάρτηση $fit(T)$ μετράει τη μέγιστη δυνατή "εσωτερική συνέπεια" ενός συγκεκριμένου τουρνουά T, όπου το μέγιστο παίρνεται εξετάζοντας όλες τις δυνατές διατάξεις.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε T είναι $fit(T) \geq 0$. Πραγματικά, αρκεί κανείς να πάρει, για οποιαδήποτε διάταξη σ, την "αντίστροφη" διάταξη τ ($\tau(i) = n - \sigma(i) + 1$). Προφανώς, ένα αναμενόμενο, σύμφωνα με τη μία διάταξη, αποτέλεσμα είναι έκπληξη για την άλλη και αντίστροφα, οπότε $fit(T, \sigma) = -fit(T, \tau)$, πράγμα που σημαίνει ότι μία από τις δύο συναρτήσεις είναι μη αρνητική.

Επίσης, υπάρχει μια κλάση από τουρνουά T που έχουν τη μέγιστη δυνατή εσωτερική συνέπεια $\left(fit(T) = \binom{n}{2}\right)$. Πρόκειται για εκείνα τα τουρνουά όπου τα αποτελέσματα των αγώνων ικανοποιούν την ιδιότητα της μεταβατικότητας (transitivity).

Στο σημείο αυτό προκύπτει το ακόλουθο ερώτημα: υπάρχουν (σε αντιδιαστολή με τα εσωτερικά συνεπή μεταβατικά τουρνουά) τουρνουά των οποίων η εσωτερική συνέπεια είναι μικρή; Η απάντηση δίνεται στο θεώρημα 5.

Πριν όμως αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, θα ορίσουμε μια κατανομή που χρησιμοποιείται κατά την απόδειξή του και η οποία εμφανίζεται αρκετά συχνά σε εφαρμογές της πιθανοτικής μεθόδου. Επίσης θα αποδείξουμε άνω φράγματα για την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή της κατανομής αυτής (large deviations, tail probabilities). Μια αναλυτική παρουσίαση διάφορων τέτοιων φραγμάτων, υπάρχει στο ιδιαίτερα σημαντικό άρθρο του H. Chernoff ([12]) και στο βιβλίο των N. Alon και J. Spencer ([4]).

Ορισμός 4. Καλούμε S_n την κατανομή

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, 1 \leq i \leq n$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και έχουν τη μορφή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ -1 & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$$

□

Παρατηρούμε ότι η κατανομή S_n είναι στην πραγματικότητα η κατανομή $2B_n - n$, όπου B_n είναι η διωνυμική κατανομή $B(n, \frac{1}{2})$. Επίσης, είναι πολύ απλό να δει κανείς ότι η μέση τιμή της S_n είναι ίση με 0 ενώ η διασπορά της (variance) είναι ίση με n. Με το επόμενο θεώρημα φράσσουμε από τα πάνω την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων (μετρημένες σε πολλαπλάσια της τυπικής απόκλισης που ισούται με $\sqrt{n}$) από τη μέση τιμή:

Θεώρημα 4. Για οποιοδήποτε $\tau > 0$ είναι

$$\Pr\{S_n > \tau\sqrt{n}\} < e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια (moment generating function) της τυχαίας μεταβλητής $X_i, 1 \leq i \leq n$ είναι

$$E\left(e^{\lambda X_i}\right) = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

οπότε η ροπογεννήτρια της S_n είναι

$$E\left(e^{\lambda S_n}\right) = E\left(e^{\lambda \sum_i X_i}\right) = E\left(\prod_i e^{\lambda X_i}\right) = \prod_i E\left(e^{\lambda X_i}\right) < \prod_i e^{\frac{\lambda^2}{2}} = e^{\frac{\lambda^2 n}{2}}$$

λόγω της στοχαστικής ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X_i. Από την ανισότητα του Markov (βλέπε ενότητα 2.4) έχουμε για οποιοδήποτε $\alpha > 0$

$$\Pr\{S_n > \alpha\} = \Pr\left\{e^{\lambda S_n} > e^{\lambda\alpha}\right\} < \frac{E\left(e^{\lambda S_n}\right)}{e^{\lambda\alpha}} < e^{\frac{\lambda^2 n}{2} - \lambda\alpha}$$

Για να πετύχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα επιλέγουμε την τιμή $\lambda = \frac{\alpha}{n}$ που ελαχιστοποιεί το άνω φράγμα, οπότε προκύπτει η ανισότητα

$$\Pr\{S_n > \alpha\} < e^{-\frac{\alpha^2}{2n}}$$

που για $\alpha = \tau\sqrt{n}$ δίνει τελικά

$$\Pr\{S_n > \tau\sqrt{n}\} < e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

□

Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι η πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων είναι εκθετικά μικρή, γεγονός συχνά απαραίτητο σε εφαρμογές της μεθόδου της θετικής πιθανότητας όπου ο αριθμός των γεγονότων του κατασκευαζόμενου δειγματοχώρου είναι πολλές φορές εκθετικά μεγάλος (στη μέθοδο αυτή πρέπει το γινόμενο του αριθμού των γεγονότων επί την πιθανότητα να παραβιάζεται η επιθυμητή ιδιότητα να είναι αυστηρά μικρότερο της μονάδας).

Ακολουθεί το θεώρημα για την ύπαρξη ενός τουρνουά μικρής "εσωτερικής συνέπειας":

Θεώρημα 5. Υπάρχει ένα τουρνουά T_n για το οποίο

$$fit(T) < n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln n}$$

Απόδειξη: Δημιουργούμε έναν δειγματοχώρο από τυχαία τουρνουά αποφασίζοντας για την έκβαση κάθε αγώνα με βάση ένα τυχαίο πείραμα, ισοπίθανα για κάθε ένα από τα δύο δυνατά αποτελέσματα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τους διάφορους αγώνες. Εστω μια συγκεκριμένη διάταξη σ. Για κάθε ακμή (αγώνα) i του πλήρους γράφου (τουρνουά), ορίζουμε την ακόλουθη δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή (random indiacator variable):

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο} \\ -1 & \text{αν το αποτέλεσμα είναι έκπληξη} \end{cases}$$

Εστω

$$S_m = X_1 + \cdots + X_m$$

όπου $m = \binom{n}{2}$. Προφανώς $fit(T,\sigma) = S_m$, δηλαδή η $fit(T,\sigma)$ ακολουθεί την κατανομή S_m. Εστω E_σ το γεγονός $fit(T,\sigma) > \alpha$. Χρησιμοποιώντας το άνω φράγμα του θεωρήματος 4, έχουμε:

$$\Pr\{S_m > \lambda\sqrt{m}\} < e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \text{ για κάθε } m, \lambda > 0$$

Είναι

$$\Pr\{E_\sigma\} = \Pr\{S_m > \alpha\} = \Pr\left\{S_m > \frac{\alpha}{\sqrt{m}}\sqrt{m}\right\} < e^{-\frac{\alpha^2}{2m}} < e^{-\frac{\alpha^2}{n^2}}$$

Διαλέγοντας $\alpha = n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln n}$ (το άνω φράγμα του θεωρήματος), η σχέση γίνεται:

$$\Pr\{E_\sigma\} < n^{-n} < \frac{1}{n!}$$

Επειδή ο αριθμός όλων των δυνατών διατάξεων είναι $n!$ η πιθανότητα να υπάρχει μια διάταξη σ τέτοια ώστε να ισχύει το γεγονός E_σ φράσσεται από τα πάνω σύμφωνα με την ακόλουθη ανισότητα:

$$\Pr\{\cup_\sigma E_\sigma\} \leq \sum_\sigma \Pr\{E_\sigma\} < n!\,\frac{1}{n!} < 1$$

Επομένως η πιθανότητα (για το τυχαίο τουρνουά T) να μην υπάρχει διάταξη σ έτσι ώστε $fit(T,\sigma) > \alpha$ είναι θετική, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον τουρνουά T για το οποίο $fit(T,\sigma) < \alpha$ για οποιαδήποτε διάταξη σ, δηλαδή $fit(T) < \alpha$. □

Το παραπάνω θεώρημα (που οφείλεται στους Erdös και Moon, βλ. [22]), αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα τουρνουά στο οποίο μόνο ένας ελάχιστος αριθμός από $n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln n} = o(n^2)$ αποτελέσματα (για παράδειγμα, λιγότερα του 50% όλων των αποτελεσμάτων) συμφωνούν με τη (συνήθη) βαθμολογική σειρά των ομάδων (που αποτελεί μέτρο της σχετικής δυναμικότητάς τους) και μάλιστα με όποιον τρόπο και αν καθοριστεί αυτή η βαθμολογική σειρά. Το γεγονός αυτό έρχεται σε ριζική αντίθεση με την επιφανειακή και πλατιά διαδεδομένη αντίληψη περί προβλεψιμότητας και συμφωνίας μεγάλων αριθμών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου φαινομένου με το μέσο όρο τους, αντίληψη που προκύπτει από μια λανθασμένη κατανόηση του νόμου των μεγάλων αριθμών (και δικαιολογείται συχνά με την επίκληση του "νόμου των πιθανοτήτων ").

1.8 Χρωματική απόκλιση

Συνεχίζουμε την παρουσίαση της μεθόδου της θετικής πιθανότητας με μια ακόμα εφαρμογή από το χώρο της θεωρίας γράφων.

Ορισμός 5. Καλούμε χρωματική απόκλιση ακμών $d(n)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό έτσι ώστε σε οποιοδήποτε χρωματισμό του πλήρους γράφου K_n με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε), να υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο κορυφών στο οποίο ο αριθμός των κόκκινων ακμών να υπερτερεί του αριθμού των μπλε τουλάχιστον κατά $d(n)$. □

Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα αυτό φαίνεται να ταυτίζεται με το πρόβλημα των αριθμών Ramsey, αφού σε μονοχρωματικά σύνολα η χρωματική απόκλιση ακμών είναι μεγάλη. Στην πραγματικότητα τα δύο προβλήματα είναι διαφορετικά: μπορεί να αποδειχθεί ότι ακόμα υψηλότερη χρωματική απόκλιση ακμών εμφανίζεται σε πολύ μεγάλα σύνολα κορυφών τα οποία δεν είναι μονοχρωματικά (άλλωστε η πιθανότητα να είναι ένα σύνολο μονοχρωματικό είναι εκθετική στον αριθμό των κορυφών του, δηλαδή εξαιρετικά μικρή για μεγάλα σύνολα).

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο άνω φράγμα για την χρωματική απόκλιση ακμών:

Θεώρημα 6.

$$d(n) \leq \sqrt{\ln 2}\, n^{\frac{3}{2}}$$

Απόδειξη: Εστω ένας τυχαίος διχρωματισμός των ακμών του K_n, όπου κάθε ακμή χρωματίζεται ισοπίθανα κόκκινη ή μπλε και στοχαστικά ανεξάρτητα από τις άλλες ακμές. Εστω ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο S και έστω D_S το γεγονός "ο αριθμός των κόκκινων ακμών υπερβαίνει τον αριθμό των μπλε τουλάχιστον κατά α", όπου η τιμή του α θα προκύψει κατά την ανάλυση για τη βελτιστοποίηση του αποτελέσματος. Προφανώς, η διαφορά του πλήθους των κόκκινων και μπλε ακμών δίνεται από την κατανομή S_m, για $m = \binom{|S|}{2}$. Επομένως

$$\Pr\{D_S\} = \Pr\{S_m > \alpha\} = \Pr\left\{S_m > \frac{\alpha}{\sqrt{m}}\sqrt{m}\right\} < e^{-\frac{\alpha^2}{2m}} < e^{-\frac{\alpha^2}{n^2}}$$

αφού, προφανώς, $\binom{|S|}{2} \leq \binom{n}{2} < \frac{n^2}{2}$. Επιλέγοντας $\alpha = \sqrt{\ln 2}\, n^{\frac{3}{2}}$ έχουμε:

$$\Pr\{D_S\} < 2^{-n}$$

Εστω D το γεγονός "υπάρχει τουλάχιστον ένα S όπου η διαφορά κόκκινων και μπλε ακμών είναι τουλάχιστον α". Επειδή ο συνολικός αριθμός των συνόλων S είναι 2^n, έχουμε:

$$\Pr\{D\} = \Pr\{\cup_S D_S\} \leq \sum_S \Pr\{D_S\} < 2^n\, 2^{-n} < 1$$

Επομένως το γεγονός $\overline{D}$ ισχύει με θετική πιθανότητα, με άλλα λόγια υπάρχει τουλάχιστον ένας χρωματισμός τέτοιος ώστε σε κανένα υποσύνολο η διαφορά των κόκκινων και μπλε ακμών να ξεπερνά το α, οπότε η χρωματική απόκλιση ακμών δεν είναι μεγαλύτερη από α, δηλαδή $d(n) \leq \sqrt{\ln 2}\, n^{\frac{3}{2}}$. □

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με δύο ακόμα εφαρμογές της μεθόδου της θετικής πιθανότητας, τις οποίες θα πραγματευθούμε και σε επόμενα κεφάλαια χρησιμοποιώντας και άλλες, ισχυρότερες πιθανοτικές μεθόδους.

1.9 Ιδιότητα Β

Η πρώτη εφαρμογή μελετά τη συνολοθεωρητική ιδιότητα B, που περιγράφεται στον ορισμό που ακολουθεί:

Ορισμός 6. Εστω ένα σύνολο Ω και έστω F μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Η F ικανοποιεί την ιδιότητα B αν υπάρχει διχρωματισμός του Ω χωρίς κανένα μονοχρωματικό σύνολο $S \in F$. □

Ο Erdös ([20]) μελέτησε την ιδιότητα B από τη σκοπιά της πιθανοτικής μεθόδου και απέδειξε ένα κάτω φράγμα για την ακόλουθη συνάρτηση $m(n)$:

Ορισμός 7. Εστω $m(n)$ το ελάχιστο m έτσι ώστε να υπάρχει μια οικογένεια F με m υποσύνολα πληθικού αριθμού n, η οποία να μην ικανοποιεί την ιδιότητα B. □

Η κρίσιμη παρατήρηση για τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος για την $m(n)$ είναι ότι το γεγονός $m(n) > m$ σημαίνει ότι το συγκεκριμένο m δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού (αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που είναι $m(n) > m$), με άλλα λόγια υπάρχει ένας διχρωματισμός όπου οποιαδήποτε m υποσύνολα πληθικού αριθμού n ικανοποιούν την ιδιότητα B, δηλαδή κανένα τους δεν είναι μονοχρωματικό. Με βάση αυτές τις απαραίτητες επεξηγήσεις αποδεικνύεται το θεώρημα για το κάτω φράγμα:

Θεώρημα 7. Για τη συνάρτηση $m(n)$ ισχύει

$$m(n) > 2^{n-1} - 1$$

Απόδειξη: Διχρωματίζουμε το σύνολο Ω τυχαία, ισοπίθανα για τα δύο χρώματα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τα διάφορα σημεία. Εστω μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη οικογένεια F που αποτελείται από $m < 2^{n-1}$ σύνολα S πληθικού αριθμού n. Καλούμε M_S το γεγονός "το S είναι μονοχρωματικό". Προφανώς

$$\Pr\{M_S\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{1-n}$$

Επομένως, η πιθανότητα να υπάρχει μονοχρωματικό S είναι

$$\Pr\{\cup_S M_S\} \leq m\, 2^{1-n} < 2^{n-1}\, 2^{1-n} < 1$$

οπότε το γεγονός $\overline{\{\cup_S M_S\}}$ έχει θετική πιθανότητα, δηλαδή υπάρχει ένας διχρωματισμός όπου η οποιαδήποτε οικογένεια F δεν περιέχει μονοχρωματικά σύνολα, με άλλα λόγια $m(n) > m$ και επειδή $m < 2^{n-1}$, το καλύτερο δυνατό κάτω φράγμα είναι $m(n) > 2^{n-1} - 1$ $\square$

1.10 Ιδιότητα van der Waerden

Η τελευταία εφαρμογή αυτού του κεφαλαίου είναι αριθμοθεωρητική και οφείλει το όνομά της στο μαθηματικό van der Waerden, που υπολόγισε ένα κάτω φράγμα για την ομώνυμη συνάρτηση $W(k)$, την οποία και ορίζουμε ευθύς αμέσως:

Ορισμός 8. Καλούμε $W(k)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n, έτσι ώστε αν διχρωματίσουμε τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$ να υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος με k όρους. $\square$

Παρατηρούμε ότι $W(k) > n$ σημαίνει ότι υπάρχει χρωματισμός των αριθμών $1, 2, \ldots, n$ χωρίς μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο k όρων. Με βάση την παρατήρηση αυτή αποδεικνύουμε το κάτω φράγμα:

Θεώρημα 8. Για τη συνάρτηση van der Waerden ισχύει

$$W(k) > 2^{\frac{k}{2}}$$

Απόδειξη: Διχρωματίζουμε τους $1, 2, \ldots, n$ τυχαία, ισοπίθανα για τα δύο χρώματα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τους διάφορους αριθμούς. Εστω S μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη αριθμητική πρόοδος k όρων και $M_S =$"η S είναι μονοχρωματική". Προφανώς

$$\Pr\{M_S\} = 2^{1-k}$$

Το σχετικά δυσκολότερο θέμα είναι να βρεθεί ο αριθμός όλων των δυνατών αριθμητικών προόδων με k όρους, από 1 έως n. Επειδή μία αριθμητική πρόοδος καθορίζεται πλήρως από τους δύο πρώτους όρους της και επειδή υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{2}$ τρόποι να επιλεγούν αυτοί οι δύο πρώτοι όροι, ο συνολικός αριθμός όλων των αριθμητικών ακολουθιών k όρων είναι το πολύ $\binom{n}{2}$ (αφού για μεγάλα k οι k πρώτοι όροι δε "χωράνε" στο διάστημα από 1 μέχρι n). Επομένως

$$\Pr\{\cup_S M_S\} \leq \binom{n}{2} 2^{1-k} < \frac{n^2}{2}\, 2^{1-k} < 1 \ \text{ εφόσον } \ n < 2^{\frac{k}{2}}$$

δηλαδή υπάρχει διχρωματισμός χωρίς μονοχρωματική αριθμητική ακολουθία k όρων, οπότε $W(k) > 2^{\frac{k}{2}}$ □

Τα δύο παραπάνω παραδείγματα δείχνουν την ευρύτητα εφαρμογών της πιθανοτικής μεθόδου. Η μέθοδος αυτή, αν και βασικά χρησιμοποιείται σε γραφοθεωρητικά προβλήματα και ιδιαίτερα στους τυχαίους γράφους (random graphs), προσφέρει εξίσου απλές, σύντομες και κομψές λύσεις και σε μια σειρά από άλλες μαθηματικές περιοχές, με κυριότερες τη συνολοθεωρία και τη θεωρία αριθμών (βλέπε π.χ. [4]).

Κεφάλαιο 2

Η γραμμικότητα της μέσης τιμής

2.1 Συνοπτική περιγραφή της μεθόδου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μια ακόμα θεμελιώδη πιθανοτική μέθοδο, η οποία στηρίζεται στην κλασσική πιθανοθεωρητική ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής. Η μέθοδος αυτή αποτελεί κατά κάποιον τρόπο “ποσοτική παραλλαγή” της βασικής πιθανοτικής μεθόδου που παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, με την έννοια ότι χρησιμοποιείται, στη γενική της μορφή, για τη μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης ενός ορισμένου αριθμού δομών που πληρούν μια επιθυμητή ιδιότητα (π.χ. αρκετών κύκλων Hamilton σε ένα τουρνουά) ή μιας επιθυμητής δομής ορισμένου μεγέθους (π.χ. ενός αρκετά μικρού κυρίαρχου κέντρου γειτνίασης, dominating set, σε ένα γράφο) και όχι απλά για την απόδειξη της ύπαρξης μιας τουλάχιστον οποιασδήποτε τέτοιας δομής.

Η ευρύτατη χρησιμοποίηση της μεθόδου σε πολυάριθμες αποδείξεις ύπαρξης δομών με συγκεκριμένα ποσοτικά χαρακτηριστικά καθώς και η ποικιλία τέτοιων εφαρμογών της μεθόδου, οφείλονται βασικά στο γεγονός ότι, ενώ είναι εξαιρετικά απλή και σύντομη, αποδεικνύεται συχνά αρκετά ισχυρή. Η απλότητά της αναδεικνύεται από την τεχνική περιγραφή της διαδικασίας που η μέθοδος, σε γενικές γραμμές, ακολουθεί:

1. Δημιουργούμε (με χρήση τυχαίων πειραμάτων) έναν κατάλληλο πιθανοτικό δειγματοχώρο δομών.

2. Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία αντιστοιχεί στα ποσοτικά χαρακτηριστικά (τον αριθμό ή το μέγεθος) των δομών που πληρούν την επιθυμητή ιδιότητα.

3. Εκφράζουμε την τυχαία μεταβλητή X σαν ένα άθροισμα επιμέρους τυχαίων μεταβλητών:

   $$X = X_1 + \cdots + X_n$$

   όπου οι $X_i, 1 \leq i \leq n$, είναι δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές (random indicator variables) της μορφής:

   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν ισχύει η επιθυμητή ιδιότητα} \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

4. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή $E(X_i)$ κάθε δεικνύουσας τυχαίας μεταβλητής X_i (ο υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής είναι, εξαιτίας του γεγονότος ότι η δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή παίρνει μόνο δύο τιμές από τις οποίες μάλιστα η μία είναι 0, αρκετά εύκολος και ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της πιθανότητας ικανοποίησης της επιθυμητής ιδιότητας).

5. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή $E(X)$ της X με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής:
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
σύμφωνα με την οποία η μέση τιμή ενός αθροίσματος (όχι αναγκαστικά στοχαστικά ανεξάρτητων) τυχαίων μεταβλητών είναι ίση με το άθροισμα των μέσων τιμών τους.

6. Η απόδειξη ύπαρξης ολοκληρώνεται με την (προφανή) παρατήρηση ότι μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή παίρνει τουλάχιστον μία τιμή μεγαλύτερη ή ίση και τουλάχιστον μία τιμή μικρότερη ή ίση με τη μέση τιμή της. Με άλλα λόγια, στον τυχαία κατασκευασμένο δειγματοχώρο υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο (αντίστοιχα, μία δομή) όπου
$$X \geq E(X)$$
και τουλάχιστον ένα σημείο (μία δομή) όπου
$$X \leq E(X)$$

Αλλά ο καλύτερος τρόπος για να επεξηγηθεί η μέθοδος, είναι μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της, μερικά από τα οποία παραθέτουμε στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου.

2.2 Απλές γραφοθεωρητικές εφαρμογές

Η πρώτη εφαρμογή που θα περιγράψουμε αποδείχτηκε από τον Szele ([64]) το 1943 και δεν είναι μόνο είναι η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου της γραμμικότητας της μέσης τιμής, αλλά θεωρείται μια από τις πρώτες εφαρμογές της πιθανοτικής μεθόδου γενικά. Πρόκειται για μια μη κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης ενός τουλάχιστον τουρνουά (για τον ορισμό ενός τουρνουά δες το προηγούμενο κεφάλαιο) με μεγάλο αριθμό κύκλων Hamilton (δες το παράρτημα Β για το σχετικό ορισμό).

Θεώρημα 9 (Szele, 1943)**.** Υπάρχει ένα τουρνουά με τουλάχιστον
$$n!\,2^{-(n-1)}$$
κύκλους Hamilton.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε ένα δειγματοχώρο τα σημεία του οποίου είναι τυχαία τουρνουά που παράγονται επιλέγοντας την κατεύθυνση κάθε ακμής του γράφου ισοπίθανα (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ για κάθε κατεύθυνση) και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές. Εστω, για κάθε μετάθεση σ των κορυφών του γράφου, μια τυχαία δεικνύουσα μεταβλητή της μορφής

$$X_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{η } \sigma \text{ συνιστά κύκλο Hamilton} \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Επειδή για να προκύπτει κύκλος αρκεί όλες οι ακμές στα πλαίσια της μετάθεσης να έχουν την ίδια κατεύθυνση (αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ για κάθε μια κατεύθυνση) και επειδή υπάρχουν 2 δυνατές κατευθύνσεις, η πιθανότητα μια μετάθεση να οδηγεί σε κύκλο είναι

$$\Pr\{X_\sigma = 1\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-(n-1)}$$

επομένως

$$E\left(X_\sigma\right) = 2^{-(n-1)}$$

Εστω X ο αριθμός όλων των κύκλων Hamilton. Προφανώς, ο αριθμός αυτός προκύπτει αθροίζοντας για όλες τις δυνατές μεταθέσεις σ τις αντίστοιχες δεικνύουσες μεταβλητές X_σ (που ακριβώς δείχνουν αν μια συγκεκριμένη μετάθεση οδηγεί σε κύκλο). Ετσι

$$X = \sum_\sigma X_\sigma$$

οπότε από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής

$$E(X) = E\left(\sum_\sigma X_\sigma\right) = \sum_\sigma E(X_\sigma) = n!\, 2^{-(n-1)}$$

αφού το πλήθος όλων των δυνατών μεταθέσεων είναι $n!$. Επομένως, και επειδή υπάρχει ένα σημείο όπου $X \geq E(X)$, υπάρχει αντίστοιχα ένα τουρνουά με τουλάχιστον $n!\, 2^{-(n-1)}$ κύκλους Hamilton. □

Η επόμενη εφαρμογή είναι επίσης γραφοθεωρητική και αποδεικνύει ότι οποιοσδήποτε γράφος περιέχει έναν αρκετά πυκνό σε ακμές διμελή (bipartite) υπογράφο. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι οι κορυφές οποιουδήποτε γράφου μπορούν να χωριστούν σε δύο μέρη έτσι ώστε οι μισές τουλάχιστον ακμές του να συνδέουν το ένα μέρος με το άλλο (καλούμε τις ακμές αυτές διασχίζουσες, crossing edges).

Θεώρημα 10. Οποιοσδήποτε γράφος $G = (V, E)$ με n κορυφές και e ακμές περιέχει έναν διμελή υπογράφο με τουλάχιστον $\frac{e}{2}$ ακμές.

Απόδειξη: Εστω ένας οποιοσδήποτε γράφος $G = (V, E)$ με n κορυφές και e ακμές. Χωρίζουμε τις κορυφές του γράφου με τυχαίο τρόπο σε 2 μέρη A και $B = V - A$ αποφασίζοντας ισοπίθανα (και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$) για κάθε κορυφή και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες κορυφές αν ανήκει ή όχι στο μέρος A (τα σημεία του κατασκευαζόμενου δειγματοχώρου είναι επομένως τυχαίοι διαμερισμοί των κορυφών του γράφου σε δύο μέρη).

Για κάθε ακμή e, έστω X_e μια τυχαία δεικνύουσα μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν η ακμή e είναι διασχίζουσα και την τιμή 0 διαφορετικά. Προφανώς, μια ακμή είναι διασχίζουσα αν τα δύο άκρα της ανήκουν σε διαφορετικά μέρη, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $2\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Επομένως είναι $E(X_e) = \frac{1}{2}$. Η τυχαία μεταβλητή

$$X = \sum_e X_e$$

μετράει τον αριθμό όλων των διασχιζουσών ακμών του γράφου και (λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής) έχει μέση τιμή

$$E(X) = \sum_e E\left(X_e\right) = \frac{e}{2}$$

Υπάρχει όμως ένα τουλάχιστον σημείο του δειγματοχώρου όπου η τυχαία μεταβλητή είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη μέση τιμή της, οπότε αντίστοιχα υπάρχει σε οποιονδήποτε γράφο ένας τουλάχιστον διαμερισμός σε δύο μέρη με τουλάχιστον $\frac{e}{2}$ διασχίζουσες ακμές, δηλαδή ένας τουλάχιστον διμελής υπογράφος με τουλάχιστον $\frac{e}{2}$ ακμές. □

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα με μια τρίτη απλή γραφοθεωρητική εφαρμογή, επανερχόμενοι στο πρόβλημα των μονοχρωματικών πλήρων υπογράφων ενός διχρωματισμένου πλήρους γράφου, πρόβλημα το οποίο διαπραγματευθήκαμε μελετώντας τους αριθμούς Ramsey στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η συντομία της απόδειξης του θεωρήματος που ακολουθεί είναι χαρακτηριστική της χρησιμοποιούμενης μεθόδου.

Θεώρημα 11. Υπάρχει ένας διχρωματισμός των ακμών του πλήρους γράφου n κορυφών με το πολύ

$$\binom{n}{\alpha} 2^{1-\binom{\alpha}{2}}$$

μονοχρωματικούς πλήρεις υπογράφους μεγέθους α.

Απόδειξη: Δημιουργούμε έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο διχρωματισμών των ακμών του K_n, χρωματίζοντας κάθε ακμή ισοπίθανα (και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ για κάθε χρώμα) και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές. Εστω X_A μια τυχαία δεικνύουσα μεταβλητή με τιμές 1 (0) ανάλογα με το αν το αντίστοιχο σύνολο κορυφών A μεγέθους α είναι (ή όχι) μονοχρωματικό. Προφανώς

$$E\left(X_A\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{\alpha}{2}} = 2^{1-\binom{\alpha}{2}}$$

Η τυχαία μεταβλητή

$$X = \sum_A X_A$$

μετράει τον αριθμό όλων των μονοχρωματικών πλήρων υπογράφων και έχει μέση τιμή

$$E(X) = \sum_A E(X_A) = \binom{n}{\alpha} 2^{1-\binom{\alpha}{2}}$$

λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής και επειδή υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{\alpha}$ υποσύνολα μεγέθους α σε ένα γράφο με n κορυφές. Αλλά υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του δειγματοχώρου όπου η τυχαία μεταβλητή είναι μικρότερη ή ίση με τη μέση τιμή της, οπότε αντίστοιχα υπάρχει ένας τουλάχιστον διχρωματισμός των ακμών του πλήρους γράφου n κορυφών με το πολύ $\binom{n}{\alpha}2^{1-\binom{\alpha}{2}}$ μονοχρωματικούς πλήρεις υπογράφους μεγέθους α. □

2.3 Κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης

Στην ενότητα αυτή θα διαπραγματευθούμε την έννοια των "κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης" (dominating sets), τα οποία αποτελούν σημαντική γραφοθεωρητική οντότητα και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 9. Ενα σύνολο κορυφών αποτελεί κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης ενός γράφου, αν οποιαδήποτε κορυφή του γράφου που δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο γειτνιάζει (δηλαδή συνδέεται με μία ακμή) με τουλάχιστον μία κορυφή του συνόλου αυτού. □

Ο παραπάνω ορισμός εξηγεί την ελληνική απόδοση του όρου dominating set, αφού ένα τέτοιο σύνολο έχει, όσον αφορά τη γειτνίαση, κυρίαρχο ρόλο στο γράφο και κατά κάποιο τρόπο αποτελεί "κέντρο" του γράφου, αφού οποιαδήποτε κορυφή είτε ανήκει στο σύνολο αυτό είτε βρίσκεται σε απόσταση το πολύ 1 από αυτό.

Η ύπαρξη και εύρεση βέλτιστων (βέλτιστα μικρών, αφού πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης) κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης αποτελεί υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (βλέπε το [29] για μια εισαγωγή στην πολυπλοκότητα υπολογιστικών προβλημάτων). Οι Νικολετσέας και Σπυράκης ([51]) μελέτησαν το πρόβλημα αυτό από τη σκοπιά της πολυπλοκότητας μέσης τιμής και χρησιμοποιώντας την πιθανοτική μέθοδο απέδειξαν την ύπαρξη λογαριθμικά μικρών κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης σε πυκνούς τυχαίους γράφους και έδωσαν γρήγορους αλγόριθμους που κατασκευάζουν "σχεδόν βέλτιστα" (near-optimal) κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με μεγάλη πιθανότητα και κατά μέση τιμή. Τα αποτελέσματα αυτής της ερευνητικής εργασίας περιγράφονται αναλυτικά στο τέταρτο κεφάλαιο του βιβλίου.

Για την ώρα, θα χρησιμοποιήσουμε την πιθανοτική μέθοδο για να αποδείξουμε την ύπαρξη μικρών κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης σε έναν οποιοδήποτε γράφο και θα στοιχειοθετήσουμε μία σχέση ανάμεσα στο μέγεθος των κέντρων αυτών και στον ελάχιστο βαθμό του γράφου.

Θεώρημα 12. Οποιοσδήποτε γράφος $G(V, E)$ με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό $\delta > 1$ περιέχει ένα τουλάχιστον κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης μεγέθους το πολύ

$$n \frac{1 + \ln(\delta + 1)}{\delta + 1}$$

Απόδειξη: Τοποθετούμε κάθε κορυφή σε ένα (υπό διαμόρφωση κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης) σύνολο X στη βάση ενός τυχαίου πειράματος, με πιθανότητα $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ για κάθε κορυφή και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες κορυφές. Εστω Y_X το (τυχαία καθοριζόμενο) σύνολο που αποτελείται από τις κορυφές οι οποίες:

- δεν επελέγησαν για συμμετοχή στο σύνολο X και
- δε γειτνιάζουν με καμία κορυφή του X

Προφανώς το σύνολο $U = X \cup Y_X$ αποτελεί ένα κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης του γράφου, αφού οποιαδήποτε κορυφή είτε ανήκει σε αυτό, είτε δεν ανήκει αλλά γειτνιάζει με αυτό. Θα προσπαθήσουμε να φράξουμε από τα πάνω τη μέση τιμή του πληθικού αριθμού του συνόλου U. Το μέγεθος του συνόλου X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p, οπότε

$$E(|X|) = np$$

Η πιθανότητα να μην ανήκει μία συγκεκριμένη κορυφή v στο X είναι $1-p$ και η πιθανότητα να μη γειτνιάζει με αυτό είναι

$$(1-p)^{d(v)} \leq (1-p)^{\delta}$$

οπότε

$$\Pr\{v \in Y_X\} \leq (1-p)^{\delta+1}$$

όπου $d(v)$ ο βαθμός της κορυφής v, αφού η μη γειτνίαση με το σύνολο X ισοδυναμεί με τη μη τοποθέτηση των $d(v)$ στο πλήθος γειτονικών κορυφών της v στο X. Επομένως, ορίζοντας για κάθε κορυφή v μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή Y_v της μορφής

$$Y_v = \begin{cases} 1 & \text{αν } v \in Y_X \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

είναι φανερό ότι είναι

$$|Y_X| = \sum_v Y_v$$

οπότε από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$E\left(|Y_X|\right) = \sum_v E\left(Y_v\right) \leq n(1-p)^{\delta+1}$$

επομένως

$$E(|U|) = E\left(|X| + |Y_X|\right) \leq np + n(1-p)^{\delta+1}$$

και τελικά

$$E(|U|) \leq n\,\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1} + n\left(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right)^{\delta+1} \leq n\,\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$$

Αρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στον τυχαία κατασκευασμένο δειγματοχώρο (αντίστοιχα ένα σύνολο $U = X \cup Y_X$ στο γράφο) με τιμή (δηλαδή με μέγεθος) μικρότερο ή ίσο με τη μέση τιμή της U, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον U με το πολύ

$$n\,\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$$

κορυφές, το οποίο εκ κατασκευής αποτελεί κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης). □

2.4 Αποδείξεις μη ύπαρξης με την ανισότητα Markov

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί μια καταρχήν ένδειξη για την "αναμενόμενη" συμπεριφορά της και προσφέρει έναν "στοχαστικό μέσο όρο" για τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή. Στην περίπτωση όπου η μέση τιμή τείνει στο 0 καθώς η μεταβλητή εισόδου (ή ανεξάρτητη μεταβλητή, συνήθως n) τείνει στο άπειρο, η ένδειξη αυτή είναι αρκετά κοντά στην πραγματική διακύμανση των τιμών της τυχαίας μεταβλητής, με την έννοια ότι αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα τιμών μεγαλύτερων του 0 τείνει στο 0, με άλλα λόγια η τυχαία μεταβλητή περιορίζεται στην τιμή 0 με πιθανότητα που τείνει στο 1. Η απόδειξη αυτής της συγκέντρωσης τιμών στο 0 επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, η οποία φράσσει την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής από τη μέση της τιμή:

Θεώρημα 13 (Ανισότητα Markov)**.** Εστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό t είναι

$$\Pr\{X \geq t\,E(X)\} \leq \frac{1}{t}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Pr\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}$$

Απόδειξη: Εστω μια συνάρτηση $f(x)$ με τιμές $f(x) = 1$ αν $x \geq t$ και 0 διαφορετικά. Προφανώς είναι

$$\Pr\{X \geq t\} = E(f(x))$$

Αλλά, από τον ορισμό της συνάρτησης αυτής, είναι $\forall x, f(x) \leq \frac{x}{t}$. Επομένως, είναι και

$$E(f(x)) \leq E\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{E(X)}{t}$$

□

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov για $t = 1$, προκύπτει εύκολα το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2. Για οποιαδήποτε μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή $X(n)$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} E(X(n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Pr\{X(n) = 0\} = 1$$

□

Το παραπάνω πόρισμα αποτελεί τη βάση για την ακόλουθη γενική διαδικασία απόδειξης της μη ύπαρξης δομών που ικανοποιούν μια επιθυμητή ιδιότητα.

1. Δημιουργούμε (με χρήση τυχαίων πειραμάτων) έναν κατάλληλο πιθανοτικό δειγματοχώρο δομών.

2. Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό των δομών που ικανοποιούν την επιθυμητή ιδιότητα.

3. Εκφράζουμε την τυχαία μεταβλητή X σαν ένα άθροισμα δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών και στηριζόμενοι στη γραμμικότητα της μέσης τιμής, υπολογίζουμε τη μέση τιμή της και αποδεικνύουμε ότι τείνει στο 0 καθώς η μεταβλητή εισόδου τείνει στο άπειρο.

4. Επικαλούμενοι το προηγούμενο πόρισμα, αποδεικνύουμε ότι με πιθανότητα που τείνει στο 1 η τυχαία μεταβλητή περιορίζεται στην τιμή 0, με άλλα λόγια δεν υπάρχει, "σχεδόν βέβαια", δομή που να ικανοποιεί την υπό εξέταση ιδιότητα.

Η παραπάνω απόδειξη μη ύπαρξης χρησιμοποιείται ευρύτατα στον υπολογισμό φραγμάτων για τη μη ικανοποίηση ιδιοτήτων. Στις δύο επόμενες ενότητες, υπολογίζουμε ένα τέτοιο φράγμα για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας (satisfiability) τυχαίων λογικών τύπων (random boolean formulas) και επίσης ένα κάτω φράγμα για το μέγεθος κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης σε πυκνούς τυχαίους γράφους (dense random graphs).

2.5 Μη ικανοποιησιμότητα τυχαίων λογικών τύπων: ένα φράγμα

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας (satisfiability) λογικών τύπων (boolean formulas) είναι ένα από τα βασικότερα υπολογιστικά προβλήματα και έχει διαδραματίσει ιστορικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας της υπολογιστικής πολυπλοκότητας (computational complexity).

Τη σπουδαιότητά του καταμαρτυρούν οι πολυάριθμες εφαρμογές που έχει σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών περιοχών, με χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις τον έλεγχο της ορθής λειτουργίας υπολογιστικών μηχανών και προγραμμάτων (program and machine testing) και το σχεδιασμό και έλεγχο ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μεγάλης κλίμακας (VLSI design and testing).

Ο θεμελιώδης χαρακτήρας του από τη σκοπιά της υπολογιστικής πολυπλοκότητας οφείλεται στο ότι υπήρξε το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία που αποδείχτηκε ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο. Το 1971, ο Stephen Cook ([14]), στο ιστορικό άρθρο του με τίτλο "The Complexity of Theorem-Proving Procedures" ("Η Πολυπλοκότητα Αποδεικτικών Διαδικασιών") ορίζει μια ευρύτερη κλάση υπολογιστικών προβλημάτων στην οποία το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας λογικών τύπων διαδραματίζει κεντρικό ρόλο, από την άποψη ότι αν αυτό μπορέσει να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε όλα τα προβλήματα της κλάσης επιδέχονται πολυωνυμικούς αλγόριθμους επίλυσης επίσης, ενώ αν για οποιοδήποτε πρόβλημα της κλάσης αυτής αποδειχτεί η μη ύπαρξη πολυωνυμικών αλγόριθμων, το ίδιο θα ισχύει και για την ικανοποιησιμότητα λογικών τύπων. Τα επόμενα χρόνια αποδείχτηκε (μέσω πολυωνυμικών αναγωγών στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας) ότι μια σειρά άλλα προβλήματα μοιράζονται αυτήν την ιδιότητα της "μεγαλύτερης δυσκολίας" με την ικανοποιησιμότητα και συναποτελούν την υποκλάση των "υπολογιστικά δύσκολων" προβλημάτων, για τα οποία δεν έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα πολυωνυμικοί αλγόριθμοι επίλυσης, ενώ θεωρείται εξαιρετικά απίθανο να εφευρεθούν τέτοιοι αλγόριθμοι στο μέλλον.

Στη συνέχεια, ορίζουμε το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας λογικών τύπων. Ενας λογικός τύπος βρίσκεται σε συζευκτική κανονική μορφή (Conjunctive Normal Form, CNF), όταν αποτελείται από τη λογική σύζευξη (AND) προτάσεων (clauses) που είναι διαζεύξεις (OR) λογικών μεταβλητών σε απλή ή συμπληρωμένη μορφή. Καλούμε ανάθεση (truth assignment) μία αντιστοίχηση των δύο δυνατών λογικών τιμών, αληθής (true) ή ψευδής (false), στις λογικές μεταβλητές.

Μια ανάθεση ικανοποιεί μια πρόταση όταν ένας τουλάχιστον όρος της (μία μεταβλητή της πρότασης σε απλή ή συμπληρωμένη μορφή) καθίσταται αληθής. Ο λογικός τύπος ικανοποιείται από μια ανάθεση που ικανοποιεί όλες τις προτάσεις του τύπου. Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας συνίσταται στο αν υπάρχει μία τουλάχιστον ανάθεση που ικανοποιεί το λογικό τύπο.

Μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας (SAT) προκύπτει αν όλες οι προτάσεις του λογικού τύπου έχουν τον ίδιο αριθμό όρων (ένας όρος, literal, είναι μια μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της) k (k-SAT). Η τιμή $k = 3$ είναι ιδιαίτερα σημαντική και έχει μελετηθεί ευρύτατα, αφού είναι η ελάχιστη τιμή για την οποία το k-SAT πρόβλημα παραμένει υπολογιστικά δύσκολο. Η υπολογιστική δυσκολία του 3-SAT έχει οδηγήσει στη μελέτη του προβλήματος αυτού κατά μέση τιμή, κατά την οποία εξετάζεται η ικανοποιησιμότητα ή μη τυχαίων λογικών τύπων, δηλαδή λογικών τύπων των οποίων οι προτάσεις σχηματίζονται επιλέγοντας ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα 3 διαφορετικές μεταβλητές από όλες τις δυνατές και αποφασίζοντας με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ για κάθε επιλεγμένη μεταβλητή το αν θα εμφανιστεί σε συμπληρωμένη ή όχι μορφή.

Εστω ότι ένας τυχαίος λογικός τύπος αποτελείται από $m = cn$ προτάσεις, όπου n είναι ο αριθμός των λογικών μεταβλητών. Διαισθητικά, η πιθανότητα ικανοποίησης του λογικού τύπου είναι μεγάλη για μικρά c (και μικραίνει καθώς μεγαλώνει το c), εξαιτίας της αυξημένης δυνατότητας πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων μεταξύ των προτάσεων, με αποτέλεσμα να μη μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα. Η εμπειρική προσέγγιση του προβλήματος (μέσω πειραματικών αποτελεσμάτων) υποδεικνύει την ύπαρξη ενός κατωφλίου (threshold) ικανοποιησιμότητας $c^* = 4.19$. Με άλλα λόγια, τα πειράματα δείχνουν ότι αν $c < c^*$ τότε ένας τυχαίος λογικός τύπος είναι ικανοποιήσιμος σχεδόν βέβαια, ενώ το αντίθετο ισχύει για $c > c^*$.

Παρόλα αυτά, η μαθηματική θεμελίωση φραγμάτων ικανοποιησιμότητας δεν έχει προχωρήσει αρκετά και τα καλύτερα αποδεδειγμένα φράγματα απέχουν πολύ από την πειραματική τιμή 4.19. Το μεγαλύτερο αποδεδειγμένο φράγμα ικανοποιησιμότητας είναι μόλις 3.001 και οφείλεται στους Frieze και Suen ([28]), ενώ πρόσφατα οι Kirousis, Kranakis, Krizanc ([39]) έδειξαν το μικρότερο αποδεδειγμένο φράγμα μη ικανοποιησιμότητας (4.598). Προηγουμένως, οι Kamath, Motwani, Palem και Spirakis ([35]) είχαν αποδείξει ότι η τιμή 4.758 αποτελεί φράγμα για τη μη ικανοποιησιμότητα τυχαίων λογικών τύπων, εφαρμόζοντας μια γενική θεωρία στοχαστικών ανισοτήτων που οι ίδιοι ανέπτυξαν για την ουρά (tail) της κατανομής της τοποθέτησης σφαιριδίων σε θέσεις υποδοχής (occupancy problems). Η απόδειξη των φραγμάτων αυτών είναι δύσκολη και εκφεύγει των σκοπών αυτού του βιβλίου. Περιοριζόμαστε λοιπόν στην απόδειξη (χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέσης τιμής και την ανισότητα Markov) ενός λιγότερου ισχυρού φράγματος για μη ικανοποιησιμότητα, ίσου με 5.191, που αποδίδεται στους Franco και Paull ([27]) και Chvátal και Szemerédi ([13]).

Θεώρημα 14. Για $c \geq 5.191$ η πιθανότητα ικανοποιησιμότητας τυχαίων λογικών τύπων με n μεταβλητές, 3 όρους ανά πρόταση και $m = cn$ προτάσεις, τείνει στο 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Απόδειξη: Εστω ένας οποιοσδήποτε τυχαίος λογικός τύπος με n μεταβλητές, 3 όρους ανά πρόταση και $m = cn$ προτάσεις. Δημιουργούμε ένα δειγματοχώρο (τα σημεία του οποίου είναι αναθέσεις) αποφασίζοντας για την τιμή κάθε μιας μεταβλητής ισοπίθανα (και με πιθανότητα ίση με $\frac{1}{2}$ για true ή false) και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες μεταβλητές. Για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ανάθεση, η πιθανότητα ικανοποίησης μιας πρότασης είναι $\frac{7}{8}$ (μόνο μία από τις 8 δυνατές τριάδες τιμών των 3 μεταβλητών, η περίπτωση όπου όλοι οι όροι καθίστανται ψευδείς, δεν ικανοποιεί την πρόταση) και επομένως η πιθανότητα ικανοποίησης του λογικού τύπου είναι $\left(\frac{7}{8}\right)^m$, αφού είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται όλες οι (m στο πλήθος) προτάσεις και λόγω της ανεξαρτησίας επιλογής των συμπληρωμάτων. Ορίζουμε για κάθε ανάθεση A μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή X_A:

$$X_A = \begin{cases} 1 & \text{η ανάθεση ικανοποιεί το λογικό τύπο} \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X_A είναι

$$E(X_A) = \left(\frac{7}{8}\right)^m$$

Προφανώς, η τυχαία μεταβλητή

$$X = \sum_A X_A$$

μετράει τον αριθμό όλων των αναθέσεων που ικανοποιούν το λογικό τύπο και από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$E(X) = E\left(\sum_A X_A\right) = \sum_A E\left(X_A\right) = 2^n \left(\frac{7}{8}\right)^{cn}$$

αφού ο αριθμός όλων των δυνατών αναθέσεων είναι 2^n. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov προκύπτει ότι

$$\Pr\{X \geq 1\} \leq 2^n \left(\frac{7}{8}\right)^{cn}$$

Αλλά

$$2^n \left(\frac{7}{8}\right)^{cn} \to 0 \Leftrightarrow c \geq \log_{\frac{8}{7}} 2 = 5.191$$

και, συνοψίζοντας, έχουμε

$$c \geq 5.191 \Rightarrow \Pr\{X \geq 1\} \to 0$$

με άλλα λόγια για $c \geq 5.191$ ο τυχαίος λογικός τύπος είναι σχεδόν βέβαια μη ικανοποιήσιμος, αφού με μεγάλη πιθανότητα δεν υπάρχει ανάθεση που να τον ικανοποιεί. □

2.6 Κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης σε τυχαίους γράφους

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι σε τυχαίους γράφους $G_{n,p}$ (για p σταθερό) δεν υπάρχουν κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με μέγεθος μικρότερο από $\ln n$, σχεδόν βέβαια. Το αποτέλεσμα αυτό, που οφείλεται στους Νικολετσέα και Σπυράκη ([51]), συνεπάγεται ένα λογαριθμικό κάτω φράγμα για το μέγεθος κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης σε πυκνούς τυχαίους γράφους.

Ενα στιγμιότυπο (instance) του τυχαίου γράφου $G_{n,p}$ προκύπτει στη βάση του ακόλουθου τυχαίου πειράματος: για κάθε μία από τις $\binom{n}{2}$ δυνατές ακμές ενός γράφου n κορυφών αποφασίζεται για το αν αυτή η ακμή υπάρχει (δεν υπάρχει) με πιθανότητα p (αντίστοιχα, $1-p$) για κάθε ακμή και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές. Το θεώρημα που ακολουθεί ισχύει για οποιοδήποτε σταθερό p (τυχαίοι γράφοι με σταθερή πιθανότητα ύπαρξης ακμών χαρακτηρίζονται πυκνοί, επειδή έχουν πολλές, κατά μέση τιμή $p\binom{n}{2} = O(n^2)$, ακμές). Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρεται στην περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ που γενικεύεται εύκολα για οποιοδήποτε σταθερό p.

Θεώρημα 15. Για οποιοδήποτε $k < \ln n$ η πιθανότητα ύπαρξης ενός κυρίαρχου κέντρου γειτνίασης με μέγεθος k στο $G_{n,1/2}$ τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Απόδειξη: Εστω ένας γράφος του $G_{n,1/2}$ και έστω S ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο k κορυφών του γράφου αυτού. Η δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{το } S \text{ είναι κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης} \\ 0 & \text{στην αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

έχει, λόγω και της στοχαστικής ανεξαρτησίας, μέση τιμή

$$E(X_S) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

αφού $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ είναι η πιθανότητα μια συγκεκριμένη κορυφή εκτός S να γειτνιάζει με τουλάχιστον μία κορυφή στο S και το ίδιο πρέπει να ισχύει για όλες τις $n-k$ κορυφές εκτός S, για να είναι το S κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης. Η μεταβλητή

$$X = \sum_{S, |S|=k} X_S$$

μετράει τον αριθμό των κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης μεγέθους k και έχει, λόγω της γραμμικότητας, μέση τιμή

$$E(X) = \sum_{S,|S|=k} E(X_S) = \binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

Επειδή $\binom{n}{k} \leq n^k$ και $1 - \frac{1}{2^k} \leq e^{-\frac{1}{2^k}}$ είναι

$$E(X) \leq e^{\frac{k}{2^k}} \left(e^{k \ln n - \frac{n}{2^k}} \right)$$

Ο δεύτερος εκθέτης είναι

$$F = k \ln n - \frac{n}{2^k} \to -\infty \Leftrightarrow k = \frac{\ln n}{c} \text{ όπου } c > 1$$

δηλαδή ο εκθέτης F τείνει στο μείον άπειρο όταν $k < \ln n$ και επομένως

$$k < \ln n \Rightarrow E(X) \to 0$$

Με άλλα λόγια, η μέση τιμή του αριθμού των κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με μέγεθος μικρότερο από $\ln n$ τείνει στο μηδέν, οπότε δεν υπάρχουν τέτοια κέντρα γειτνίασης σχεδόν βέβαια. □

2.7 Οι δυνατότητες και τα όρια της μεθόδου

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό, κρίνουμε σκόπιμο να διαπραγματευθούμε τα ισχυρά σημεία αλλά και τις αδυναμίες της μεθόδου της γραμμικότητας της μέσης τιμής, σε μια προσπάθεια σύγκρισής της με άλλες μεθόδους που περιγράφονται σε επόμενα κεφάλαια.

Η μέθοδος αυτή, όπως προκύπτει από την περιγραφή και τις εφαρμογές της που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, χαρακτηρίζεται από τεχνική απλότητα και εύκολους μαθηματικούς υπολογισμούς. Η απλότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών ισχύει για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητα από το αν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες ή όχι. Αντίθετα, στις μεγαλύτερες ροπές (χαρακτηριστικά, στη μέθοδο της δεύτερης ροπής που περιγράφεται στο τέταρτο κεφάλαιο) η γραμμικότητα προϋποθέτει στοχαστική ανεξαρτησία, γεγονός που καθιστά τον υπολογισμό των ροπών αυτών ιδιαίτερα δύσκολο από τεχνική άποψη στις περισσότερες περιπτώσεις.

Παρά τις τεχνικές αυτές δυσκολίες, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η προσφυγή σε μεγαλύτερες ροπές είναι αναπόφευκτη. Κι αυτό γιατί, ενώ συχνά ο υπολογισμός της μέσης τιμής όχι μόνο δίνει μια πρώτη διαίσθηση για τα ποσοτικά χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής αλλά και αποδεικνύεται τελικά αρκετά ισχυρός για την απόδειξη ύπαρξης ή μη δομών που ικανοποιούν συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες, σε πολλές περιπτώσεις, όπου είναι αναγκαία η απόδειξη ισχυρής συγκέντρωσης γύρω από τη μέση τιμή, ο υπολογισμός της μέσης τιμής δεν επαρκεί, οπότε αναγκαστικά προσφεύγουμε σε μεγαλύτερες ροπές (και σε ισχυρότερες της ανισότητας Markov ανισότητες) για να φράσσουμε από τα πάνω την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα διαπραγματευθούμε διεξοδικά τον υπολογισμό μεγαλύτερων ροπών (ιδιαίτερα της διασποράς) και ισχυρότερων ανισοτήτων για την πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή.

Κεφάλαιο 3

Παραλλαγές των βασικών μεθόδων

3.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Στα δύο πρώτα κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάσαμε δύο βασικές μεθόδους που χαρακτηρίζονται από την απλότητα και τη γενικότητά τους: τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας και τη μέθοδο της γραμμικότητας της μέσης τιμής. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε τις μεθόδους αυτές επιτυγχάνοντας ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα για μια μεγάλη ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αρκετά ικανοποιητικά, ιδιαίτερα αν συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή μη πιθανοτικών μεθόδων. Από την άποψη αυτή, οι δύο αυτές βασικές μέθοδοι αποδείχτηκαν, παρά τη γενικότητά τους, αρκετά ισχυρές.

Ωστόσο, υπάρχουν συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό, τροποποιώντας τις δύο αυτές βασικές μεθόδους, να επιτευχθούν ακόμα πιο ισχυρά αποτελέσματα. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τρεις τέτοιες βασικές παραλλαγές:

- η μέθοδος της διαγραφής
- η μέθοδος των λιγότερων γεγονότων
- η μέθοδος των επαναληπτικών τυχαίων πειραμάτων

Οι παραλλαγές αυτές βασίζονται σε επιμέρους τροποποιήσεις των δύο βασικών μεθόδων και διατηρούν τα ουσιώδη, συνεκτικά χαρακτηριστικά των μεθόδων αυτών. Είναι λιγότερο γενικές από τις βασικές μεθόδους, από την άποψη ότι εφαρμόζονται μόνο σε ορισμένες, χαρακτηριστικές περιπτώσεις ενώ, από την άλλη, είναι συχνά περισσότερο ισχυρές, αφού, στις περιπτώσεις όπου εφαρμόζονται, επιτυγχάνουν βελτιωμένα σε σχέση με τις βασικές μεθόδους αποτελέσματα.

3.2 Η μέθοδος της διαγραφής

Η μέθοδος της διαγραφής μάλλον αποτελεί την περισσότερο γενική από τις τρεις παραλλαγές των βασικών μεθόδων που παρουσιάζουμε στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου. Σε γενικές γραμμές, στηρίζεται στο γεγονός ότι η χρησιμοποίηση της μεθόδου της θετικής πιθανότητας ή της μεθόδου της γραμμικότητας της μέσης τιμής σημειώνει, σε πολλές περιπτώσεις, μερική μόνο επιτυχία, αποδεικνύοντας την ύπαρξη μίας τουλάχιστον δομής η οποία, αν και δεν πληρεί ήδη την επιθυμητή ιδιότητα, έχει ωστόσο ποσοτικά χαρακτηριστικά που είναι αρκετά κοντά στην ιδιότητα αυτή.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα όπου, ενώ θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη ενός διχρωματισμού του πλήρους γράφου χωρίς κανένα μονοχρωματικό πλήρη υπογράφο ορισμένου μεγέθους, επιτυγχάνουμε, χρησιμοποιώντας τις δύο βασικές μεθόδους, να δείξουμε μόνο ότι υπάρχει ένας διχρωματισμός όπου ο αριθμός των μονοχρωματικών πλήρων υπογράφων δεν ξεπερνά έναν ορισμένο αριθμό, δηλαδή είναι αρκετά μικρός.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα των οποίων θα θεωρούνταν (στα πλαίσια των δύο βασικών μεθόδων) αποτυχία της επιχειρούμενης απόδειξης ύπαρξης, η μέθοδος της διαγραφής αξιοποιεί το γεγονός ότι τα ποσοτικά χαρακτηριστικά της δομής είναι αρκετά καλά (αν και όχι τα επιθυμητά) και πραγματοποιεί διαγραφές σε κατάλληλα τμήματα της δομής, τροποποιώντας την (π.χ. διαγράφοντας σημεία στους ανεπιθύμητους πλήρεις μονοχρωματικούς υπογράφους) και τελικά κατασκευάζει μια δομή που ικανοποιεί πλήρως την υπό απόδειξη ιδιότητα (π.χ. δεν περιέχει κανένα μονοχρωματικό πλήρη υπογράφο ορισμένου μεγέθους).

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις επιτυχούς εφαρμογής της μεθόδου της διαγραφής: τον υπολογισμό καλύτερων κάτω φραγμάτων για αριθμούς Ramsey και την απόδειξη ύπαρξης ενός αρκετά μεγάλου συνόλου ανεξαρτησίας (independent set) σε έναν γράφο με μικρό αριθμό ακμών.

3.3 Βελτιωμένα κάτω φράγματα για αριθμούς Ramsey

Στην παράγραφο 1.5 του πρώτου κεφαλαίου αποδείξαμε, χρησιμοποιώντας τη βασική μέθοδο της θετικής πιθανότητας, το ακόλουθο κάτω φράγμα για διαγώνιους αριθμούς Ramsey τάξης k:

$$R(k,k) > \frac{k}{e\sqrt{2}}\, 2^{\frac{k}{2}}$$

Στην ενότητα αυτή θα επιτύχουμε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαγραφής, ένα ελαφρά μεγαλύτερο (συγκεκριμένα $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερο) κάτω φράγμα, επιτυγχάνοντας έτσι μια μικρή (κατά έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα) ισχυροποίηση του φράγματος αυτού.

Θεώρημα 16. Για τους διαγώνιους αριθμούς Ramsey και για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n είναι

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Απόδειξη: Δημιουργούμε έναν κατάλληλο πιθανοτικό δειγματοχώρο χρωματίζοντας τις ακμές του K_n τυχαία με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε), με ίση πιθανότητα (και ίση με $1/2$) για κάθε χρώμα και υποθέτοντας στοχαστική ανεξαρτησία για το χρωματισμό διαφορετικών ακμών. Ο πιθανοτικός δειγματοχώρος που προκύπτει έχει σαν στοιχεία τυχαίους διχρωματισμούς (random 2-colorings) του πλήρους γράφου K_n. Εστω S οποιοδήποτε συγκεκριμένο (fixed) σύνολο k κορυφών και M_S το γεγονός "το S είναι μονοχρωματικό", δηλαδή όλες οι $\binom{k}{2}$ ακμές του S έχουν το ίδιο χρώμα, κόκκινο ή μπλε, και έστω X_S η αντίστοιχη δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή, με τιμές 1 (αντίστοιχα, 0) ανάλογα με το αν το γεγονός M_S ικανοποιείται (ή όχι). Προφανώς:

$$E(X_S) = \Pr\{M_S\} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή $X = \sum_S X_S$, η οποία απαριθμεί το πλήθος των μονοχρωματικών υποσυνόλων S. Η μέση τιμή της X είναι (από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής)

$$E(X) = \sum_{S,|S|=k} E(X_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο δειγματοχώρο όπου η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση με τη μέση της τιμή, δηλαδή

$$X \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

υπάρχει αντίστοιχα ένας τουλάχιστον τυχαίος διχρωματισμός με το πολύ

$$m = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

μονοχρωματικά υποσύνολα μεγέθους k. Εστω ένας συγκεκριμένος τέτοιος διχρωματισμός. Διαγράφοντας μία κορυφή από κάθε ένα από τα μονοχρωματικά αυτά υποσύνολα (που είναι το πολύ m), προκύπτει ένας γράφος με τουλάχιστον $n - m$ κορυφές και χωρίς κανένα μονοχρωματικό υποσύνολο μεγέθους k, οπότε

$$R(k, k) > n - m = n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

(Στην πραγματικότητα, ο αριθμός m είναι ο μέγιστος αναγκαίος, από την άποψη ότι ενδέχεται να υπάρχουν επικαλύψεις των μονοχρωματικών υποσυνόλων, οπότε διαγράφοντας κοινές κορυφές τέτοιων επικαλυπτόμενων υποσυνόλων, ενδεχομένως αρκούν λιγότερες διαγραφές για να "αποσυνθέσουν" όλα τα μονοχρωματικά υποσύνολα). □

Για την ασυμπτωτική ανάλυση, και για να βελτιστοποιήσουμε το κάτω φράγμα που μόλις αποδείξαμε, θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη δυνατή τιμή του δεύτερου μέλους της αποδειχθείσας ανισότητας. Αυτή η μέγιστη τιμή προκύπτει προφανώς όταν

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \ll n \Leftrightarrow n^{k-1} \ll k!\, 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$. Επίσης, με την προσέγγιση Stirling για το παραγοντικό, αρκεί

$$n^{k-1} \ll \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

και, παίρνοντας ρίζες τάξης $k-1$ και στα δύο μέλη, αρκεί τελικά

$$n < \frac{k}{e} 2^{\frac{k}{2}} (1 + o(1))$$

Για τέτοια n, ο αριθμός των κορυφών που διαγράφονται είναι ασυμπτωτικά ασήμαντος σε σχέση με το n, οπότε τελικά προκύπτει το ακόλουθο κάτω φράγμα

Θεώρημα 17. Οι διαγώνιοι αριθμοί Ramsey τάξης k φράσσονται από τα κάτω σύμφωνα με την ανισότητα

$$R(k,k) > n \sim \frac{k}{e} 2^{\frac{k}{2}}$$

□

Στο πέμπτο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας μια ισχυρότερη μέθοδο (το Θεώρημα Τοπικότητας), θα αποδείξουμε ένα ακόμα καλύτερο (μεγαλύτερο κατά έναν $\sqrt{2}$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα) κάτω φράγμα για διαγώνιους αριθμούς Ramsey.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με τη γενίκευση της εφαρμογής της μεθόδου της διαγραφής στην περίπτωση μη διαγώνιων αριθμών Ramsey $R(k,l), k \neq l$.

Θεώρημα 18. Για οποιονδήποτε ακέραιο n και οποιοδήποτε $p \in [0,1]$ είναι

$$R(k,l) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Απόδειξη: Διχρωματίζουμε τον πλήρη γράφο n κορυφών με δύο χρώματα, όπου κάθε ακμή χρωματίζεται κόκκινη (μπλε) ισοπίθανα και με πιθανότητα p (αντίστοιχα $1-p$) και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των κόκκινων πλήρων υπογράφων μεγέθους k συν τον αριθμό των μπλε πλήρων υπογράφων μεγέθους l, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα αντίστοιχα με αυτά του προηγούμενου θεωρήματος, αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της X είναι

$$E(X) = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένας χρωματισμός του πλήρους γράφου με το πολύ

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

μονοχρωματικούς πλήρεις υπογράφους χρώματος κόκκινου (ή μπλε) και μεγέθους k (ή l). Θεωρώντας έναν συγκεκριμένο τέτοιο χρωματισμό και διαγράφοντας μία (το πολύ) κορυφή από κάθε μονοχρωματικό πλήρη υπογράφο, προκύπτει ένας γράφος με τουλάχιστον

$$n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

κορυφές και κανέναν μονοχρωματικό πλήρη υπογράφο μεγέθους k (ή l), οπότε (από τον ορισμό των μη διαγώνιων αριθμών Ramsey) είναι

$$R(k,l) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

□

Το σύνολο των φραγμάτων για διαγώνιους και μη αριθμούς Ramsey περιγράφονται αναλυτικά από τον J. Spencer στο [62].

3.4 Κάτω φράγματα για σύνολα ανεξαρτησίας

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ένα κάτω φράγμα για το μέγεθος των συνόλων ανεξαρτησίας ενός γράφου.

Ορισμός 10. Ενα σύνολο κορυφών αποτελεί σύνολο ανεξαρτησίας (independent set) σε ένα γράφο, όταν δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ των κορυφών του. □

Το 1941, ο Turan απέδειξε ένα απλό και ισχυρό κάτω φράγμα για το μέγεθος των συνόλων ανεξαρτησίας ενός γράφου, που συνδέεται με τους αριθμούς κορυφών και ακμών του γράφου (βλ. [66]).

Θεώρημα 19 (Turan)**.** Εάν ένας γράφος έχει n κορυφές και $\frac{nk}{2}$ ακμές, τότε περιέχει ένα σύνολο ανεξαρτησίας με μέγεθος $\frac{n}{k+1}$ τουλάχιστον. □

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι αρκετά δύσκολη και χρησιμοποιεί στοιχεία της οριακής θεωρίας γράφων (extremal graph theory). Παρόλα αυτά είναι δυνατό, χρησιμοποιώντας την πιθανοτική μέθοδο της διαγραφής, να αποδείξουμε ένα αρκετά ικανοποιητικό (αν πάρουμε υπόψη την απλότητα και συντομία της απόδειξης) κάτω φράγμα, που είναι περίπου ίσο με το μισό του αντίστοιχου φράγματος του Turan.

Θεώρημα 20. Αν ένας γράφος έχει n κορυφές και $\frac{nk}{2}$ ακμές, περιέχει ένα σύνολο ανεξαρτησίας με μέγεθος $\frac{n}{2k}$ τουλάχιστον.

Απόδειξη: Για κάθε κορυφή του γράφου, αποφασίζουμε ισοπίθανα (και με πιθανότητα p) και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες κορυφές, το αν η κορυφή θα συμμετέχει σε ένα (υπό διαμόρφωση σύνολο ανεξαρτησίας) σύνολο S. Εστω X το μέγεθος του S και Y ο αριθμός των ακμών μεταξύ κορυφών του S. Η μεταβλητή X είναι κατανεμημένη διωνυμικά με παραμέτρους n και p, οπότε η μέση της τιμή είναι

$$E(X) = np$$

Από την άλλη, αν ορίσουμε για κάθε ακμή e του γράφου μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή Y_e με τιμή 1 (ή 0), ανάλογα με το αν η ακμή αυτή συνδέει (ή δε συνδέει, αντίστοιχα) κορυφές του S, είναι φανερό ότι

$$E(Y_e) = p^2$$

αφού για να είναι $e \in S$, πρέπει και οι 2 κορυφές της e να είναι στο S (η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $p^2 = p\,p$). Η τυχαία μεταβλητή $Y = \sum_e Y_e$ μετράει τον αριθμό των ακμών μεταξύ κορυφών του S και έχει μέση τιμή

$$E(Y) = E\left(\sum_e Y_e\right) = \sum_e E(Y_e) = \frac{nk}{2}p^2$$

Το γεγονός ότι σε ένα σύνολο ανεξαρτησίας η διαφορά κορυφών και ακμών είναι η μέγιστη δυνατή (και ίση με τον αριθμό των κορυφών), μας οδηγεί διαισθητικά στο να εξετάσουμε την κατά μέση τιμή διαφορά κορυφών και ακμών στο σύνολο S. Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, η μέση τιμή αυτής της διαφοράς είναι

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = np - \frac{nk}{2}p^2$$

Η τιμή $p = \frac{1}{k}$ μεγιστοποιεί τη μέση τιμή, η οποία γίνεται

$$E(X - Y) = \frac{n}{2k}$$

Αλλά υπάρχει ένα σημείο στο δειγματοχώρο, όπου η τυχαία μεταβλητή $X - Y$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη μέση της τιμή, οπότε αντίστοιχα υπάρχει ένα τουλάχιστον σύνολο S όπου ο αριθμός των κορυφών ξεπερνά τον αριθμό των ακμών κατά $\frac{n}{2k}$ τουλάχιστον. Σε αυτό το σύνολο διαγράφουμε μία από τις δύο κορυφές κάθε ακμής, οπότε μένουν τουλάχιστον $\frac{n}{2k}$ κορυφές και καθόλου ακμές και επομένως προκύπτει ένα σύνολο ανεξαρτησίας με μέγεθος τουλάχιστον $\frac{n}{2k}$.
□

3.5 Η μέθοδος των λιγότερων γεγονότων

Η βασική μέθοδος της θετικής πιθανότητας στηρίζεται στην απόδειξη ότι η πιθανότητα μη ικανοποίησης μιας επιθυμητής ιδιότητας είναι αυστηρά μικρότερη από τη μονάδα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η μη ικανοποίηση της ιδιότητας συνίσταται στην πραγματοποίηση της ένωσης ενός συνόλου γεγονότων και η αντίστοιχη πιθανότητα φράσσεται εκ των άνω από το γινόμενο του αριθμού αυτών των γεγονότων επί την πιθανότητα πραγματοποίησης κάθε ενός από αυτά.

Επομένως, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των γεγονότων των οποίων η ένωση συνεπάγεται τη μη πραγματοποίηση της ιδιότητας, τόσο μικρότερη είναι η αναγκαία για την απόδειξη πιθανότητα ικανοποίησης κάθε γεγονότος. Αλλά η μικρή αυτή πιθανότητα αφορά σε μεγάλες αποκλίσεις από τη μέση συμπεριφορά οι οποίες, σε πολλές περιπτώσεις, οδηγούν σε ανεπιθύμητα ποσοτικά χαρακτηριστικά (π.χ. μη ικανοποιητικά φράγματα) για την ικανοποίηση της ιδιότητας.

Επιθυμούμε λοιπόν συχνά, και σε αυτό ακριβώς συνίσταται η μέθοδος των λιγότερων γεγονότων, να περιορίσουμε τον αριθμό των επιμέρους γεγονότων που "συναποτελούν" την άρνηση της υπό απόδειξη ιδιότητας, έτσι ώστε η αναγκαία πιθανότητα πραγματοποίησης κάθε ενός επιμέρους γεγονότος να είναι μεγαλύτερη και να μη συνεπάγεται τις ανεπιθύμητες μεγάλες αποκλίσεις αλλά, αντίθετα, να επιτρέπει ισχυρότερη συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή.

Η εφαρμογή της μεθόδου των λιγότερων γεγονότων σε τουρνουά με διατάξεις για την επίτευξη σημαντικά καλύτερων φραγμάτων είναι χαρακτηριστική της δύναμης της μεθόδου και περιγράφεται στην ενότητα που ακολουθεί.

3.6 Προβλεψιμότητα τουρνουά: ισχυρότερα αποτελέσματα

Στην παράγραφο 1.7 του πρώτου κεφαλαίου μελετήσαμε τουρνουά T στα οποία υπάρχει μια διάταξη σ των διαγωνιζόμενων ομάδων και ορίσαμε σαν "αναμενόμενο" το αποτέλεσμα ενός αγώνα όταν αυτό συμφωνεί με τη διάταξη αυτή, όταν δηλαδή κερδίζει η ομάδα με μικρότερο αριθμό στη διάταξη, δηλαδή (και για παράδειγμα) με υψηλότερη θέση στην περυσινή βαθμολογία και σαν "έκπληξη", το αποτέλεσμα ενός αγώνα όπου ισχύει το αντίθετο. Αν

$$fit(T,\sigma) = \#\,[\text{αναμενόμενων αποτελεσμάτων}] - \#\,[\text{εκπλήξεων}]$$

(οπότε η συνάρτηση $fit(T,\sigma)$ μετράει τη συμφωνία των αποτελεσμάτων του τουρνουά T με τη διάταξη σ), αποδείξαμε ότι

$$\exists\, T, \forall \sigma :\ fit(T,\sigma) < n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln n}$$

με άλλα λόγια δείξαμε ότι υπάρχει ένα εξαιρετικά "μη προβλέψιμο" τουρνουά με ιδιαίτερα χαμηλή "εσωτερική συνέπεια".

Στα πλαίσια της ενότητας αυτής, παρουσιάζουμε ένα σημαντικά βελτιωμένο αποτέλεσμα, από την άποψη ότι όχι μόνο αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα τουρνουά T με σημαντικά χαμηλότερη (κατά έναν $\sqrt{\ln n}$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα) εσωτερική συνέπεια, αλλά επίσης αποδεικνύουμε ότι αυτή η μικρή εσωτερική συνέπεια χαρακτηρίζει όλα τα τουρνουά T σχεδόν βέβαια, δηλαδή με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο. Η σημαντική αυτή βελτίωση περιγράφεται τεχνικά στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 21. Για οποιοδήποτε τουρνουά T_n είναι

$$fit(T,\sigma) < 3.5\, n^{\frac{3}{2}}$$

για όλες τις διατάξεις σ σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη: Για δύο οποιαδήποτε ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B ομάδων του τουρνουά, έστω

$$G(A,B) = \#\,[\text{αναμενόμενων αποτελεσμάτων}] - \#\,[\text{εκπλήξεων}]$$

όπου το αποτέλεσμα ενός αγώνα μεταξύ μιας ομάδας του A και μιας ομάδας του B θεωρείται αναμενόμενο όταν νικήτρια είναι η ομάδα του A και έκπληξη στην αντίθετη περίπτωση. Ο ορισμός αυτός υπαινίσσεται ότι οι ομάδες του A έχουν καλύτερη βαθμολογική σειρά από τις ομάδες του B και η χρησιμότητά του συνίσταται στο ότι ανάγει την εξέταση όλων των δυνατών διατάξεων στην εξέταση όλων των δυνατών τρόπων να επιλέγονται τέτοια σύνολα A και B. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας και για να διευκολύνουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ότι $n = 2^t$. Τα αρχικά σύνολα A και B είναι τα

$$A_1 = \left\{i : 1 \leq \sigma(i) \leq \frac{n}{2}\right\} \text{ και } A_2 = \left\{i : \frac{n}{2} < \sigma(i) \leq n\right\}$$

για μια συγκεκριμένη διάταξη σ. Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε διάταξη, υπάρχει μικρή συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ των ομάδων των A_1, A_2 με τη διάταξη σ σχεδόν βέβαια. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1. Εστω το γεγονός

$$S_1 = \forall\sigma,\, G(A_1, A_2) < \alpha\sqrt{\frac{n^2}{4}}$$

όπου $\alpha = \sqrt{n}\,\sqrt{2\ln 2}\,(1+\epsilon)$ και $\epsilon > 0$ μια οσοδήποτε μικρή ανεξάρτητη του n θετική σταθερά. Είναι

$$\Pr\{S_1\} \to 1 \text{ όταν } n \to \infty$$

Απόδειξη: Η τυχαία μεταβλητή $G(A_1, A_2)$ ακολουθεί την κατανομή S_m, για $m = |A_1|\,|A_2| = \frac{n^2}{4}$. Επομένως,

$$\Pr\left\{G(A_1, A_2) > \alpha\sqrt{\frac{n^2}{4}}\right\} = \Pr\left\{S_m > \alpha\sqrt{m}\right\} < e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = 2^{-n(1+\epsilon)^2}$$

από το θεώρημα μεγάλων αποκλίσεων για την κατανομή S_m (βλέπε ενότητα 1.7, Θεώρημα 4). Υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ και πάντως το πολύ 2^n δυνατοί τρόποι να επιλεγούν τα δύο σύνολα A_1, A_2. Επομένως, η πιθανότητα να υπάρχει ένα τουλάχιστον ζευγάρι όπου η συνάρτηση $G(A_1, A_2)$ παίρνει τέτοιες μεγάλες τιμές, είναι

$$\Pr\{\overline{S_1}\} \leq \sum_{A_1, A_2} \Pr\left\{G(A_1, A_2) > \alpha\sqrt{\frac{n^2}{4}}\right\} \leq 2^n e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \leq 2^n\, 2^{-n(1+\epsilon)^2} \to 0$$

□

Παρατηρούμε ότι η εξέταση όλων των δυνατών τρόπων να επιλέγονται τα δύο σύνολα (ακριβέστερα, να τοποθετούνται ομάδες σε αυτά), αν και ισοδυναμεί (εφαρμοζόμενη αναδρομικά, όπως θα δούμε στη συνέχεια) με την εξέταση όλων των δυνατών διατάξεων των ομάδων, πλεονεκτεί σημαντικά αφού ο αριθμός όλων των δυνατών συνόλων (το πολύ 2^n) είναι σημαντικά μικρότερος από τον αριθμό όλων των δυνατών διατάξεων ($n!$). Ο μικρότερος (σε σχέση με τις διατάξεις) αριθμός συνόλων συνεπάγεται μεγαλύτερη (αναγκαία για την απόδειξη) πιθανότητα μεγάλης εσωτερικής συνέπειας, γεγονός που επιτρέπει μικρότερες τιμές απόκλισης από τη μέση τιμή της κατανομής S_m που μετράει την εσωτερική συνέπεια, δηλαδή μικρότερα α, και σε αυτά ακριβώς τα μικρότερα α στηρίζεται ουσιαστικά η επίτευξη μικρότερου φράγματος.

Με το παραπάνω λήμμα επιτύχαμε να αποδείξουμε ότι για τα αποτελέσματα των αγώνων μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μισού της βαθμολογικής σειράς των ομάδων υπάρχει σημαντική ασυνέπεια και ότι αυτό ισχύει για το οποιοδήποτε τουρνουά και για όλες τις δυνατές διατάξεις των ομάδων. Προκειμένου να εξετάσουμε όλους τους αγώνες, εφαρμόζουμε την υποδιαίρεση σε δύο σύνολα σε κάθε ένα από τα δύο μισά του αρχικού συνόλου και αυτό γίνεται αναδρομικά, για έναν λογαριθμικό αριθμό επαναλήψεων. Για την καλύτερη κατανόηση της γενικής περίπτωσης, περιγράφουμε και τη δεύτερη υποδιαίρεση, όπου τα δύο μισά σύνολα ανάγονται σε τέσσερα τέταρτα του αρχικού συνόλου.

Εστω η υποδιαίρεση του συνόλου σε τέσσερα ισομεγέθη σύνολα

$$A_j = \left\{ i : (j-1)\,\frac{n}{4} < \sigma(i) \leq j\,\frac{n}{4} \right\} \text{ για } 1 \leq j \leq 4$$

και έστω το γεγονός

$$S_2 = \forall \sigma,\, G(A_1, A_2) + G(A_3, A_4) < \alpha \sqrt{\frac{n^2}{8}}$$

όπου $\alpha = \sqrt{n}\,\sqrt{2 \ln 4}\,(1+\epsilon)$ και $\epsilon > 0$ μια οσοδήποτε μικρή θετική σταθερά. Είναι

$$\Pr\{S_2\} \to 1 \text{ όταν } n \to \infty$$

Η απόδειξη είναι παραπλήσια με την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος: η τυχαία μεταβλητή $G(A_1, A_2) + G(A_3, A_4)$ ακολουθεί την κατανομή S_m, για $m = |A_1|\,|A_2| + |A_3|\,|A_4| = \frac{n^2}{8}$. Επομένως,

$$\Pr\left\{ G(A_1, A_2) + G(A_3, A_4) > \alpha \sqrt{\frac{n^2}{8}} \right\} =$$
$$= \Pr\left\{ S_m > \alpha \sqrt{m} \right\} < e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \ll 4^{-n}$$

για τη συγκεκριμένη τιμή του α. Επειδή υπάρχουν το πολύ 4^n δυνατοί τρόποι να επιλεγούν τα τέσσερα σύνολα, η πιθανότητα να υπάρχει μία τουλάχιστον τετράδα τέτοιων συνόλων όπου η συνάρτηση $G(A_1, A_2) + G(A_3, A_4)$ παίρνει μεγάλες τιμές, είναι

$$\Pr\{\overline{S_2}\} \leq \sum_{A_i, 1 \leq i \leq 4} \Pr\left\{ G(A_1, A_2) + G(A_3, A_4) > \alpha \sqrt{\frac{n^2}{8}} \right\} \ll 4^n\, 4^{-n} = 1$$

Γενικεύοντας, έστω για $1 \leq s \leq t$ η υποδιαίρεση του αρχικού συνόλου σε 2^s υποσύνολα μεγέθους $\frac{n}{2^s}$ το καθένα, τα οποία, για κάθε συγκεκριμένη διάταξη, ορίζονται ως εξής

$$A_j = \left\{ i : (j-1)\,\frac{n}{2^s} < \sigma(i) \leq j\,\frac{n}{2^s} \right\} \text{ για } 1 \leq j \leq 2^s$$

Εστω η τυχαία μεταβλητή $G^{(s)}$, που αθροίζει το μέγεθος της συνέπειας των ζευγαριών διαδοχικών συνόλων. Είναι

$$G^{(s)} = \sum_{j=1}^{2^{s-1}} G(A_{2j-1}, A_{2j})$$

Προφανώς η $G^{(s)}$ ακολουθεί την κατανομή S_m, για $m = 2^{s-1}\left(\frac{n}{2^s}\right)^2 = \frac{n^2}{2^{s+1}}$. Επειδή υπάρχουν το πολύ $(2^s)^n$ δυνατοί τρόποι να επιλεγούν τα 2^s υποσύνολα, αν

$$S_s = \forall\sigma, G^{(s)} \leq \alpha\sqrt{m}$$

όπου $\alpha = \sqrt{n}\,\sqrt{2\ln 2^s}\,(1+\epsilon)$ και $\epsilon > 0$ μια οσοδήποτε μικρή θετική σταθερά. Είναι

$$\Pr\{\overline{S_s}\} \leq 2^{sn}e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = 2^{-sn\epsilon(\epsilon+2)} \to 0$$

Η συνολική πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων, που φράσσεται από τα πάνω από το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων, είναι (επειδή $t = \log_2 n$)

$$\Pr\left(\cup_{s=1}^{t}\overline{S_s}\right) \leq \sum_{s=1}^{t}\Pr\{\overline{S_s}\} \leq \sum_{s=1}^{t}2^{-sn\epsilon(\epsilon+2)} \leq \frac{\log_2 n}{2^{n\epsilon(\epsilon+2)}} \to 0$$

Επομένως, με πιθανότητα που τείνει στο 1, το οποιοδήποτε τουρνουά ικανοποιεί, για όλες τις διατάξεις, όλα τα διαδοχικά γεγονότα S_s. Επομένως, για οποιαδήποτε T, σ είναι (σχεδόν βέβαια)

$$\begin{aligned} fit(T,\sigma) &= \sum_{s=1}^{t}G^{(s)} \leq \sum_{s=1}^{t}\sqrt{\frac{n^2}{2^{s+1}}}\,\sqrt{n}\,\sqrt{2\ln 2^s}\,(1+\epsilon) \\ &= n^{\frac{3}{2}}(1+\epsilon)\sum_{s=1}^{t}\frac{\sqrt{2\ln 2^s}}{\sqrt{2^{s+1}}} < 3.5\,n^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

αφού το άθροισμα συγκλίνει στην τιμή 3.5. □

Το αποτέλεσμα που παρουσιάστηκε σε αυτήν την ενότητα οφείλεται στον De La Vega ([67]).

3.7 Η μέθοδος των επαναληπτικών τυχαίων πειραμάτων

Οπως είδαμε στα δύο πρώτα κεφάλαια του βιβλίου, η (μη κατασκευαστική) πιθανοτική απόδειξη της ύπαρξης δομών που πληρούν επιθυμητές ιδιότητες, συνίσταται στην απόδειξη ότι η πιθανότητα κάποιου γεγονότος ή η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής έχουν ορισμένα επιθυμητά ποσοτικά χαρακτηριστικά. Ενδεικτική από αυτήν την άποψη είναι η περίπτωση όπου επιθυμούμε να δείξουμε ότι η πιθανότητα ύπαρξης μονοχρωματικών υποσυνόλων σε ένα τυχαία διχρωματισμένο σύνολο και η μέση τιμή του αριθμού αυτών των μονοχρωματικών υποσυνόλων είναι μικρές.

Οι βασικές μέθοδοι δημιουργούν τις προϋποθέσεις για τον υπολογισμό πιθανοτήτων και μέσων τιμών τυχαίων μεταβλητών, χρησιμοποιώντας τυχαία πειράματα για να κατασκευάζουν κατάλληλους πιθανοτικούς δειγματοχώρους, τα σημεία των οποίων αντιστοιχούν στις υπό εξέταση δομές.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εκτέλεση αυτών των τυχαίων πειραμάτων δεν οδηγεί σε πιθανότητες και μέσες τιμές με ικανοποιητικά ποσοτικά χαρακτηριστικά (π.χ. η μέση τιμή του αριθμού των μονοχρωματικών υποσυνόλων δεν είναι ικανοποιητικά μικρή).

Σε τέτοιες περιπτώσεις, συχνά ενδείκνυται η τροποποίηση του αρχικά κατασκευασμένου δειγματοχώρου εκτελώντας ένα επιπλέον τυχαίο πείραμα (με κατάλληλα επιλεγμένη πιθανότητα) σε τμήματα των δομών που είναι ανεπιθύμητα σε σχέση με την υπό απόδειξη ιδιότητα (π.χ. στα μονοχρωματικά υποσύνολα) με σκοπό την ελαχιστοποίηση του αριθμού αυτών των τμημάτων και την επίτευξη καλύτερων (στη συγκεκριμένη περίπτωση μικρότερων) πιθανοτήτων γεγονότων ή μέσων τιμών τυχαίων μεταβλητών.

Στις περισσότερες περιπτώσεις η τεχνική ανάλυση είναι αρκετά δύσκολη, αφού το επαναληπτικό τυχαίο πείραμα στα ανεπιθύμητα τμήματα και οι ενδεχόμενες τροποποιήσεις τους δεν επηρεάζουν μόνο τα τμήματα αυτά, αλλά και άλλα τμήματα που έχουν κοινά σημεία με τα τροποποιούμενα ανεπιθύμητα τμήματα (π.χ. η αλλαγή χρωμάτων σε ορισμένα σημεία ενός ανεπιθύμητου μονοχρωματικού υποσυνόλου και η επιθυμητή άρση της μονοχρωματικότητάς του, είναι δυνατό να καταστήσει μονοχρωματικά άλλα υποσύνολα που δεν ήταν τέτοια στον αρχικό δειγματοχώρο και αυτή η δυνατότητα εδράζεται ακριβώς στην ύπαρξη κοινών σημείων με το υποσύνολο του οποίου η μονοχρωματικότητα αίρεται). Ο υπολογισμός αυτών ακριβώς των αλληλεπιδράσεων περιλαμβάνει στις περισσότερες περιπτώσεις αρκετά σύνθετους τεχνικούς υπολογισμούς.

Ακολουθεί μια εφαρμογή της μεθόδου αυτής για την επίτευξη ενός σημαντικά ισχυρότερου φράγματος για την ιδιότητα B.

3.8 Καλύτερα φράγματα για την ιδιότητα B

Χαρακτηριστική περίπτωση επιτυχημένης εφαρμογής της μεθόδου των επαναληπτικών τυχαίων πειραμάτων είναι ο υπολογισμός ενός σημαντικά καλύτερου κάτω φράγματος για την ιδιότητα B, που οφείλεται στον Beck ([9]).

Σύμφωνα με τον ορισμό που περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 1.9, μια οικογένεια υποσυνόλων F ενός συνόλου Ω ικανοποιεί την ιδιότητα B, αν υπάρχει διχρωματισμός του συνόλου Ω χωρίς κανένα μονοχρωματικό υποσύνολο στην F. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου η F αποτελείται από $m = m(n)$ υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό n, αποδείξαμε ένα κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $m(n)$ έτσι ώστε να μην πληρείται η ιδιότητα B. Πιο συγκεκριμένα, αποδείχτηκε ότι $m(n) > 2^{n-1} - 1$, επειδή αν $m < 2^{n-1}$ τότε υπάρχει ένας διχρωματισμός, όπου κανένα από οποιαδήποτε m υποσύνολα δεν είναι μονοχρωματικό. Η απόδειξη χρησιμοποιεί τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας, αφού αποδεικνύεται ότι για $m < 2^{n-1}$, η πιθανότητα ύπαρξης τουλάχιστον ενός μονοχρωματικού υποσυνόλου είναι αυστηρά μικρότερη από τη μονάδα, επομένως η πιθανότητα μη ύπαρξης μονοχρωματικών υποσυνόλων είναι θετική και επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας διχρωματισμός χωρίς κανένα μονοχρωματικό υποσύνολο, οπότε εξακολουθεί να ικανοποιείται η ιδιότητα B.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των επαναληπτικών τυχαίων πειραμάτων θα αποδείξουμε ότι το φράγμα $m(n) > 2^{n-1} - 1$ μπορεί να βελτιωθεί σε $m(n) > 2^{n-1}k - 1$, όπου $k < n^{\frac{1}{3} - o(1)}$. Το αρχικό τυχαίο πείραμα συνίσταται σε έναν πρώτο χρωματισμό που γίνεται με πιθανότητα $p = \frac{1}{2}$ για κάθε χρώμα, ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τα διάφορα σημεία και οδηγεί σε k μονοχρωματικά υποσύνολα κατά μέση τιμή. Ο αριθμός αυτός είναι ανεπιθύμητα μεγάλος, αφού συνεπάγεται την ύπαρξη τουλάχιστον ενός διχρωματισμού με τουλάχιστον k (δηλαδή περισσότερα του ενός) μονοχρωματικά υποσύνολα.

Για να επιτύχουμε την αποσύνθεση αυτών των ανεπιθύμητων μονοχρωματικών υποσυνόλων, πραγματοποιούμε ένα δεύτερο τυχαίο πείραμα, όπου αλλάζουμε το χρώμα των υποσυνόλων αυτών με μια κατάλληλη πιθανότητα έτσι ώστε ο αριθμός τους στον τροποποιημένο δειγματοχώρο να μειωθεί σε $k^{-\epsilon}$ (δηλαδή να γίνει ασυμπτωτικά ασήμαντος) και η πιθανότητα εμφάνισης άλλων μονοχρωματικών υποσυνόλων (λόγω της αλλαγής του χρώματος ορισμένων σημείων) να τείνει στο μηδέν.

Αυτός ο επιτυχής επαναληπτικός χρωματισμός θεμελιώνεται τεχνικά μέσα από την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 22. Υπάρχει ένας τουλάχιστον διχρωματισμός του συνόλου Ω τέτοιος ώστε οποιαδήποτε $m = 2^{n-1}k$ υποσύνολα μεγέθους n να μην περιλαμβάνουν κανένα μονοχρωματικό, εάν

$$k < n^{\frac{1}{3}-o(1)}$$

Απόδειξη: Κατά το πρώτο τυχαίο πείραμα χρωματίζουμε τα σημεία του Ω με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ για κάθε χρώμα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τα διάφορα σημεία. Εστω X μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των μονοχρωματικών υποσυνόλων μεγέθους n μετά τον πρώτο αυτό διχρωματισμό. Επειδή η τιμή της δεικνύουσας τυχαίας μεταβλητής για τον μονοχρωματισμό οποιουδήποτε συνόλου S είναι $E(X_S) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{1-n}$, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$E(X) = \sum_{S \in F} E(X_S) = m\, 2^{1-n} = 2^{n-1}k\, 2^{1-n} = k$$

Για να μειώσουμε τον αριθμό των ανεπιθύμητα πολλών μονοχρωματικών υποσυνόλων, πραγματοποιούμε ένα δεύτερο τυχαίο πείραμα κατά το οποίο αλλάζουμε το χρώμα των σημείων αυτών των μονοχρωματικών υποσυνόλων με πιθανότητα

$$p = \frac{\ln k}{n}(1+\epsilon)$$

για κάθε τέτοιο σημείο και στοχαστικά ανεξάρτητα για τα διάφορα σημεία, όπου $\epsilon > 0$ μια οσοδήποτε μικρή σταθερά.

Η πιθανότητα ένα τέτοιο σύνολο να παραμείνει μονοχρωματικό μετά τον επαναληπτικό αυτό χρωματισμό είναι

$$(1-p)^n + p^n \sim e^{-pn} \sim k^{-1-\epsilon}$$

αφού απαιτείται είτε κανένα σημείο να μην αλλάξει χρώμα είτε όλα τα σημεία να αλλάξουν χρώμα. Επειδή υπάρχουν κατά μέση τιμή k μονοχρωματικά σύνολα πριν από το δεύτερο χρωματισμό, ο αναμενόμενος αριθμός τέτοιων συνόλων που παραμένουν μονοχρωματικά μετά και το δεύτερο χρωματισμό είναι, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής,

$$k\, k^{1-\epsilon} = k^{-\epsilon} \to 0$$

δηλαδή το επαναληπτικό τυχαίο πείραμα επιτυγχάνει να αποσυνθέσει όλα (κατά μέση τιμή και ασυμπτωτικά) τα αρχικά μονοχρωματικά υποσύνολα σε έναν τουλάχιστο τελικό χρωματισμό.

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα αλλαγής χρώματος είναι αρκετά μικρή ($p < \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n}(1+\epsilon) \to 0$). Το επιθυμητό μέγεθος της πιθανότητας αυτής καθορίζεται από τον εξής διπλό στόχο:

- από τη μία, πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να αλλάζει σε μεγάλο βαθμό τα χρώματα και έτσι να αποσυνθέτει τα υπάρχοντα μονοχρωματικά υποσύνολα.
- από την άλλη, πρέπει να είναι αρκετά μικρή, ώστε να μην αλλάζει δραματικά τον υπάρχοντα χρωματισμό και να μη δημιουργεί μονοχρωματικά υποσύνολα εκεί που δεν υπήρχαν τέτοια.

Θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα p είναι κατάλληλα μικρή για την επίτευξη και του δεύτερου αυτού στόχου. Εστω S ένα σύνολο που ήταν μονοχρωματικό (χωρίς βλάβη της γενικότητας, κόκκινο) μετά τον πρώτο χρωματισμό. Η ενδεχόμενη αλλαγή χρώματος κάποιων σημείων του S επηρεάζει μόνο τα σύνολα εκείνα που έχουν κοινά σημεία με το S. Εστω λοιπόν T ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο τέτοιο ώστε $S \cap T \neq \emptyset$. Εξετάζουμε καταρχήν την περίπτωση όπου $|S \cap T| = 1$. Εστω επίσης A_{ST} το γεγονός "(το T γίνεται μπλε μετά τον δεύτερο χρωματισμό) $\cap$ (μετά τον αρχικό χρωματισμό του $S \cup T$ το S ήταν κόκκινο)". Προφανώς, ο αρχικός κόκκινος μονοχρωματισμός του κοινού σημείου των S, T περιορίζει την πιθανότητα του τελικού μπλε μονοχρωματισμού του T, αφού το σημείο αυτό πρέπει υποχρεωτικά να αλλάξει χρώμα. Επίσης, έστω V το σύνολο των υπόλοιπων $|V| = v$ κόκκινων σημείων του T. Τα σημεία αυτά πρέπει να αλλάξουν χρώμα επίσης. Αλλά κάθε ένα από τα συνολικά $v+1$ κόκκινα σημεία του T αλλάζει χρώμα με πιθανότητα $p\,p' \leq p$, όπου p' η πιθανότητα το σημείο να ανήκει σε ένα μονοχρωματικό κόκκινο σύνολο, αφού μόνο τότε η πιθανότητα αλλαγής χρώματος είναι p (διαφορετικά είναι 0).

Εστω A_{STV} το γεγονός "(τα $v+1$ κόκκινα σημεία του T γίνονται τελικά μπλε) $\cap$ (ο αρχικός χρωματισμός του $S \cup T$ χρωμάτισε το S κόκκινο)". Καθορίζοντας τον ακριβή αριθμό κόκκινων σημείων στο T, η πιθανότητα του δεύτερου γεγονότος της τομής είναι ακριβώς $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = 2^{-(2n-1)}$, αφού τα χρώματα όλων των $2n-1$ σημείων στο $S \cup T$ έχουν προσδιοριστεί. Επίσης, όπως δείξαμε παραπάνω, η πιθανότητα του δεσμευμένου γεγονότος "τα $v+1$ αρχικά κόκκινα σημεία του T γίνονται τελικά μπλε δοθέντος του αρχικού χρωματισμού του $S \cup T$" είναι το πολύ p^{v+1}, οπότε η πιθανότητα της τομής γίνεται

$$\Pr\{A_{STV}\} \leq 2^{-(2n-1)} p^{v+1}$$

και επειδή υπάρχουν ακριβώς $\binom{n-1}{v}$ τρόποι για να επιλεγούν τα υπόλοιπα (εκτός $S \cap T$) v κόκκινα σημεία του T είναι

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_{STV}\} &\leq \sum_V \Pr\{A_{ST}\} \leq \sum_{v=0}^{n-1} \binom{n-1}{v} 2^{-(2n-1)} p^{v+1} \\
&= p\,2^{-(2n-1)} \sum_{v=0}^{n-1} \binom{n-1}{v} p^v \\
&= p\,2^{-(2n-1)} (1+p)^{n-1} \sim p\,2^{-2n} e^{pn} \sim p\,2^{-2n} k^{1+\epsilon}
\end{aligned}$$

και επειδή υπάρχουν το πολύ $m^2 = (2^{n-1}k)^2 \leq 2^{2n}k^2$ τρόποι να επιλεγούν τα δύο σύνολα S, T από όλα τα δυνατά υποσύνολα είναι

$$\Pr\{\cup_{S,T} A_{ST}\} \leq \sum_{S,T} \Pr\{A_{ST}\} \leq 2^{2n} k^2 p\,2^{-2n} k^{1+\epsilon} = p\,k^{3+\epsilon} = \frac{\ln k}{n} k^{3+\epsilon}$$

που τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο για

$$k < n^{\frac{1}{3}-o(1)}$$

Επομένως, για τα συγκεκριμένα k, p η πιθανότητα δημιουργίας μονοχρωματικών υποσυνόλων εκεί που δεν υπήρχαν τείνει στο μηδέν, άρα η πιθανότητα μη δημιουργίας τέτοιων υποσυνόλων τείνει στο ένα και ο οποιοσδήποτε χρωματισμός (αναφερόμαστε στον τελικό χρωματισμό, μετά και το δεύτερο πείραμα) δεν δημιουργεί νέα μονοχρωματικά υποσύνολα.

Η πιθανότητα δημιουργίας νέων μονοχρωματικών υποσυνόλων είναι προφανώς ακόμα μικρότερη όταν η τομή των συνόλων S, T είναι μεγαλύτερη, αφού ακόμα περισσότερα σημεία πρέπει να αλλάξουν χρώμα. (Η πλήρης απόδειξη της ποιοτικής αυτής εκτίμησης αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη).

Συνολικά, αποδείξαμε ότι υπάρχει ένας τελικός χρωματισμός που αποσυνθέτει όλα τα αρχικά μονοχρωματικά υποσύνολα και επειδή οποιοσδήποτε τελικός χρωματισμός δεν δημιουργεί νέα μονοχρωματικά υποσύνολα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον τελικός διχρωματισμός χωρίς κανένα μονοχρωματικό υποσύνολο. □

Κεφάλαιο 4

Η μέθοδος της δεύτερης ροπής

4.1 Ενα ποιοτικό άλμα: η ανισότητα του Chebyshev

Στα τρία πρώτα κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάσαμε διαδοχικά τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας, τη μέθοδο της γραμμικότητας της μέσης τιμής και τρεις παραλλαγές των δύο αυτών βασικών μεθόδων. Κάθε μία από αυτές τις μεθόδους αποδείχτηκε ισχυρότερη από τις προηγούμενες, από την άποψη ότι οδήγησε σε καλύτερα κάθε φορά αποτελέσματα για τις ίδιες υπό εξέταση ιδιότητες.

Η ισχυροποίηση αυτή ήταν σε ορισμένες περιπτώσεις σημαντική, όσον αφορά το μέγεθος της βελτίωσης των αποτελεσμάτων που ήδη υπήρχαν. Ωστόσο, η ποιότητα αυτής της βελτίωσης και η δύναμη των μεθόδων αυτών γενικά, υπόκεινται εγγενώς σε έναν βασικό, θεμελιώδη περιορισμό: το γεγονός ότι κατά την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν ροπές πρώτης τάξης (και συγκεκριμένα η μέση τιμή) των οποίων οι αντίστοιχες πιθανοθεωρητικές ανισότητες (π.χ. η ανισότητα Markov) δεν είναι αρκετά ισχυρές στις περισσότερες περιπτώσεις.

Από αυτήν την άποψη, η μέθοδος της δεύτερης ροπής που παρουσιάζεται σε αυτήν την ενότητα συνιστά ένα ποιοτικό άλμα και οδηγεί σε σημαντικά ισχυρότερες μεθόδους, αφού η χρησιμοποίηση μιας υψηλότερης ροπής (και συγκεκριμένα της διασποράς) επιτρέπει την προσφυγή σε σημαντικά ισχυρότερες ανισότητες, με επίκεντρο την ανισότητα του Chebyshev, που αποτελεί το βασικό πιθανοθεωρητικό εργαλείο στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος αυτή.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τη σημαντική αυτή πιθανοθεωρητική ανισότητα.

Θεώρημα 23 (Ανισότητα Chebyshev). Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, είναι

$$\Pr\{|X-\mu| \geq \lambda\sigma\} \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

όπου λ μια οποιαδήποτε θετική σταθερά.

Απόδειξη: Από τον ορισμό της διασποράς $Var(X) = \sigma^2$ μιας τυχαίας μεταβλητής X με μέση τιμή μ είναι

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_x (X-\mu)^2 \Pr\{X=x\} \\
&\geq \sum_{|X-\mu|\geq\lambda\sigma} (X-\mu)^2 \Pr\{X=x\} \geq \sum_{|X-\mu|\geq\lambda\sigma} (\lambda\,\sigma)^2 \Pr\{X=x\} \\
&= \lambda^2\sigma^2 \sum_{|X-\mu|\geq\lambda\sigma} \Pr\{X=x\} = \lambda^2\sigma^2 \Pr\{|X-\mu|\geq\lambda\sigma\} \\
&\Rightarrow\ \Pr\{|X-\mu|\geq\lambda\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2\,\sigma^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

□

4.2 Συνοπτική περιγραφή της μεθόδου

Στην ενότητα 2.4 δείξαμε ότι η "καταρχήν ένδειξη" για την αναμενόμενη συμπεριφορά μιας ακέραιας τυχαίας μεταβλητής που προσφέρει η μέση τιμή, είναι αρκετά κοντά στην πραγματική διακύμανση των τιμών της μεταβλητής στην περίπτωση που η μέση τιμή τείνει στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα δείξαμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, ότι όταν η μέση τιμή τείνει στο μηδέν, η τυχαία μεταβλητή περιορίζεται, με πιθανότητα που τείνει στο 1, στη μοναδική τιμή 0. Το γεγονός αυτό μας προσέφερε τη δυνατότητα θεμελίωσης μιας γενικής διαδικασίας για την απόδειξη της μη ύπαρξης δομών που ικανοποιούν μια ορισμένη ιδιότητα.

Με άλλα λόγια, η απόδειξη ότι η μέση τιμή μιας θετικής ακέραιας τυχαίας μεταβλητής είναι εξαιρετικά μικρή (συγκλίνει στο 0) συνεπάγεται τη μοναδικότητα της τιμής 0 για τη μεταβλητή και τη μη ύπαρξη των υπό εξέταση δομών. Στο σημείο αυτό προκύπτει με φυσικό τρόπο το ακόλουθο ερώτημα: ισχύει μια αντίστοιχη ιδιότητα για μεγάλες (άπειρα μεγάλες) μέσες τιμές; Το γεγονός ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής τείνει στο άπειρο συνεπάγεται ή όχι το ότι η τυχαία μεταβλητή δεν παίρνει την τιμή 0 σχεδόν βέβαια; Με άλλα λόγια, ισχύει ή όχι η ακόλουθη τεχνική ιδιότητα;

$$E(X) \to \infty \ \Rightarrow\ \Pr\{X=0\} \to 0$$

Είναι φανερό ότι η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά επιθυμητή, αφού αν ίσχυε θα σήμαινε ότι $\Pr\{X \geq 1\} \to 1$, δηλαδή θα προσέφερε μια γενική μέθοδο απόδειξης ύπαρξης που θα απαιτούσε μόνο τον υπολογισμό μιας άπειρα μεγάλης μέσης τιμής.

Δυστυχώς, η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει γενικά. Πραγματικά, το γεγονός μιας άπειρα μεγάλης μέσης τιμής δεν αρκεί για να αποκλείσει την τιμή 0 αφού, καταρχήν διαισθητικά, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής μπορεί να είναι επίσης αρκετά μεγάλη ώστε να επιτρέπει υψηλή διακύμανση τιμών γύρω από την άπειρη μέση τιμή, διακύμανση η οποία μπορεί να συμπεριλαμβάνει την ανεπιθύμητη (προκειμένου για αποδείξεις ύπαρξης) τιμή 0.

Επομένως είναι επιβεβλημένο, πέρα από τον υπολογισμό μιας άπειρα μεγάλης μέσης τιμής, να προσφεύγουμε στον υπολογισμό της διασποράς με την ελπίδα να αποδείξουμε ότι η διασπορά είναι "σχετικά" μικρότερη ώστε, σε συνδυασμό με την άπειρη μέση τιμή, να αποκλείεται σχεδόν βέβαια η τιμή 0. Ο υπολογισμός μιας μικρής, σε σχέση με την άπειρη μέση τιμή, διασποράς αποτελεί τη βασική ιδέα της μεθόδου της δεύτερης ροπής, η οποία αποδίδεται τεχνικά με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 24 (Μέθοδος δεύτερης ροπής)**.** Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X εάν

$$E(X) \to \infty \text{ και } Var(X) = o(E^2(X))$$

τότε

$$\Pr\{X = 0\} \to 0$$

(τα όρια λαμβάνονται ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή n, δηλαδή είναι $X = X(n)$).

Απόδειξη: Επειδή $\{X = 0\} \subset \{|X - \mu| \geq \mu\}$ είναι

$$\begin{aligned} \Pr\{X = 0\} &< \Pr\{|X - \mu| \geq \mu\} = \Pr\left\{|X - \mu| \geq \frac{\mu}{\sigma}\sigma\right\} \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \end{aligned}$$

από την ανισότητα του Chebyshev για $\lambda = \frac{\mu}{\sigma}$, οπότε αν $\frac{\sigma^2}{\mu^2} \to 0 \Rightarrow \Pr\{X = 0\} \to 0$. □

Συμπερασματικά, οι αποδείξεις ύπαρξης με βάση τη μέθοδο της δεύτερης ροπής προϋποθέτουν τον υπολογισμό της διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής X που μετράει τον αριθμό των δομών που ικανοποιούν την επιθυμητή ιδιότητα και η οποία τις περισσότερες φορές είναι ένα άθροισμα επιμέρους δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών, που συνήθως δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Στο σημείο αυτό ακριβώς συνίσταται η αυξημένη τεχνική δυσκολία της μεθόδου της δεύτερης ροπής: σε αντίθεση με τη μέση τιμή, η γραμμικότητα της διασποράς προϋποθέτει στοχαστική ανεξαρτησία, οπότε η ύπαρξη στοχαστικών εξαρτήσεων καθιστά τον υπολογισμό της διασποράς ενός αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών περισσότερο δύσκολο από τεχνική άποψη σε σχέση με τον υπολογισμό της μέσης τιμής αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών (που προκύπτει εύκολα λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής).

Για τον υπολογισμό της διασποράς, και ακριβώς για να συνυπολογιστούν οι στοχαστικές εξαρτήσεις μεταξύ των δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών, χρησιμοποιούμε την έννοια της συνδιασποράς (covariance) τυχαίων μεταβλητών, που ορίζεται ως εξής:

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Είναι φανερό ότι αν X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η συνδιασπορά τους ισούται με μηδέν. Γενικότερα, το μέγεθος της συνδιασποράς αποτελεί μέτρο της στοχαστικής εξάρτησης και συμμεταβλητότητας δύο τυχαίων μεταβλητών.

Η έννοια της συνδιασποράς επιτρέπει να εκφραστεί η διασπορά ενός αθροίσματος δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών σαν το άθροισμα των συνδιασπορών όλων των δυνατών ζευγαριών αυτών των τυχαίων μεταβλητών, όπου τα ζευγάρια λαμβάνονται ως διατεταγμένα, σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 25. Εστω $X = X_1 + \cdots + X_n$, όπου οι διασπορές $Var(X_i)$ των δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών $X_i, 1 \leq i \leq n$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες. Είναι

$$Var(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} Cov(X_i, X_j) \tag{4.1}$$

Στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές X_i είναι δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές με πιθανότητες $p_i, 1 - p_i$ για τις τιμές 1, 0 (αντίστοιχα) είναι

$$Var(X_i) = p_i(1 - p_i) \leq p_i = E(X_i)$$

και επειδή προφανώς $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$ προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα που είναι εξαιρετικά χρήσιμο επειδή φράσσει τη διασπορά εκ των άνω και σε σχέση με τη μέση τιμή:

Θεώρημα 26. Αν $X = \sum_i X_i$, όπου $X_i, 1 \leq i \leq n$ είναι δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Cov(X_i, X_j) \\ &\leq E(X) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Cov(X_i, X_j) \end{aligned} \tag{4.2}$$

□

Στη σχετική βιβλιογραφία ([4], [63]) εμφανίζονται δύο διαφορετικοί τρόποι παραπέρα υπολογισμού της διασποράς ενός αθροίσματος δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών. Οι δύο αυτές παραλλαγές είναι στην ουσία ισοδύναμες και απλά διαφέρουν στην τεχνική του υπολογισμού. Πάντως, η δεύτερη παραλλαγή μπορεί να θεωρηθεί περισσότερο γενική και χρήσιμη, αφού η ποσότητα Δ την οποία υπολογίζει, χρησιμοποιείται και σε άλλες μεθόδους που παρουσιάζονται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου (π.χ. στην ανισότητα του Janson). Στη συνέχεια περιγράφουμε, για την πληρέστερη ενημέρωση του αναγνώστη, και τις δύο αυτές τεχνικές υπολογισμού. Επίσης, στις δύο επόμενες ενότητες εφαρμόζουμε τη μέθοδο της δεύτερης ροπής χρησιμοποιώντας μία από τις τεχνικές αυτές κάθε φορά.

Εστω ότι η τυχαία μεταβλητή X αποτελεί ένα άθροισμα δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_m$, που όλες έχουν μέση τιμή μ. Σύμφωνα με την εξίσωση 4.1, είναι

$$Var(X) = \sum_{S,T} Cov(X_S, X_T)$$

όπου τα S, T χρησιμοποιούνται αντί για τα i, j αντίστοιχα. Κάθε συνδιασπορά μπορεί να γραφτεί σαν

$$\begin{aligned} Cov(X_S, X_T) &= E(X_S X_T) - E(X_S)E(X_T) \\ &= E(X_S)E(X_T | X_S = 1) - E(X_S)E(X_T) \\ &= E(X_S)E(X_T) \left(\frac{E(X_T | X_S = 1)}{E(X_T)} - 1 \right) \\ &= \mu^2 f(S, T) \end{aligned}$$

όπου

$$f(S,T) = \frac{E(X_T|X_S = 1)}{E(X_T)} - 1$$

είναι μια ποσότητα που μετράει την εξάρτηση της μεταβλητής X_T από την X_S (και που παίρνει για παράδειγμα την τιμή 0 αν η πραγματοποίηση του γεγονότος στο οποίο αντιστοιχεί η X_S δεν επιδρά στην πιθανότητα πραγματοποίησης του γεγονότος στο οποίο αντιστοιχεί η X_T).

Επειδή υπάρχουν ακριβώς m^2 δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν όλα τα διατεταγμένα ζευγάρια από m μεταβλητές, είναι

$$Var(X) = m^2\mu^2 E_{S,T}\left[f(S,T)\right]$$

(όπου $E_{S,T}\left[f(S,T)\right]$ είναι η μέση τιμή της $f(S,T)$ όταν τα S,T επιλέγονται με τυχαίο τρόπο ανάμεσα σε όλα τα δυνατά σύνολα τεσσάρων κορυφών) και επειδή $E(X) = m\mu$ είναι

$$\frac{Var(X)}{E^2(X)} = E_{S,T}\left[f(S,T)\right]$$

Επομένως, το βασικό θεώρημα της παραλλαγής της μεθόδου της δεύτερης ροπής που στηρίζεται στην ποσότητα f, γίνεται:

Θεώρημα 27. Εστω X μια τυχαία μεταβλητή που αποτελεί άθροισμα επιμέρους δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών. Είναι

$$E(X) \to \infty \text{ και } E_{S,T}\left[f(S,T)\right] = o(1) \Rightarrow \Pr\{X = 0\} \to 0$$

□

Η ποσότητα $E_{S,T}\left[f(S,T)\right]$ εξαρτάται από το μέγεθος της τομής $S \cap T$ και είναι, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα, ένα άθροισμα των γινομένων των πιθανοτήτων των διάφορων τιμών του $|S \cap T|$ με τις αντίστοιχες για κάθε τέτοια τιμή ποσότητες $f(S,T)$.

Η επόμενη τεχνική ορίζει την ποσότητα

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \Pr\{A_i \wedge A_j\}$$

όπου A_i, A_j είναι τα γεγονότα που αντιστοιχούν στις δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές X_i, X_j και η σχέση $i \sim j$ ισχύει όταν $i \neq j$ και τα γεγονότα A_i, A_j είναι στοχαστικά εξαρτημένα. Επειδή προφανώς

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \leq E(X_iX_j) = \Pr\{A_i \wedge A_j\}$$

προκύπτει, από τη σχέση 4.2, ότι

$$Var(X) \leq E(X) + \Delta$$

οπότε το βασικό θεώρημα της δεύτερης ροπής συνεπάγεται:

Θεώρημα 28.

$$E(X) \to \infty \text{ και } \Delta = o(E^2(X)) \Rightarrow \Pr\{X = 0\} \to 0$$

(τα όρια λαμβάνονται ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή n, δηλαδή είναι $X = X(n)$). □

Ολοκληρώνουμε την περιγραφή αυτής της δεύτερης τεχνικής με μια ελαφρά παραλλαγμένη αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή της. Η παραλλαγή αυτή προϋποθέτει ότι τα γεγονότα A_i, A_j που αντιστοιχούν στις τυχαίες μεταβλητές X_i, X_j είναι "συμμετρικά", δηλαδή

$$\Pr\{X_j | X_i = 1\} = \Pr\{X_i | X_j = 1\}$$

ιδιότητα που ισχύει στις περισσότερες εφαρμογές (και ιδιαίτερα στις γραφοθεωρητικές, όπου τα A_i, A_j αφορούν σε ιδιότητες υπογράφων που εμφανίζουν συνήθως συμμετρία, από την άποψη ότι μπορεί κανείς να θεωρήσει οποιοδήποτε από τα δύο αυτά γεγονότα σαν το "δεδομένο" γεγονός της δεσμευμένης πιθανότητας, χωρίς η επιλογή αυτή να βλάπτει τη γενικότητα της ανάλυσης). Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας είναι

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{i\sim j} \Pr\{A_i \wedge A_j\} = \sum_{i\sim j} \Pr\{A_j|A_i\} \Pr\{A_i\} = \\
&= \sum_i \sum_{j\sim i} \Pr\{A_j|A_i\} \Pr\{A_i\} = \sum_i \Pr\{A_i\} \sum_{j\sim i} \Pr\{A_j|A_i\} = \\
&= \Delta^* \sum_i \Pr\{A_i\} = \Delta^* E(X)
\end{aligned}$$

όπου

$$\Delta^* = \sum_{j\sim i} \Pr\{A_j|A_i\}$$

Συνοπτικά είναι

$$\Delta = \Delta^* E(X)$$

οπότε το προηγούμενο θεώρημα γίνεται ισοδύναμα

Θεώρημα 29.

$$E(X) \to \infty \text{ και } \Delta^* = o(E(X)) \Rightarrow \Pr\{X = 0\} \to 0$$

□

Η διαισθητική ερμηνεία των δύο τελευταίων θεωρημάτων συνίσταται στην απαίτηση ότι, για να παραμένει μικρή η διασπορά, πρέπει η ικανοποίηση ενός οποιουδήποτε συγκεκριμένου γεγονότος να μην αυξάνει υπερβολικά την πιθανότητα ικανοποίησης των υπόλοιπων γεγονότων και η συνολική "δεσμευμένη ικανοποίηση" λόγω των στοχαστικών εξαρτήσεων (που μετριέται από την ποσότητα Δ^*) να είναι ασυμπτωτικά μικρότερη από τη μέση τιμή.

4.3 Πλήρεις υπογράφοι μεγέθους 4 στο $G_{n,p}$

Στο δεύτερο τόμο θα μελετήσουμε αναλυτικά το μοντέλο τυχαίων γράφων (random graphs) $G_{n,p}$ και θα αποδείξουμε συναρτήσεις κατωφλίου (threshold functions) για διάφορες γραφοθεωρητικές ιδιότητες σε αυτό το μοντέλο. Ωστόσο κρίνουμε σκόπιμο, στα πλαίσια αυτής της ενότητας και για την καλύτερη κατανόησή της, να αναφέρουμε συνοπτικά μερικούς ορισμούς.

Το μοντέλο τυχαίων γράφων $G_{n,p}$ προκύπτει αν, στοχαστικά ανεξάρτητα και ισοπίθανα με πιθανότητα p (αντίστοιχα, $1-p$), αποφασίζεται η ύπαρξη (ή όχι) κάθε μιας από τις $\binom{n}{2}$ δυνατές ακμές ενός πλήρους γράφου n κορυφών.

Μια συνάρτηση $p_0 = p_0(n)$ αποτελεί συνάρτηση κατωφλίου για μια μονότονα αύξουσα ιδιότητα A, αν

- $p \gg p_0 \;\Rightarrow\; \Pr\{\text{το } G_{n,p} \text{ ικανοποιεί την } A\} \to 1$

- $p \ll p_0 \;\Rightarrow\; \Pr\{\text{το } G_{n,p} \text{ ικανοποιεί την } A\} \to 0$

όπου η σύγκλιση λαμβάνεται καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατωφλίου για την ιδιότητα της ύπαρξης πλήρων υπογράφων (cliques) μεγέθους 4 σε τυχαίους γράφους του μοντέλου $G_{n,p}$. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι αν $p > n^{-2/3}$ τότε ο οποιοσδήποτε τυχαίος γράφος του $G_{n,p}$ περιέχει τουλάχιστον έναν πλήρη υπογράφο μεγέθους 4 σχεδόν βέβαια.

Θεώρημα 30. Η συνάρτηση $p_0(n) = n^{-2/3}$ αποτελεί συνάρτηση κατωφλίου για την ύπαρξη πλήρων υπογράφων (cliques) μεγέθους 4 σε τυχαίους γράφους του μοντέλου $G_{n,p}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της δεύτερης ροπής και σύμφωνα με τη συνοπτική περιγραφή της μεθόδου αυτής στην προηγούμενη ενότητα, θα αποδείξουμε καταρχήν ότι η μέση τιμή του αριθμού των πλήρων υπογράφων μεγέθους 4 τείνει στο άπειρο.

Εστω S ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο που αποτελείται από 4 κορυφές και έστω X_S μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 (αν το S είναι πλήρης γράφος) και 0 (στην αντίθετη περίπτωση). Είναι φανερό, επειδή πρέπει να υπάρχουν και οι 6 δυνατές ακμές, ότι:

$$E(X_S) = \Pr\{X_S = 1\} = p^6$$

Η τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{|S|=4} X_S$ μετράει τον αριθμό όλων των πλήρων υπογράφων μεγέθους 4. Επειδή υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{4}$ δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν τέτοια σύνολα S και από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$E(X) = \binom{n}{4} p^6 \sim n^4 p^6$$

Αν $p \ll n^{-2/3} \;\Rightarrow\; E(X) \to 0$ και (βλέπε την ενότητα 2.4 για τη μέθοδο αποδείξεων μη ύπαρξης με την ανισότητα Markov) το $G_{n,p}$ δεν περιέχει πλήρεις υπογράφους μεγέθους 4 σχεδόν βέβαια.

Επίσης, αν $p \gg n^{-2/3}$, τότε $E(X) \to \infty$. Οπως τονίσαμε στην προηγούμενη ενότητα (και χρησιμοποιώντας την τεχνική υπολογισμού της διασποράς με βάση την ποσότητα Δ) χρειάζεται να δείξουμε ότι η τιμή της πιθανότητας p που απειρίζει τη μέση τιμή ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$\Delta^* = o(E(X))$$

όπου

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} \Pr\{A_j | A_i\}$$

και το γεγονός A_i (αντίστοιχα, A_j) είναι "το σύνολο S_i (αντίστοιχα, S_j) αποτελεί έναν πλήρη γράφο μεγέθους 4" και ο συμβολισμός $j \sim i$ σημαίνει ότι τα A_i, A_j δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητα και $i \neq j$. Από τη διαφορετικότητα ($i \neq j$) δύο συνόλων που σχετίζονται με το συμβολισμό $\sim$, η σχέση $A_j \sim A_i$ σημαίνει καταρχήν ότι $|S_i \cap S_j| \neq 4$. Επίσης, επειδή η ιδιότητα της πληρότητας ενός γράφου αφορά στις ακμές του, η στοχαστική εξάρτηση ώστε $A_j \sim A_i$ σημαίνει ότι $|S_i \cap S_j| \geq 2$ (διαφορετικά τα S_i, S_j δεν είναι δυνατόν να έχουν κοινές ακμές και επομένως τα αντίστοιχα γεγονότα A_i, A_j είναι στοχαστικά ανεξάρτητα).

Παρατηρούμε ότι η προσφυγή στην ποσότητα Δ^* αντί της Δ είναι επιτρεπτή, σύμφωνα και με όσα αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, εξαιτίας της συμμετρίας της σχέσης $\sim$ για τη συγκεκριμένη ιδιότητα: πραγματικά, είναι φανερό, αφού η συγκεκριμένη ιδιότητα εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμό των ακμών των συνόλων S_i, S_j και η σχέση $\sim$ αφορά στον αριθμό των ακμών τους που είναι κοινές, ότι $A_i \sim A_j \Leftrightarrow A_j \sim A_i$.

Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $\Pr\{A_j | A_i\}$ για τις περιπτώσεις όπου $2 \leq |S_i \cap S_j| \leq 3$.

Εστω $|S_i \cap S_j| = 2$. Τα S_i, S_j έχουν δύο κοινές κορυφές και το γεγονός ότι το S_i είναι ένας πλήρης γράφος σημαίνει ότι το S_j έχει ήδη μία ακμή: εκείνη ακριβώς την ακμή του πλήρους γράφου S_i που συνδέει τις 2 κοινές κορυφές των S_i, S_j. Επομένως, η πιθανότητα το S_j να είναι πλήρης γράφος αυξάνεται σε

$$\Pr\{A_j | A_i\} = p^5$$

αφού αρκεί να υπάρχουν οι υπόλοιπες 5 δυνατές ακμές. Επίσης, είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{4}{2}\binom{n-4}{2} = O(n^2)$ δυνατοί τρόποι για να επιλεγεί το S_j έτσι ώστε $|S_i \cap S_j| = 2$.

Παρομοίως, η περίπτωση $|S_i \cap S_j| = 3$ εμφανίζεται σε $\binom{4}{3}\binom{n-4}{1} = O(n)$ δυνατούς τρόπους επιλογής των S_i, S_j και σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις είναι προφανώς

$$\Pr\{A_j | A_i\} = p^3$$

Συνοψίζοντας είναι

$$\begin{aligned}
\Delta^* &= \sum_{2 \leq |S_i \cap S_j| \leq 3} \Pr\{A_j | A_i\} \\
&= \sum_{|S_i \cap S_j| = 2} \Pr\{A_j | A_i\} + \sum_{|S_i \cap S_j| = 3} \Pr\{A_j | A_i\} \\
&= O(n^2)\, p^5 + O(n)\, p^3 = O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ενώ $E(X) \to \infty$ οπότε $\Delta^* = o(E(X))$ για $p > n^{-2/3}$. $\square$

4.4 Λογαριθμικά κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης στο $G_{n,1/2}$

Στην ενότητα 2.6 δείξαμε (σαν παράδειγμα αποδείξεων μη ύπαρξης με τη χρησιμοποίηση της ανισότητας Markov) ότι δεν υπάρχουν κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με μέγεθος μικρότερο από $\log n$ σε τυχαίους γράφους του μοντέλου $G_{n,1/2}$ σχεδόν βέβαια.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της δεύτερης ροπής (και ειδικότερα, την τεχνική της παραλλαγή που υπολογίζει την ποσότητα f) για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με μέγεθος $\lceil \log n \rceil$ στο $G_{n,1/2}$ σχεδόν βέβαια.

Ορισμός 11. Εστω $X^{(k)}$ ο αριθμός των κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με μέγεθος k στο $G_{n,1/2}$. $\square$

Λήμμα 2. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X^{(k)}$ είναι:

$$E\left(X^{(k)}\right) = \binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \tag{4.3}$$

Απόδειξη: Εστω $T \subseteq V$ ένα συγκεκριμένο σύνολο με k κορυφές και

$$X_T = \begin{cases} 1 & \text{αν το } T \text{ είναι κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς $E\left(X_T\right) = \Pr\{X_T = 1\} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$. Αλλά

$$X^{(k)} = \sum_{|T|=k} X_T$$

οπότε (από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής) είναι:

$$E\left(X^{(k)}\right) = \sum_{|T|=k} E\left(X_T\right) = \binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

$\square$

Θεώρημα 31. Αν $k = \log n$ τότε $E\left(X^{(k)}\right) \to +\infty$.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο λήμμα είναι

$$E\left(X^{(\log n)}\right) = \binom{n}{\log n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\log n}$$

Αλλά προφανώς είναι $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\log n}=e^{-1}$ και $\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{\log n}=+\infty$. $\square$
Το θεώρημα αυτό δεν αρκεί, για τους λόγους που αναφέραμε στην ενότητα 4.2, για να αποδειχθεί η ύπαρξη κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης μεγέθους $\log n$ σχεδόν βέβαια. Χρειάζεται επίσης να δείξουμε ότι $Var(X^{(k)})=o(E^2(X^{(k)}))$ όταν $k=\log n$.

Σύμφωνα με τους συμβολισμούς που ορίστηκαν στην ενότητα 4.2, είναι

$$\frac{Var(X^{(k)})}{E^2(X^{(k)})}=\sum_{i=0}^{k}\Pr\{|S\cap T|=i\}[f(S,T) \text{ δοθέντος } |S\cap T|=i] \tag{4.4}$$

όπου:

$$f(S,T)=\frac{E(X_T/X_S=1)}{E(X_T)}-1$$

και οι X_S, X_T είναι δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές για τα σύνολα S,T αντίστοιχα όσον αφορά το αν τα σύνολα αυτά είναι κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης ή όχι. Προφανώς:

$$\Pr\{|S\cap T|=i\}=\frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}}{\binom{n}{k}}$$

Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς δίνουμε τους ακόλουθους συντομευμένους ορισμούς για την πιθανότητα της τομής και την αντίστοιχη ποσότητα f.

Ορισμός 12. Εστω

$$\alpha(i)=\frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}}{\binom{n}{k}}$$

για $k=\log n$.

Ορισμός 13. Εστω $f_i(S,T)=f(S,T)$ όταν είναι $|S\cap T|=i$ και $k=\log n$. $\square$

Στη συνέχεια θα φράξουμε εκ των άνω τις ποσότητες $\alpha(i), f_i(S,T)$.

Λήμμα 3. Υπάρχει μια σταθερά γ και ένα $n_0>0$ έτσι ώστε $\forall n\geq n_0$ και $\forall i=1,\ldots,\log n$: $f_i(S,T)\leq\gamma$.

Απόδειξη: Επειδή $X_T=0$ ή 1 έχουμε $E(X_T/X_S=1)\leq 1$. Ετσι

$$f_i(S,T)\leq\frac{1}{E(X_T)}-1$$

όπου $|T|=\log n$. Αλλά, από την απόδειξη της σχέσης 4.3 είναι:

$$\begin{aligned}E(X_T) &= \left(1-\frac{1}{2^{\log n}}\right)^{n-\log n}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\log n}\\ &\geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\end{aligned}$$

Αλλά $\forall n \geq 2$: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq 1/4$, επομένως $E(X_T) \geq 1/4$, οπότε $f_i(S,T) \leq 3$ και επιλέγουμε $\gamma = 3$. □

Λήμμα 4. Η ακολουθία $\alpha(i)$ είναι μονότονα φθίνουσα ως προς i για $i = 1, \ldots, \log n$, όταν $n > 64$.

Απόδειξη: Ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι

$$\Lambda = \frac{\alpha(i+1)}{\alpha(i)} = \frac{k-i}{i+1}\,\frac{k-i}{n-2k+i+1} \leq \frac{k^2}{n-2k+1}$$

(για $i \geq 0$). Αν $k = \log n$, τότε

$$\Lambda \leq \frac{(\log n)^2}{n - 2\log n + 1} < 1 \text{ για όλα τα } n > 64$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη με την παρατήρηση ότι η συνθήκη $n > 64$ δεν περιορίζει τη γενικότητα του λήμματος αφού, όπως εξηγήσαμε στην ενότητα 1.4, η πιθανοτική μέθοδος μελετά βασικά την ασυμπτωτική συμπεριφορά μεγάλων γράφων ($n \to \infty$) και οι μικροί πεπερασμένοι γράφοι (με λίγες κορυφές) δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία αφού έτσι κι αλλιώς μπορούν να επιλυθούν εξαντλητικά (by brute force) με σχετικά αποδοτικό τρόπο. □

Λήμμα 5. Για $i = 2, 3, \ldots, \lceil \log n \rceil$ είναι $\alpha(i) \leq \frac{4}{n}$

Απόδειξη: Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $\alpha(i) \leq \alpha(2)$. Αλλά

$$\begin{aligned}
\alpha(2) &= \frac{\binom{k}{2}\binom{n-k}{k-2}}{\binom{n}{k}} \\
&\leq k^2\, \frac{\frac{(n-k)!}{(k-2)!(n-2k+2)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \\
&= k^2(k-1)k\,\frac{n-2k+3}{n-k+1}\,\frac{n-2k+4}{n-k+2}\cdots\frac{n-k}{n} \\
&\leq k^4\,\frac{1}{n-k+1}\,\frac{1}{n-k+2}
\end{aligned}$$

(επειδή όλα τα υπόλοιπα κλάσματα είναι της μορφής $\frac{n-2k+j}{n-k+j} < 1$, για $3 \leq j \leq k$).
Επομένως, για $k = \log n$, είναι

$$\alpha(2) \leq \frac{(\log n)^4}{(n - \log n + 1)^2} \leq \frac{n}{(n/2)^2} = \frac{4}{n}$$

□

Λήμμα 6.

$$\alpha(1) \leq \frac{(\log n)^2}{n - \log n + 1}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= \frac{\binom{k}{1}\binom{n-k}{k-1}}{\binom{n}{k}} \\ &= k^2\,\frac{n-2k+2}{n-k+1}\;\frac{n-2k+3}{n-k+2}\;\cdots\frac{n-k}{n} \\ &\leq \frac{k^2}{n-k+1}\end{aligned}$$

(επειδή όλα τα υπόλοιπα κλάσματα είναι της μορφής $\frac{n-2k+j}{n-k+j} < 1$, για $2 \leq j \leq k$). □

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 32.

$$\frac{Var\left(X^{(k)}\right)}{E^2\left(X^{(k)}\right)} \to 0 \text{ καθώς } n \to +\infty \text{ για } k = \log n$$

Απόδειξη: Από τη σχέση 4.4 και για $k = \log n$ έχουμε

$$\frac{Var(X^{(k)})}{E^2(X^{(k)})} = \sum_{i=0}^{k} \alpha(i) f_i(S,T)$$

Αλλά για $i = 0$, είναι $f_i(S,T) = 0$ (αφού $S \cap T = \emptyset$). Επομένως, και χρησιμοποιώντας τα άνω φράγματα για τα $\alpha(i)$ και $f_i(S,T)$ που αποδείξαμε προηγουμένως, είναι

$$\begin{aligned}\frac{Var(X^{(k)})}{E^2(X^{(k)})} &\leq \gamma\,\alpha(1) + \gamma \sum_{i=2}^{\log n} \alpha(i) \\ &\leq \gamma\,\frac{(\log n)^2}{n - \log n + 1} + \gamma\,\frac{4\log n}{n} \\ &\leq \frac{18\,(\log n)^2}{n} \to 0 \text{ καθώς } n \to +\infty\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 33. Για $k = \log n$, είναι

$$\Pr\{X^{(k)} = 0\} \leq 18\,\frac{(\log n)^2}{n} \to 0$$

καθώς $n \to +\infty$ □

Τελικά:

Θεώρημα 34. Υπάρχουν στο $G_{n,1/2}$ κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης μεγέθους $\lceil \log n \rceil$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 18\,\frac{(\log n)^2}{n}$, δηλαδή σχεδόν βέβαια.

□

Το αποτέλεσμα που παρουσιάστηκε στα πλαίσια αυτής της ενότητας οφείλεται στους Νικολετσέα και Σπυράκη ([51]).

4.5 Τα όρια της μεθόδου

Η αυξημένη, σε σχέση με τη μέθοδο της γραμμικότητας της μέσης τιμής, ισχύς της μεθόδου της δεύτερης ροπής οφείλεται στην ακριβέστερη περιγραφή της πραγματικής κατανομής των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής και ιδιαίτερα της συγκέντρωσής τους γύρω από τη μέση τιμή που προσφέρει η διασπορά και στη δυνατότητα χρησιμοποίησης της ανισότητας του Chebyshev.

Πραγματικά, η ανισότητα του Chebyshev είναι όχι μόνο σημαντικά ισχυρότερη από την ανισότητα του Markov, αλλά αποτελεί και την καλύτερη δυνατή ανισότητα όταν για μία τυχαία μεταβλητή γνωρίζουμε μόνο τη μέση τιμή και τη διασπορά και δεν κάνουμε καμία επιπλέον υπόθεση για την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή. Αυτό φαίνεται, για παράδειγμα, στην περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής

$$X = \begin{cases} k & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2k^2} \\ -k & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2k^2} \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{k^2} \end{cases}$$

για την οποία είναι $E(X) = 0$, $Var(X) = \sigma^2 = 1$ και

$$\Pr\{|X - \mu| \geq k\sigma\} = \Pr\{|X| \geq k\} = \Pr\{X = k\} + \Pr\{X = -k\} = \frac{1}{k^2}$$

ενώ η ανισότητα του Chebyshev δίνει

$$\Pr\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

με άλλα λόγια, αποτελεί την καλύτερη δυνατή ανισότητα για τη συγκέντρωση των τιμών της συγκεκριμένης τυχαίας μεταβλητής.

Υπάρχουν όμως κατανομές για τις οποίες η ανισότητα του Chebyshev δεν προσφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της κανονικής κατανομής (normal distribution, δες Παράρτημα Α). Για μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία κατανομή, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) της αντίστοιχης ανηγμένης τυχαίας μεταβλητής, είναι

$$\Pr\{|X - \mu| \geq \lambda\sigma\} = \Pr\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \geq \lambda\right\} = 2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

που για μεγάλα λ και ασυμπωτικά γίνεται

$$\Pr\{|X - \mu| \geq \lambda\sigma\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\lambda}$$

οπότε η πιθανότητα απόκλισης είναι εκθετικά μικρή, δηλαδή σημαντικά μικρότερη (καλύτερη) από το πολυωνυμικά μικρό άνω φράγμα που επιτυγχάνει η ανισότητα του Chebyshev.

Η χαρακτηριστική αυτή περίπτωση της κανονικής κατανομής δεν είναι η μοναδική περίπτωση εκθετικά μικρών πιθανοτήτων απόκλισης από τη μέση τιμή, δηλαδή σημαντικά καλύτερων από τις πολυωνυμικά μικρές πιθανότητες που αποδεικνύει η ανισότητα του Chebyshev. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) υποδεικνύει ότι οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή που αποτελεί άθροισμα επιμέρους τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή και διασπορά και είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή και επομένως αποκλίνει από τη μέση της τιμή με εκθετικά μικρή πιθανότητα (για μια απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος δες, για παράδειγμα, το [25]).

Θεώρημα 35 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)**.** Εστω οι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ κάθε μία από τις οποίες έχει μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Η τυχαία μεταβλητή

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

(που, λόγω της στοχαστικής ανεξαρτησίας, έχει μέση τιμή $n\mu$ και διασπορά $n\sigma^2$) τείνει ασυμπτωτικά στην κανονική κατανομή, οπότε για την ανηγμένη τυχαία μεταβλητή της X είναι

$$\Pr\left\{\left|\frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right| \geq \lambda\right\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\lambda}$$

καθώς το n τείνει στο άπειρο. □

Σε επόμενα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε μεθόδους και ανισότητες που επιτυγχάνουν παρόμοια εκθετικά μικρά φράγματα για την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες, αν και δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, εμφανίζουν μικρές στοχαστικές εξαρτήσεις και μπορούν να θεωρηθούν "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητες.

Κεφάλαιο 5

Το Τοπικό Θεώρημα

5.1 Εκθετικά μικρές (θετικές) πιθανότητες ύπαρξης

Στο πρώτο κεφάλαιο, περιγράφοντας τη βασική πιθανοτική μέθοδο (τη μέθοδο της θετικής πιθανότητας), διατυπώσαμε μια γενική διαδικασία απόδειξης της ύπαρξης συνδυαστικών δομών που πληρούν μια ορισμένη επιθυμητή ιδιότητα. Η διαδικασία αυτή στηρίζεται στον υπολογισμό μιας θετικής (μη μηδενικής) πιθανότητας για την ύπαρξη των υπό εξέταση δομών.

Για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη, επαναλαμβάνουμε τη βασική λογική της μεθόδου της θετικής πιθανότητας: Εστω $A_1, \ldots, A_n$ τα "ανεπιθύμητα" (όσον αφορά στην απόδειξη της υπό εξέταση ιδιότητας) γεγονότα, η ικανοποίηση των οποίων παραβιάζει την ιδιότητα. Η μέθοδος στηρίζεται στην απόδειξη, κάθε φορά, της πρώτης ανισότητας της ακόλουθης σχέσης:

$$\sum_i \Pr\{A_i\} < 1 \Rightarrow \Pr\{\wedge_i \overline{A_i}\} > 0$$

Ωστόσο, υπάρχει ένας διαφορετικός τρόπος (που όμως προϋποθέτει στοχαστική ανεξαρτησία) για να δείχνει κανείς ότι η πιθανότητα ικανοποίησης της υπό εξέταση ιδιότητας είναι θετική: Εστω ότι τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. Είναι φανερό ότι

$$\text{αν } \forall i,\ \Pr\{A_i\} < 1 \text{ τότε } \Pr\{\wedge_i \overline{A_i}\} > 0$$

Θα επιχειρήσουμε, πριν διατυπώσουμε το Τοπικό Θεώρημα, μια συγκριτική μελέτη των δύο αυτών διαφορετικών τρόπων απόδειξης θετικής πιθανότητας για την ύπαρξη δομών που πληρούν μια επιθυμητή ιδιότητα.

Η βασική μέθοδος της θετικής πιθανότητας, στις περισσότερες περιπτώσεις, αποδεικνύει μια όχι απλά θετική πιθανότητα ύπαρξης, αλλά μια πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς το μέγεθος της εισόδου τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα, μελετώντας την ύπαρξη τουρνουά μεγέθους n που πληρούν την ιδιότητα S_k, δείξαμε ότι η πιθανότητα ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο τουρνουά να μην ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή φράσσεται εκ των άνω από την ποσότητα

$$\binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{e^{n/2^k}}$$

που για k σταθερό και κατάλληλα μεγάλο n είναι όχι απλά μικρότερη της μονάδας αλλά τείνει εκθετικά γρήγορα στο μηδέν. Επομένως, για οποιοδήποτε σταθερό k και για κατάλληλα μεγάλο n, η πιθανότητα ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο τουρνουά να πληρεί την S_k τείνει στο 1, με άλλα λόγια σχεδόν όλα τα τουρνουά μεγέθους n ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα.

Από την άλλη μεριά, ο δεύτερος τρόπος απόδειξης θετικής πιθανότητας ύπαρξης (που, καταρχήν, προϋποθέτει στοχαστική ανεξαρτησία μεταξύ των επιμέρους γεγονότων) αποδεικνύει την ύπαρξη μιας εκθετικά μικρής (αλλά πάντως θετικής) πιθανότητας ύπαρξης. Πραγματικά, είναι

$$\text{εάν } \forall i, \Pr\{\overline{A_i}\} = p > 0 \text{ τότε } \Pr\{\wedge_i \overline{A_i}\} = p^n > 0$$

δηλαδή η πιθανότητα ύπαρξης είναι εκθετικά μικρή (αλλά πάντως μη μηδενική).

Με άλλα λόγια, η πρώτη μέθοδος αποδεικνύει συνήθως μια πιθανότητα σημαντικά καλύτερη (μεγαλύτερη) από την αναγκαία για αποδείξεις ύπαρξης απλά θετική πιθανότητα, ενώ η δεύτερη μέθοδος αποδεικνύει μια εκθετικά μικρή (αλλά ικανοποιητική, προκειμένου για αποδείξεις ύπαρξης, αφού είναι αυστηρά θετική) πιθανότητα.

Επομένως, η πρώτη μέθοδος αποδεικνύει μια υπερβολικά καλή (μεγάλη) πιθανότητα ύπαρξης. Το γεγονός αυτό μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο από τη σκοπιά σχεδίασης αλγόριθμων κατασκευής των υπό εξέταση δομών, αφού υποδεικνύει ότι η τυχαία επιλογή ενδεχομένως παρέχει δομές που πληρούν την υπό εξέταση ιδιότητα σχεδόν βέβαια, αλλά είναι περιττό όσον αφορά την απλή απόδειξη ύπαρξης των δομών αυτών και μόνο. Μια τέτοια υπερβολικά μεγάλη πιθανότητα προφανώς συνεπάγεται επιπλέον (περιττούς) περιορισμούς και συχνά δεν οδηγεί στα καλύτερα δυνατά φράγματα για την ύπαρξη των επιθυμητών ιδιοτήτων.

Αντίθετα, η δεύτερη μέθοδος, και ακριβώς επειδή δε θέτει αυξημένες απαιτήσεις για το μέγεθος της πιθανότητας ύπαρξης αλλά αρκείται στην απλά θετική, εκθετικά μικρή πιθανότητα, οδηγεί πολλές φορές σε καλύτερα αποτελέσματα (για παράδειγμα, βελτιώνει τα φράγματα για την ικανοποίηση των επιθυμητών ιδιοτήτων).

5.2 Η περίπτωση "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητων γεγονότων

Στην προηγούμενη ενότητα, μιλώντας για την απόδειξη θετικών πιθανοτήτων ύπαρξης, αλλά και στα προηγούμενα κεφάλαια, γενικότερα, τονίσαμε ότι η ιδιότητα της στοχαστικής ανεξαρτησίας είναι ιδιαίτερα επιθυμητή. Χαρακτηριστικά, είδαμε τους περιορισμούς που θέτει και τις τεχνικές δυσκολίες που δημιουργεί η έλλειψη στοχαστικής ανεξαρτησίας κατά τον υπολογισμό μεγαλύτερων από τη μέση τιμή ροπών (π.χ. κατά τον υπολογισμό της διασποράς).

Δυστυχώς, στις περισσότερες περιπτώσεις εμφανίζονται στοχαστικές εξαρτήσεις ανάμεσα στα γεγονότα που συναποτελούν την υπό εξέταση ιδιότητα και δεν υπάρχει "πλήρης" στοχαστική ανεξαρτησία, με αποτέλεσμα η μέθοδος της εκθετικά μικρής θετικής πιθανότητας ύπαρξης, που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, να μην είναι (καταρχήν) δυνατό να εφαρμοστεί. Παρόλα αυτά, σε αρκετές περιπτώσεις οι εμφανιζόμενες στοχαστικές εξαρτήσεις είναι μικρές και, κυρίως, εμφανίζονται σχετικά σπάνια ανάμεσα στα διάφορα γεγονότα, από την άποψη ότι κάθε γεγονός εξαρτάται στοχαστικά από ένα μικρό αριθμό άλλων γεγονότων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι δυνατό να θεωρήσουμε τα γεγονότα "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητα και να επιτύχουμε αποτελέσματα παραπλήσια με εκείνα που θα ίσχυαν στην περίπτωση "πλήρους" στοχαστικής ανεξαρτησίας. Στη σημαντική (και μάλλον εγγενή) αυτή ιδιότητα της πιθανοτικής μεθόδου θα επανέλθουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θα παρουσιαστούν δύο βασικές τεχνικές για την αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητων γεγονότων:

- Το Τοπικό Θεώρημα (The Local Lemma)
- Η ανισότητα του Janson

Το Τοπικό Θεώρημα και ορισμένες χαρακτηριστικές εφαρμογές του παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, ενώ θα διαπραγματευθούμε την ανισότητα Janson στο έκτο κεφάλαιο του βιβλίου.

5.3 Το Τοπικό Θεώρημα (η συμμετρική περίπτωση)

Οπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, το Τοπικό Θεώρημα επιτρέπει την απόδειξη μιας θετικής πιθανότητας για την ύπαρξη δομών που ικανοποιούν μια επιθυμητή ιδιότητα, ακόμα και στην περίπτωση όπου τα επιμέρους (ανεπιθύμητα) γεγονότα που συναποτελούν τη μη πραγματοποίηση της ιδιότητας εμφανίζουν "μικρές" στοχαστικές εξαρτήσεις.

Επομένως, το Τοπικό Θεώρημα προσφέρει τη δυνατότητα γενίκευσης της μεθόδου της εκθετικά μικρής θετικής πιθανότητας ύπαρξης (βλέπε ενότητα 5.1) στην περίπτωση "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητων γεγονότων.

Αυτή ακριβώς η δυνατότητα γενίκευσης καθιστά το Τοπικό Θεώρημα ένα εξαιρετικά ισχυρό εργαλείο αποδείξεων ύπαρξης, αφού, στις περισσότερες περιπτώσεις, και ακριβώς λόγω των εμφανιζόμενων στοχαστικών εξαρτήσεων, η μέθοδος της εκθετικά μικρής θετικής πιθανότητας δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί αυτούσια.

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του Τοπικού Θεωρήματος, θα ορίσουμε ένα αφαιρετικό (abstract) μοντέλο (πιο συγκεκριμένα, έναν γράφο) για την αναπαράσταση των στοχαστικών εξαρτήσεων μεταξύ γεγονότων.

Ορισμός 14. Εστω $A_1, \ldots, A_n$ τα επιμέρους γεγονότα που συνεπάγονται τη μη ικανοποίηση μιας επιθυμητής ιδιότητας. Ο γράφος G με σύνολο κορυφών $V = \{1, \ldots, n\}$ (η κορυφή i αντιστοιχεί στο γεγονός A_i, $1 \leq i \leq n$) καλείται γράφος στοχαστικών εξαρτήσεων (dependency graph) των γεγονότων $A_1, \ldots, A_n$, αν $\forall i$, το γεγονός A_i είναι αμοιβαία (mutually) στοχαστικά ανεξάρτητο από όλα τα γεγονότα A_j για τα οποία $\{i,j\} \notin G$ (δηλαδή ανεξάρτητο από οποιονδήποτε συνδυασμό τους). □

Στις περισσότερες περιπτώσεις, και ιδιαίτερα σε αρκετές γραφοθεωρητικές όπου υπάρχει συμμετρία, η απλή ανεξαρτησία ανάμεσα στα γεγονότα ανά δύο (pairwise independence) συνεπάγεται τη γενικότερη αμοιβαία στοχαστική ανεξαρτησία, που περιγράψαμε προηγουμένως, επομένως $\forall i, j$:

$$A_i, A_j \text{ στοχαστικά ανεξάρτητα } \Leftrightarrow \{i,j\} \notin G$$

Η σημαντική αυτή ιδιότητα διευκολύνει κατά πολύ την κατασκευή του γράφου στοχαστικών εξαρτήσεων, αφού αρκεί να εξετάζει κανείς μόνο την ανεξαρτησία γεγονότων ανά δύο, η ύπαρξη ή όχι της οποίας διαπιστώνεται αρκετά πιο εύκολα από τεχνική άποψη.

Με άλλα λόγια, κάθε κορυφή του γράφου εξαρτήσεων συνδέεται μέσω ακμών με εκείνες μόνο τις κορυφές των οποίων τα αντίστοιχα γεγονότα είναι στοχαστικά εξαρτημένα από το γεγονός που αντιστοιχεί στην κορυφή αυτή. Επομένως, ο βαθμός (degree) $d(i)$ της κορυφής i αποτελεί μέτρο των στοχαστικών εξαρτήσεων του γεγονότος A_i, από την άποψη ότι μετράει τον αριθμό των γεγονότων από τα οποία το γεγονός A_i είναι στοχαστικά εξαρτημένο.

Ακολουθεί η διατύπωση και απόδειξη της συμμετρικής περίπτωσης (symmetric case) του Τοπικού Θεωρήματος.

Θεώρημα 36 (Το Τοπικό Θεώρημα, The Local Lemma)**.** Εστω τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ και έστω $d(i)$ ο βαθμός της κορυφής i (που αντιστοιχεί στο γεγονός A_i) στο γράφο στοχαστικών εξαρτήσεων G, όπου $1 \leq i \leq n$. Αν

$$\forall i: \ \Pr\{A_i\} \leq p \ \text{και} \ d(i) \leq d$$

τότε η συνθήκη

$$4dp < 1$$

συνεπάγεται ότι

$$\Pr\{\wedge_i \overline{A_i}\} > 0$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε καταρχήν την επαγωγική μέθοδο για να φράξουμε εκ των άνω την πιθανότητα πραγματοποίησης οποιουδήποτε ανεπιθύμητου γεγονότος A_i, δοθείσης της πραγματοποίησης της τομής ενός αριθμού από το πολύ s επιθυμητά γεγονότα $\overline{A_j}$. Η επαγωγή γίνεται ως προς τον αριθμό s. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε i και αν $|S| \leq s$, είναι

$$\Pr\left\{A_i | \wedge_{j \in S} \overline{A_j}\right\} \leq 2p$$

(Τονίζουμε ότι το παραπάνω φράγμα υπαινίσσεται μικρές ποσοτικά στοχαστικές εξαρτήσεις, αφού η πραγματοποίηση των s γεγονότων είναι δυνατό να αυξήσει το άνω φράγμα για την πιθανότητα κάθε επιμέρους ανεπιθύμητου γεγονότος από p σε μόνο $2p$ το πολύ).

Είναι φανερό ότι για $s = 0$ το ζητούμενο ισχύει από την υπόθεση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, και για την απλούστευση της απόδειξης, θα δείξουμε το ζητούμενο αλλάζοντας την αρίθμηση του κάθε φορά i σε n και των μελών του S σε $S = \{1, \ldots, s\}$ ώστε αν $x > d$ τότε $\{n, x\} \notin G$ (με άλλα λόγια, τα στοχαστικά εξαρτημένα από το A_n γεγονότα, που είναι το πολύ d από την υπόθεση, βρίσκονται ανάμεσα στα πρώτα d γεγονότα σύμφωνα με τη νέα αρίθμηση).

Σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε ότι

$$\Pr\{A_n | \overline{A_1} \cdots \overline{A_s}\} = \frac{\Pr\{A_n \overline{A_1} \cdots \overline{A_d} | \overline{A_{d+1}} \cdots \overline{A_s}\}}{\Pr\{\overline{A_1} \cdots \overline{A_d} | \overline{A_{d+1}} \cdots \overline{A_s}\}}$$

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να φράξουμε κατάλληλα τον αριθμητή και τον παρανομαστή του κλάσματος αυτού. Για τον αριθμητή (και χρησιμοποιώντας την απλή παρατήρηση ότι η πιθανότητα ενός γεγονότος δεν είναι δυνατό να μεγαλώσει αν πάρουμε την τομή του με κάποιο άλλο γεγονός) είναι

$$\Pr\{A_n\overline{A_1}\cdots\overline{A_d}|\overline{A_{d+1}}\cdots\overline{A_s}\} \leq \Pr\{A_n|\overline{A_{d+1}}\cdots\overline{A_s}\} = \Pr\{A_n\} \leq p$$

αφού το γεγονός A_n είναι, εξαιτίας της αρίθμησης που εισαγάγαμε, στοχαστικά ανεξάρτητο από τα γεγονότα με δείκτη μεγαλύτερο από d.

Από την άλλη, εξαιτίας της επαγωγικής υπόθεσης και από το ότι η πιθανότητα της ένωσης γεγονότων είναι το πολύ ίση με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων, έχουμε για τον παρανομαστή ότι:

$$\begin{aligned}\Pr\{\overline{A_1}\cdots\overline{A_d}|\overline{A_{d+1}}\cdots\overline{A_s}\} &\geq 1-\sum_{i=1}^{d}\Pr\{A_i|\overline{A_{d+1}}\cdots\overline{A_s}\}\\ &\geq 1-\sum_{i=1}^{d}2p \qquad (\text{επαγωγή})\\ &= 1-2pd > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω φράγματα για αριθμητή και παρανομαστή, το κλάσμα γίνεται

$$\Pr\{A_n|\overline{A_1}\cdots\overline{A_s}\} < \frac{p}{1/2} = 2p$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Επομένως, και χρησιμοποιώντας επαναληπτικά τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας γεγονότων, έχουμε για την πιθανότητα της τομής των επιθυμητών γεγονότων ότι

$$\Pr\{\overline{A_1}\cdots\overline{A_n}\} = \prod_{i=1}^{n}\Pr\{\overline{A_i}|\overline{A_1}\cdots\overline{A_{i-1}}\} > \prod_{i=1}^{n}(1-2p) > 0$$

αφού η συνθήκη $4dp < 1$ και επειδή η μη τετριμμένη περίπτωση είναι $d \geq 1$ (για $d = 0$ δεν υπάρχουν στοχαστικές εξαρτήσεις και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ακριβώς $(1-p)^n$, δηλαδή θετική) συνεπάγεται $p < \frac{1}{4d} \leq \frac{1}{4}$, δηλαδή $2p < \frac{1}{2}$ οπότε $1-2p > \frac{1}{2} > 0$. □

Παρατηρούμε ότι η απαιτούμενη συνθήκη $4dp < 1$ ώστε η πιθανότητα ύπαρξης να είναι θετική παρά τις στοχαστικές εξαρτήσεις, συνεπάγεται μια αντίστροφα ανάλογη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος της συνολικής στοχαστικής εξάρτησης (μέτρο της οποίας είναι το άνω φράγμα d των βαθμών του γράφου εξαρτήσεων) και την πιθανότητα καθενός από τα ανεπιθύμητα γεγονότα που φράσσεται από τα πάνω από το p. Η σχέση αυτή συμφωνεί καταρχήν με τη διαίσθηση, αφού, για παράδειγμα, μια μικρή πιθανότητα p για την ικανοποίηση των ανεπιθύμητων γεγονότων A_i συνεπάγεται μεγάλη πιθανότητα ικανοποίησης για τα επιθυμητά γεγονότα $\overline{A_i}$, οπότε η πιθανότητα της τομής των γεγονότων αυτών είναι δυνατό να παραμένει αυστηρά θετική ακόμα και στην περίπτωση που οι στοχαστικές εξαρτήσεις είναι μεγάλες.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας ότι το ισχυρότατο αυτό θεώρημα αποδείχτηκε από τους P. Erdös και L. Lovász ([21]) στα 1975 και αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία σα Λήμμα του Lovász (Lovász Local Lemma). Στις επόμενες ενότητες, περιγράφονται ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου η εφαρμογή του θεωρήματος οδηγεί σε σημαντικές, σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους, βελτιώσεις. Επίσης, τονίζουμε ότι δεν έχει μέχρι σήμερα παρουσιαστεί άλλος τρόπος απόδειξης αυτών των βελτιωμένων φραγμάτων, γεγονός που επιβεβαιώνει τη δύναμη και δικαιολογεί τη φήμη του θεωρήματος.

5.4 Ενα καλύτερο φράγμα για διαγώνιους αριθμούς Ramsey

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι διαγώνιος αριθμός Ramsey $R(k,k)$ τάξης k καλείται ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n έτσι ώστε σε οποιονδήποτε διχρωματισμό των ακμών του πλήρους γράφου n κορυφών να περιέχεται τουλάχιστον ένας μονοχρωματικός πλήρης υπογράφος μεγέθους k. Οπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου, ο ακριβής υπολογισμός των διαγώνιων αριθμών Ramsey είναι εξαιρετικά δύσκολος. Είδαμε επίσης ότι μια από τις πρώτες εφαρμογές στην ιστορία της πιθανοτικής μεθόδου υπήρξε ο υπολογισμός κάτω και άνω φραγμάτων για τους αριθμούς αυτούς, σε μια προσπάθεια για την κατά το δυνατόν ικανοποιητικότερη προσέγγισή τους. Πραγματικά, χρησιμοποιώντας τη βασική μέθοδο της θετικής πιθανότητας υπολογίσαμε, για διαγώνιους αριθμούς Ramsey τάξης k, το ακόλουθο κάτω φράγμα

$$R(k,k) \geq \frac{k}{e\sqrt{2}}\, 2^{k/2}$$

και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαγραφής, πετύχαμε τη βελτίωση του φράγματος αυτού κατά έναν $\sqrt{2}$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα, αποδεικνύοντας ότι

$$R(k,k) \geq \frac{k}{e}\, 2^{k/2}$$

Σε αυτήν την ενότητα, και χρησιμοποιώντας το Τοπικό Θεώρημα, θα πετύχουμε την απόδειξη ενός ακόμα καλύτερου (μεγαλύτερου κατά έναν $\sqrt{2}$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα σε σχέση με τη μέθοδο της διαγραφής και διπλάσιου σε σχέση με το φράγμα της βασικής μεθόδου της θετικής πιθανότητας) κάτω φράγματος. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 37.

$$R(k,k) \geq \frac{\sqrt{2}}{e}\, k\, 2^{k/2}$$

Απόδειξη: Εστω ένας τυχαίος διχρωματισμός των ακμών ενός πλήρους γράφου n κορυφών, έστω S ένα οποιοδήποτε σύνολο k κορυφών του γράφου αυτού και έστω A_S το γεγονός "το S είναι μονοχρωματικό". Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε ένα όσο το δυνατό μεγαλύτερο κάτω φράγμα για την ικανοποίηση της ιδιότητας ύπαρξης (με άλλα λόγια, αναζητούμε έναν όσο το δυνατό μεγαλύτερο αριθμό n για τον οποίο να μην ισχύει η ιδιότητα της ύπαρξης μονοχρωματικού πλήρους υπογράφου μεγέθους k) τα γεγονότα A_S είναι τα επιμέρους ανεπιθύμητα γεγονότα του Τοπικού Θεωρήματος και η πιθανότητα ικανοποίησης καθενός από αυτά είναι

$$\Pr\{A_S\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

με άλλα λόγια το άνω φράγμα p για τις επιμέρους πιθανότητες του Τοπικού Θεωρήματος είναι

$$p = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα d του γράφου στοχαστικών εξαρτήσεων.

Είναι φανερό ότι ένα γεγονός A_S εξαρτάται στοχαστικά από ένα γεγονός A_T, αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σύνολα κορυφών S και T έχουν μία τουλάχιστον κοινή ακμή, δηλαδή τουλάχιστον 2 κοινές κορυφές, με άλλα λόγια

$$d = |\{T : |S \cap T| \geq 2\}|$$

(Στην πραγματικότητα, αυτός είναι ο βαθμός της κορυφής που αντιστοιχεί στο γεγονός A_S, αλλά λόγω της συμμετρίας του πλήρους γράφου ο βαθμός αυτός είναι ίδιος και για όλες τις άλλες κορυφές του γράφου εξαρτήσεων).

Για να εξασφαλίσουμε 2 τουλάχιστον κοινές κορυφές για τα S, T, επιλέγουμε καταρχήν 2 κορυφές του T από τις k δυνατές κορυφές του συνόλου S (αυτό συμβαίνει με $\binom{k}{2}$ δυνατούς τρόπους). Οι υπόλοιπες $k-2$ κορυφές του T μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα από τις $n-2$ εναπομένουσες κορυφές του πλήρους γράφου (έτσι συμπεριλαμβάνουμε και τις υπόλοιπες $k-2$ κορυφές του S στις κορυφές που είναι δυνατό να επιλεγούν, ακριβώς για να καλύψουμε και τις περιπτώσεις όπου $|S \cap T| > 2$). Επομένως

$$d = \binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2} < \binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$$

Εφαρμόζοντας το Τοπικό Θεώρημα, η συνθήκη

$$4\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

εξασφαλίζει θετική πιθανότητα για το γεγονός $\wedge_S \overline{A_S}$ (δηλαδή για τη μη ύπαρξη μονοχρωματικού πλήρους υπογράφου μεγέθους k). Επομένως, τα n που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα, δεν εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός τουλάχιστον μονοχρωματικού πλήρους υπογράφου μεγέθους k, οπότε η μέγιστη τιμή του n που εξακολουθεί να ικανοποιεί την ανισότητα αυτή αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το πρόβλημα που εξετάζουμε, δηλαδή

$$\text{εάν} \quad 4\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}2^{1-\binom{k}{2}} < 1 \quad \text{τότε} \quad R(k,k) > n$$

και τελικά

$$R(k,k) \geq \frac{\sqrt{2}}{e}\, k\, 2^{k/2}(1+o(1))$$

μετά από ασυμπτωτική ανάλυση της υπόθεσης της παραπάνω συνεπαγωγής. □

Με αυτό το θεώρημα ολοκληρώνουμε τη μελέτη των διαγώνιων αριθμών Ramsey στα πλαίσια αυτού του βιβλίου. Το γεγονός ότι το κάτω φράγμα που επιτυγχάνει για τους αριθμούς αυτούς το Τοπικό Θεώρημα είναι το καλύτερο γνωστό μέχρι σήμερα, δείχνει τη δύναμη του θεωρήματος. Από την άλλη μεριά, η συνολική βελτίωση, όπως αναφέραμε και στην αρχή της ενότητας αυτής, είναι μάλλον μικρή και η απόσταση από το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα (βλ. ενότητα 1.5) παραμένει αρκετά μεγάλη. Επομένως, ακόμα και η ικανοποιητική προσέγγιση των αριθμών Ramsey παραμένει ένα εξαιρετικά δύσκολο και ενδιαφέρον θέμα προς παραπέρα διερεύνηση.

5.5 Ενα ισχυρότερο φράγμα για την ιδιότητα van der Waerden

Η βελτίωση υπαρχόντων αποτελεσμάτων για διαγώνιους αριθμούς Ramsey που πετύχαμε στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιώντας το Τοπικό Θεώρημα, είναι μάλλον μικρή, αφού οδήγησε σε ένα μόλις κατά έναν σταθερό (και ίσο με $\sqrt{2}$) πολλαπλασιαστικό παράγοντα μεγαλύτερο κάτω φράγμα.

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε μια αριθμοθεωρητική εφαρμογή όπου τα αποτελέσματα της χρησιμοποίησης του Τοπικού Θεωρήματος είναι περισσότερο εντυπωσιακά. Πιο συγκεκριμένα, θα βελτιώσουμε το κάτω φράγμα για την ιδιότητα van der Waerden που είχαμε αποδείξει στην ενότητα 1.10 από

$$W(k) > 2^{k/2}$$

σε

$$W(k) > \frac{2^k}{8k}$$

(η επιφερόμενη βελτίωση είναι υποεκθετική (subexponential) αφού ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας βελτίωσης είναι $\frac{2^{k/2}}{8k}$).

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι η ιδιότητα van der Waerden (βλέπε αναλυτικά στην ενότητα 1.10) αναφέρεται στην ύπαρξη μιας τουλάχιστον μονοχρωματικής αριθμητικής προόδου k όρων σε οποιονδήποτε διχρωματισμό των αριθμών $1, \ldots, n$. Πιο συγκεκριμένα, καλούμε $W(k)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n, έτσι ώστε ο οποιοσδήποτε διχρωματισμός των αριθμών $1, \ldots, n$ να περιέχει τουλάχιστον μία μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο με k όρους.

Θεώρημα 38.

$$W(k) > \frac{2^k}{8k}$$

Απόδειξη: Διχρωματίζουμε τους αριθμούς $1, \ldots, n$ ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα. Εστω S μια συγκεκριμένη αριθμητική πρόοδος με k όρους και έστω A_S το (ανεπιθύμητο, προκειμένου για τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος) γεγονός "η S είναι μονοχρωματική".

Η πιθανότητα p του Τοπικού Θεωρήματος είναι

$$p = \Pr\{A_S\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{1-k}$$

Από την άλλη, δύο γεγονότα A_S, A_T είναι στοχαστικά εξαρτημένα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες αριθμητικές πρόοδοι S, T είναι μη ξένες μεταξύ τους. Αλλά κάθε αριθμητική πρόοδος S έχει κοινούς αριθμούς με το πολύ nk (η απόδειξη του γεγονότος αυτού αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη) άλλες αριθμητικές προόδους T μεγέθους k, επομένως

$$d \leq nk$$

Χρησιμοποιώντας το Τοπικό Θεώρημα, έχουμε ότι

$$\text{εάν} \;\; 4\,n\,k\,2^{1-k} < 1 \;\; \text{τότε} \;\; \Pr\{\wedge_S \overline{A_S}\} > 0 \Rightarrow W(k) > n$$

και τελικά

$$W(k) > \frac{2^k}{8k}$$

□

5.6 Η γενική μορφή του Τοπικού Θεωρήματος

Η γενική μορφή του Τοπικού Θεωρήματος αναφέρεται στην περίπτωση όπου οι πιθανότητες των επιμέρους γεγονότων A_i μπορεί να είναι διαφορετικές. Στην περίπτωση αυτή δεν ενδείκνυται η χρήση ενός ενιαίου άνω φράγματος p (όπως στη συμμετρική περίπτωση) για τις πιθανότητες αυτές, από την άποψη ότι ένα ενιαίο φράγμα δεν περιγράφει με ακρίβεια τις διαφορετικές αυτές πιθανότητες και επομένως δεν οδηγεί σε ισχυρά αποτελέσματα.

Η απόδειξη της γενικής μορφής του Τοπικού Θεωρήματος είναι παραπλήσια με εκείνη της συμμετρικής περίπτωσης και γι αυτόν το λόγο την παραλείπουμε και απλά διατυπώνουμε το θεώρημα και σχολιάζουμε τα περισσότερο ενδιαφέροντα σημεία του, η διευκρίνιση των οποίων θα βοηθήσει στην κατανόηση της εφαρμογής του κατά τον υπολογισμό ενός ισχυρού κάτω φράγματος για μη διαγώνιους αριθμούς Ramsey στην επόμενη ενότητα. Πάντως, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [4], [21] για την απόδειξη του Θεωρήματος στη γενική του μορφή.

Θεώρημα 39 (Το Τοπικό Θεώρημα, η γενική περίπτωση)**.** Εστω τα (ανεπιθύμητα) γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ και έστω G ο αντίστοιχος γράφος στοχαστικών εξαρτήσεων. Αν υπάρχουν αριθμοί $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1)$ έτσι ώστε, για κάθε i,

$$\Pr\{A_i\} < x_i \prod_{\{i,j\} \in G} (1 - x_j)$$

τότε

$$\Pr\{\wedge_i \overline{A_i}\} > \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) > 0$$

□

Ακολουθούν σε ορισμένες παρατηρήσεις για το προηγούμενο θεώρημα, σε μια προσπάθεια "ανάγνωσής" του υπό το φως του αντίστοιχου θεωρήματος για τη συμμετρική περίπτωση:

- Είναι φανερό, βασικά από την τελευταία σχέση του θεωρήματος όπου υπολογίζεται ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα της τομής των γεγονότων $\overline{A_i}$, ότι οι αριθμοί x_i "αντιστοιχούν" διαισθητικά στις (γενικά διαφορετικές) πιθανότητες των γεγονότων A_i (αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι ταυτίζονται με τις πιθανότητες αυτές).

- Η ακόλουθη απαιτούμενη συνθήκη για να ισχύει το θεώρημα

$$\Pr\{A_i\} < x_i \prod_{\{i,j\} \in G} (1 - x_j)$$

(όπως και η αντίστοιχη συνθήκη $4dp < 1$ στη συμμετρική περίπτωση) υπαινίσσεται την ύπαρξη μικρών στοχαστικών εξαρτήσεων, αφού ουσιαστικά φράσσει εκ των άνω τη δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος δοθείσης της πραγματοποίησης των συμπληρωμάτων των γεγονότων από τα οποία το γεγονός αυτό εξαρτάται στοχαστικά.

- Πραγματικά, η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη για να αποδειχθεί (με επαγωγή στο μέγεθος του S όπως και στη συμμετρική περίπτωση) η σχέση

$$\Pr\{A_i | \wedge_{j \in S} \overline{A_j}\} < x_i$$

η οποία, φράσσοντας εκ των άνω την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος δοθείσης της μη πραγματοποίησης άλλων γεγονότων, υποδεικνύει ότι οι στοχαστικές εξαρτήσεις είναι μικρές.

Στην επόμενη παράγραφο, και στηριζόμενοι στις παρατηρήσεις που μόλις διατυπώσαμε, θα εφαρμόσουμε τη γενικευμένη μορφή του Τοπικού Θεωρήματος κατά τον υπολογισμό ενός ισχυρού κάτω φράγματος για μη διαγώνιους αριθμούς Ramsey.

5.7 Ενα ισχυρό φράγμα για μη διαγώνιους αριθμούς Ramsey

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή του Τοπικού Θεωρήματος, ένα κάτω φράγμα για τους $R(k,3)$ μη διαγώνιους αριθμούς Ramsey. Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι καλούμε αριθμό Ramsey $R(k,l)$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n, έτσι ώστε σε οποιονδήποτε διχρωματισμό (π.χ. με τα χρώματα κόκκινο, μπλε) των ακμών του πλήρους γράφου n κορυφών, να περιέχεται ένας τουλάχιστον κόκκινος πλήρης υπογράφος μεγέθους k ή ένας τουλάχιστον μπλε πλήρης υπογράφος μεγέθους l.

Θεώρημα 40. Είναι

$$R(k,3) > \frac{c\,k^2}{\ln^2 k}$$

όπου c μια σταθερά.

Απόδειξη: Χρωματίζουμε κάθε ακμή του πλήρους γράφου ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα με χρώμα κόκκινο (μπλε) με πιθανότητα p (αντίστοιχα, $1-p$). Εστω T (αντίστοιχα, S) ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο με 3 (αντίστοιχα, k) κορυφές και A_T (αντίστοιχα, A_S) το γεγονός "το σύνολο T(αντίστοιχα, S) μονοχρωματίστηκε κόκκινο (αντίστοιχα, μπλε)". Είναι φανερό ότι

$$\Pr\{A_T\} = p^3 \text{ και } \Pr\{A_S\} = (1-p)^{\binom{k}{2}}$$

Τα $\binom{n}{3}$ στο πλήθος γεγονότα A_T και τα $\binom{n}{k}$ στο πλήθος γεγονότα A_S αποτελούν τα ανεπιθύμητα γεγονότα του Τοπικού Θεωρήματος. Εστω $x = x_T$ ένας αριθμός που αντιστοιχεί (με ενιαίο τρόπο και σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της προηγούμενης ενότητας) στα γεγονότα A_T και $y = y_S$ ένας αντίστοιχος αριθμός για τα γεγονότα A_S. Για κάθε ένα από τα γεγονότα A_T η απαιτούμενη συνθήκη του θεωρήματος

$$\Pr\{A_T\} < x_T \prod_{\{i_T,j\}\in G} (1-x_j)$$

(όπου i_T η κορυφή του γράφου εξαρτήσεων που αντιστοιχεί στο γεγονός A_T) γίνεται

$$p^3 < x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{k}}$$

αφού υπάρχουν $\binom{3}{2}(n-3) \sim 3n$ γεγονότα τύπου $A_{T'}$ που είναι στοχαστικά εξαρτημένα από το A_T (τόσα σύνολα T' έχουν τουλάχιστον 2 κοινές κορυφές με το T) και, προφανώς, το πολύ $\binom{n}{k}$ γεγονότα τύπου A_S τα οποία είναι στοχαστικά εξαρτημένα από το A_T.

Με παρόμοια επιχειρήματα, η αντίστοιχη συνθήκη για τα γεγονότα A_S είναι

$$(1-p)^{\binom{k}{2}} < y(1-x)^{k^2 n/2}(1-y)^{\binom{n}{k}}$$

αφού υπάρχουν $\binom{k}{2}(n-2) \sim k^2 n/2$ τρόποι να επιλεγούν σύνολα τύπου T και, προφανώς, $\binom{n}{k}$ το πολύ σύνολα τύπου S' που να έχουν τουλάχιστον 2 κοινές κορυφές με το σύνολο S.

Επομένως, και σύμφωνα με το Τοπικό Θεώρημα, αν υπάρχουν αριθμοί $p \in (0,1)$ και $0 \le x, y < 1$ έτσι ώστε

$$p^3 < x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{k}}$$

και

$$(1-p)^{\binom{k}{2}} < y(1-x)^{k^2 n/2}(1-y)^{\binom{n}{k}}$$

τότε

$$\Pr\{(\wedge_S \overline{A_S}) \cap (\wedge_T \overline{A_T})\} > 0 \text{ δηλαδή } R(k,3) > n$$

Επιλέγοντας τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το $k = k(n)$ ώστε να υπάρχουν αριθμοί p, x, y που να ικανοποιούν τις παραπάνω ανισότητες, παίρνουμε τελικά

$$R(k,3) > \frac{c\,k^2}{\ln^2 k}$$

όπου c μια σταθερά. □

Το αποτέλεσμα αυτό, που βελτιώνει σημαντικά το φράγμα

$$R(k,3) > k^{3/2+o(1)}$$

το οποίο μπορεί να αποδειχτεί με τη μέθοδο της διαγραφής, οφείλεται στον J. Spencer ([62]) και είναι χαρακτηριστικό της δύναμης του Τοπικού Θεωρήματος.

Κεφάλαιο 6

Η ανισότητα του Janson

6.1 Αθροίσματα σχεδόν ανεξάρτητων μεταβλητών και η κατανομή Poisson

Στην παράγραφο 4.5 αποδώσαμε τα όρια των δυνατοτήτων της μεθόδου της δεύτερης ροπής στην πολυωνυμικά μικρή πιθανότητα απόκλισης μιας τυχαίας μεταβλητής από τη μέση της τιμή που προσφέρει η ανισότητα Chebyshev, στην οποία εδράζεται η μέθοδος αυτή.

Αντίθετα, στην περίπτωση της κανονικής κατανομής (normal distribution), η πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή είναι σημαντικά καλύτερη (μικρότερη) και πιο συγκεκριμένα εκθετικά μικρή.

Επίσης, επικαλούμενοι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) αποδείξαμε εκθετικά μικρές πιθανότητες απόκλισης από τη μέση τιμή αθροισμάτων ισόνομων (με ίδια μέση τιμή και διασπορά), στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, στηριζόμενοι στην ασυμπτωτική προσέγγιση τέτοιων αθροισμάτων από την κανονική κατανομή. Επισημάναμε μάλιστα το γεγονός ότι η απαίτηση για "πλήρη" στοχαστική ανεξαρτησία σαν απαραίτητη προϋπόθεση για τις εκθετικά μικρές αυτές πιθανότητες απόκλισης, μπορεί να αντικατασταθεί από τη λιγότερο αυστηρή (και περισσότερο γενική, αφού εμφανίζεται συχνότερα στην πράξη) απαίτηση για "σχεδόν" ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τη δεύτερη από τις δύο βασικότερες (η άλλη είναι το Τοπικό Θεώρημα που αναλύθηκε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο) τεχνικές αντιμετώπισης της περίπτωσης της "σχεδόν πλήρους" στοχαστικής ανεξαρτησίας. Πιο συγκεκριμένα, η τεχνική αυτή επιτυγχάνει εκθετικά μικρές πιθανότητες απόκλισης από τη μέση τιμή αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες, αν και δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, μπορούν να θεωρηθούν (εξαιτίας του μικρού μεγέθους των στοχαστικών εξαρτήσεων) "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητες.

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται βασικά στην προσέγγιση ενός αθροίσματος "σχεδόν" ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή Poisson. Η συσχέτιση με την κατανομή Poisson δεν είναι καθόλου τυχαία, αλλά οφείλεται βασικά στο συνδυασμό των δύο χαρακτηριστικών ιδιοτήτων που ακολουθούν:

- Εξαιτίας του συνδυαστικού (combinatorial) χαρακτήρα των εφαρμογών τις οποίες εξετάζουμε, αλλά και εξαιτίας της στοχαστικής ανεξαρτησίας των γεγονότων στα τυχαία πειράματα με τα οποία κατασκευάζουμε τους πιθανοτικούς δειγματοχώρους, οι δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές που χρησιμοποιούμε είναι, συνήθως, κατανεμημένες διωνυμικά.

- Από την άλλη, έχουμε ήδη αναφερθεί (βλέπε ενότητα 1.3) στην εγγενή σχέση της πιθανοτικής μεθόδου με την ασυμπτωτική ανάλυση. Αλλά, ακριβώς στην περίπτωση της ασυμπτωτικής ανάλυσης, η διωνυμική κατανομή έχει την ιδιότητα να προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κατανομή Poisson (βλέπε π.χ. τα [25], [41]).

Οι ιδιότητες αυτές εξηγούν σε μεγάλο βαθμό τον κεντρικό ρόλο που κατέχει στην πιθανοτική μέθοδο η κατανομή Poisson και ειδικότερα το γεγονός ότι αρκετά συχνά οι τυχαίες μεταβλητές που αντιστοιχούν στα εξεταζόμενα γεγονότα είναι κατανεμημένες κατά Poisson (ή τουλάχιστον την προσεγγίζουν ικανοποιητικά).

Είναι επίσης γνωστό (βλέπε π.χ. τα [25], [41] για μια απόδειξη βασισμένη στην έννοια της πιθανογεννήτριας μιας κατανομής) ότι το άθροισμα στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Poisson, είναι επίσης κατανεμημένο κατά Poisson. Επομένως, αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και κατανεμημένες κατά Poisson δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές (που αντιστοιχούν στις υπό εξέταση δομές που ικανοποιούν μια ιδιότητα) και έχουν όλες μέση τιμή μ, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

που αποτελεί το άθροισμα των μεταβλητών αυτών (και επομένως μετράει την πιθανότητα ικανοποίησης ή όχι της επιθυμητής ιδιότητας, ανάλογα με το μέγεθος της πιθανότητας της τιμής 0), είναι επίσης κατανεμημένη κατά Poisson ασυμπτωτικά και έχει μέση τιμή $n\mu$, οπότε

$$\Pr\{X = 0\} \simeq e^{-n\mu}$$

Αυτή ακριβώς η σχέση προσφέρει τη δυνατότητα αποδείξεων ύπαρξης δομών που πληρούν μια επιθυμητή ιδιότητα, από την άποψη ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι

$$\Pr\{X = 0\} \to 0 \text{ όταν } n \to \infty$$

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιάσουμε τις δύο μορφές της ανισότητας του Janson, που επιτρέπει αυτήν ακριβώς τη γενίκευση της λογικής που περιγράψαμε προηγουμένως στην περίπτωση αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών που όμως είναι "σχεδόν" στοχαστικά ανεξάρτητες.

6.2 Οι ανισότητες του Janson: παρουσίαση και παρατηρήσεις

Οπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, η ικανοποίηση μιας επιθυμητής ιδιότητας συνήθως συνίσταται στη μη πραγματοποίηση κάποιων επιμέρους ανεπιθύμητων γεγονότων, έστω $B_i, i \in I$. Πιο συγκεκριμένα επιθυμούμε κάθε φορά να δείξουμε ότι

$$\Pr\{\wedge_{i \in I} \overline{B_i}\} > 0$$

Αν τα γεγονότα B_i είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, ισχύει

$$\Pr\{\wedge_{i\in I}\overline{B_i}\} = \prod_{i\in I}\Pr\{\overline{B_i}\}$$

Στην περίπτωση που τα γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα αλλά "σχεδόν" ανεξάρτητα, οι ανισότητες του Janson μας επιτρέπουν να αντιμετωπίζουμε τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας (που πλέον δεν είναι ίσα) σαν να ήταν "σχεδόν" ίσα.

Ακολουθεί ένας αυστηρός ορισμός της έννοιας της "σχεδόν πλήρους" στοχαστικής ανεξαρτησίας γεγονότων, που βασίζεται στην ποσότητα Δ (πρόκειται για την ποσότητα που ορίσαμε μελετώντας τη μέθοδο της δεύτερης ροπής) που μετρά την ταυτόχρονη ικανοποίηση εξαρτημένων μεταβλητών και, όπως θα δείξουμε, αποτελεί μέτρο του μεγέθους των εμφανιζόμενων στοχαστικών εξαρτήσεων.

Για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη, επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της ποσότητας αυτής.

Εστω Ω ένας πεπερασμένος δειγματοχώρος και R ένα τυχαίο υποσύνολό του που παράγεται από τη σχέση

$$\Pr\{r \in R\} = p_r$$

όπου αυτά τα γεγονότα $r \in R$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητα για τα διάφορα $r \in \Omega$. Εστω $A_i \subseteq R$ και έστω τα (ανεπιθύμητα) γεγονότα $B_i =$ "$A_i \subseteq R$" με αντίστοιχες δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές X_i $(i \in I)$. Η τυχαία μεταβλητή

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

μετράει τον αριθμό των πραγματοποιηθέντων ανεπιθύμητων γεγονότων (δηλαδή των γεγονότων "$A_i \subseteq R$") και επομένως τα γεγονότα

$$X = 0 \text{ και } \wedge_{i\in I}\overline{B_i}$$

είναι ταυτόσημα. Στη συνέχεια ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής:

$$i \sim j \iff i \neq j \text{ και } A_i \cap A_j \neq 0$$

που συνεπάγεται ότι αν είναι $i \neq j$ και δεν ισχύει η σχέση $i \sim j$ τότε τα γεγονότα B_i, B_j είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A_i, A_j. Επίσης, αν $i \notin J \subset I$ και για όλα τα $j \in J$ δεν ισχύει η σχέση $i \sim j$, τότε το γεγονός B_i είναι αμοιβαία στοχαστικά ανεξάρτητο από οποιονδήποτε δυαδικό λογικό συνδυασμό των B_j.

Ορισμός 15.

$$\Delta = \sum_{i\sim j}\Pr\{B_i \wedge B_j\}$$

όπου τα ζευγάρια των γεγονότων B_i, B_j λαμβάνονται ως διατεταγμένα.

$\square$

Εστω

$$M = \prod_{i \in I} \Pr\{\overline{B_i}\}$$

δηλαδή M θα ήταν η πιθανότητα του γεγονότος $\wedge_{i \in I} \overline{B_i}$ στην περίπτωση όπου τα γεγονότα B_i ήταν στοχαστικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα 41 (Ανισότητα του Janson)**.** Εστω τα $B_i \, (i \in I)$, Δ, M ορισμένα όπως προηγουμένως και έστω ότι η πιθανότητα καθενός από τα ανεπιθύμητα γεγονότα φράσσεται εκ των άνω σύμφωνα με τη σχέση $\Pr\{B_i\} \leq \epsilon$ (με άλλα λόγια το ϵ είναι, σε κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή, ένα ενιαίο άνω φράγμα για τις επιμέρους πιθανότητες των εξεταζόμενων ανεπιθύμητων γεγονότων). Τότε

$$M \leq \Pr\{\wedge_{i \in I} \overline{B_i}\} \leq M \, \exp\left(\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Delta}{2}\right)$$

$\square$

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [4] για μια απόδειξη της ανισότητας του Janson, τόσο στη βασική μορφή που μόλις διατυπώσαμε όσο και στη γενικευμένη μορφή που περιγράφεται αργότερα. Στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, περιοριζόμαστε σε ορισμένες κρίσιμες ποιοτικές παρατηρήσεις, που αποκαλύπτουν τη βασική συμπεριφορά της ανισότητας και προετοιμάζουν το έδαφος για μια πιο αυστηρή, τεχνική ανάλυση στη συνέχεια.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση όπου

- οι πιθανότητες των επιμέρους ανεπιθύμητων γεγονότων είναι μικρές (π.χ. $\epsilon = o(1)$) και
- οι στοχαστικές εξαρτήσεις (μέτρο των οποίων αποτελεί η ποσότητα Δ που χαρακτηρίζει την ταυτόχρονη ανά δύο ικανοποίηση των εξαρτημένων μεταβλητών) είναι πολύ μικρές (π.χ. $\Delta = o(1)$)

τότε είναι

$$\exp\left(\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Delta}{2}\right) \to 1$$

και επομένως τα δύο ακραία μέλη της (διπλής) ανισότητας του Janson είναι περίπου ίσα, δηλαδή

$$\Pr\{\wedge_{i \in I} \overline{B_i}\} \simeq M = \prod_{i \in I} \Pr\{\overline{B_i}\}$$

επομένως η συνθήκη της "σχεδόν" πλήρους στοχαστικής ανεξαρτησίας (δηλαδή βασικά η απαίτηση για μικρά Δ) μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά την $\Pr\{X = 0\}$ με την τιμή M που θα ίσχυε στην περίπτωση της πλήρους ανεξαρτησίας.

Η ιδιαίτερη σημασία αυτής της ικανοποιητικά μικρής απόστασης ανάμεσα στην πλήρη και στη "σχεδόν" πλήρη στοχαστική ανεξαρτησία φαίνεται από την ανάλυση που ακολουθεί:

Εστω

$$\mu = E(X) = \sum_{i \in I} \Pr\{B_i\}$$

Επομένως, και χρησιμοποιώντας τη σχέση $1-x \leq e^{-x}$, είναι

$$\begin{aligned} M &= \prod_{i\in I} \Pr\{\overline{B_i}\} = \prod_{i\in I} (1-\Pr\{B_i\}) \\ &\leq \prod_{i\in I} e^{-\Pr\{B_i\}} = \exp\left(-\sum_{i\in I}\Pr\{B_i\}\right) = e^{-\mu} \end{aligned}$$

δηλαδή τελικά

$$\begin{aligned} \Pr\{X=0\} &= \Pr\{\wedge_{i\in I}\overline{B_i}\} \leq e^{-\mu}\exp\left(\frac{1}{1-\epsilon}\frac{\Delta}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\mu + \frac{1}{1-\epsilon}\frac{\Delta}{2}\right) \end{aligned}$$

και συνολικά

$$e^{-\mu} \leq \Pr\{X=0\} \leq \exp\left(-\mu + \frac{1}{1-\epsilon}\frac{\Delta}{2}\right)$$

Στην αρκετά συνηθισμένη περίπτωση όπου $\epsilon = o(1)$ και $\Delta = o(1)$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\Pr\{X=0\} \to e^{-\mu}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί επί της ουσίας μια τεχνική τεκμηρίωση της προσέγγισης αθροισμάτων "σχεδόν" ανεξάρτητων δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή Poisson (τουλάχιστον για την τιμή $X=0$) στην οποία είχαμε αναφερθεί με ποιοτικό τρόπο στην προηγούμενη ενότητα. Επίσης, συνιστά μεθοδολογία απόδειξης ύπαρξης, αφού δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσει κανείς πιθανότητα μικρότερη της μονάδας για τη μη πραγματοποίηση της επιθυμητής ιδιότητας (και επομένως θετική πιθανότητα για την πραγματοποίησή της). Ειδικότερα στην περίπτωση όπου $\mu \to \infty$ η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\Pr\{X=0\} \to 0$$

δηλαδή αποδεικνύει τη "σχεδόν βέβαιη" ύπαρξη της επιθυμητής δομής.

Στη συνέχεια, και ακριβώς επειδή αρκετά συχνά επιθυμούμε να αποδεικνύουμε τη σχεδόν βέβαιη ύπαρξη επιθυμητών δομών, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στο άνω φράγμα

$$\Pr\{X=0\} \leq \exp\left(-\mu + \frac{1}{1-\epsilon}\frac{\Delta}{2}\right)$$

Παρατηρούμε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για μια απόδειξη ύπαρξης είναι η συνθήκη

$$\Delta < 2\mu(1-\epsilon)$$

ώστε ο εκθέτης του άνω φράγματος να τείνει στο $-\infty$ όταν $\mu \to \infty$ και το άνω φράγμα να τείνει στο 0, έτσι ώστε $\Pr\{X=0\} \to 0$. Με άλλα λόγια, η ανισότητα του Janson, στη βασική της μορφή που μόλις παρουσιάσαμε, είναι χρήσιμη μόνο όταν οι στοχαστικές εξαρτήσεις είναι μικρές, ενώ οδηγεί σε τετριμμένα (προκειμένου για αποδείξεις ύπαρξης, και ιδιαίτερα σχεδόν βέβαιης ύπαρξης) αποτελέσματα όταν $\Delta \geq 2\mu(1-\epsilon)$.

Σε τέτοιες περιπτώσεις σχετικά μεγαλύτερων στοχαστικών εξαρτήσεων μπορούμε να καταφεύγουμε σε μια περισσότερο γενική εκδοχή της ανισότητας του Janson:

Θεώρημα 42 (Ανισότητα του Janson, γενικευμένη μορφή)**.** Αν στις υποθέσεις της βασικής ανισότητας του Janson προστεθεί η συνθήκη

$$\Delta \geq \mu(1-\epsilon)$$

τότε

$$\Pr\{\wedge_{i\in I}\overline{B_i}\} \leq \exp\left(-\frac{\mu^2(1-\epsilon)}{2\Delta}\right)$$

□

Η χρησιμότητα της ανισότητας αυτής φαίνεται χαρακτηριστικά στην περίπτωση όπου $\epsilon = o(1)$ (στην πραγματικότητα αρκεί απλά το ϵ να είναι μια σταθερά μικρότερη από τη μονάδα), $\mu \to \infty$ και $\gamma = \frac{\mu^2}{\Delta} \to \infty$, οπότε η ανισότητα συνεπάγεται

$$\Pr\{X = 0\} \leq e^{-\gamma}$$

δηλαδή η πιθανότητα μη ύπαρξης της επιθυμητής δομής όχι απλώς τείνει στο 0 αλλά ο ρυθμός σύγκλισης στο 0 είναι εκθετικός.

Επειδή και η βασική ανισότητα του Janson προσφέρει επίσης εκθετικά μικρή πιθανότητα μη ύπαρξης επιθυμητών δομών, μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο εκδοχές της ανισότητας του Janson σαν εξίσου ισχυρές και να εντοπίσουμε τη διαφορετική τους δύναμη στη μεγαλύτερη γενικότητα της δεύτερης μορφής.

Στο σημείο αυτό είναι πραγματικά επίκαιρο να επιχειρήσουμε μια σύγκριση της ανισότητας του Janson (π.χ. στη γενικευμένη της μορφή) με τη μέθοδο της δεύτερης ροπής, με κριτήριο τη δύναμη, από τη μια και τη γενικότητα, από την άλλη, των δύο τεχνικών.

Η μέθοδος της δεύτερης ροπής βασικά στηρίζεται στην (απορρέουσα από την ανισότητα του Chebyshev) σχέση (και στην υπόθεση ότι είναι $E(X) \to \infty$)

$$\Pr\{X = 0\} \leq \frac{Var(X)}{E^2(X)} \leq \frac{E(X)+\Delta}{E^2(X)} \to \frac{\Delta}{\mu^2} = \gamma^{-1}$$

που στην περίπτωση όπου $\gamma = \frac{\mu^2}{\Delta} \to \infty$ συνεπάγεται ότι η πιθανότητα μη ύπαρξης επιθυμητών δομών τείνει στο 0 αλλά με πολυωνυμικό ρυθμό σύγκλισης. Επομένως, από την άποψη της ταχύτητας σύγκλισης στο 0 της πιθανότητας αυτής, η ανισότητα του Janson είναι ισχυρότερη της μεθόδου της δεύτερης ροπής.

Από την άλλη, κάθε μια από τις ανισότητες του Janson είναι λιγότερο γενική από τη μέθοδο της δεύτερης ροπής αφού η γενικευμένη εκδοχή της Janson απαιτεί

$$\mu(1-\epsilon) \leq \Delta \ll \mu^2$$

και η βασική της εκδοχή

$$\Delta < 2\mu(1-\epsilon)$$

ενώ η δεύτερη ροπή αρκείται στην απαίτηση

$$\Delta \ll \mu^2$$

σαν απαραίτητη προϋπόθεση για την απόδειξη σχεδόν βέβαιης ύπαρξης. Επίσης, η "μικρότερη" γενικότητα των ανισοτήτων του Janson (τουλάχιστον όσον αφορά στη χρησιμοποίησή τους) οφείλεται ακριβώς στις (τεχνικά αυστηρές) προδιαγραφές κατασκευής των συνόλων A_i και των γεγονότων B_i.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα υπογραμμίζοντας ένα πραγματικά αξιοσημείωτο γεγονός: οι προϋποθέσεις των ανισοτήτων του Janson ($\epsilon = o(1)$ ή απλά ϵ σταθερό, θετικό και μικρότερο της μονάδας και $\Delta = o(1)$) που εξασφαλίζουν μια ικανοποιητική προσέγγιση της περίπτωσης της "σχεδόν" πλήρους ανεξαρτησίας από την πλήρη ανεξαρτησία, ισχύουν αρκετά συχνά. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει πως η "στενή σχέση" της πλήρους και της "σχεδόν" πλήρους ανεξαρτησίας είναι ένα μάλλον εγγενές χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζει η πιθανοτική μέθοδος αρκετά συνδυαστικά πιθανοτικά φαινόμενα.

Η δύναμη του σημαντικού αυτού ποιοτικού χαρακτηριστικού της πιθανοτικής μεθόδου συνίσταται στο ότι οδηγεί με απλό τρόπο (ακριβώς επειδή αξιοποιεί την τεχνική ευκολία της υποτιθέμενης στοχαστικής ανεξαρτησίας) σε μια καταρχήν εκτίμηση για τις εξεταζόμενες πιθανοτικές ποσότητες (η οποία μάλιστα είναι αρκετές φορές, ακριβώς λόγω της εγγενούς αυτής τάσης, πολύ κοντά στην πραγματική συμπεριφορά τους) και έτσι προσφέρει έναν στόχο προς τον οποίο πρέπει να κατευθυνθεί η ακριβής τεχνική ανάλυση.

Οι εφαρμογές που περιγράφονται στις επόμενες δύο ενότητες είναι χαρακτηριστικές της χρησιμοποίησης της ανισότητας του Janson για να επιδεικνύεται τεχνικά αυτή η εγγενής τάση της πιθανοτικής μεθόδου.

6.3 Αραιοί τυχαίοι γράφοι χωρίς τρίγωνα

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε ένα πρώτο, απλό και χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της (βασικής) ανισότητας του Janson. Θα υπολογίσουμε ένα ασυμπωτικό (όταν $n \to \infty$) όριο για την πιθανότητα της μη ύπαρξης πλήρων υπογράφων μεγέθους 3 (τριγώνων, triangles) σε αραιούς τυχαίους γράφους $G_{n,p}$, δηλαδή τυχαίους γράφους όπου $p = \frac{c}{n}$ και c μια σταθερά.

Εστω S ένα οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο 3 κορυφών και έστω B_S το (ανεπιθύμητο, προκειμένου για απόδειξη μη ύπαρξης τριγώνων) γεγονός "το S είναι τρίγωνο". Είναι φανερό ότι η ιδιότητα της μη ύπαρξης τριγώνων είναι ισοδύναμη με το γεγονός $\wedge_S \overline{B_S}$, όπου η τομή παίρνεται ως προς όλα τα S με 3 κορυφές.

Επειδή προφανώς $\Pr\{B_S\} = p^3$ και επειδή υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{3}$ διαφορετικά σύνολα S με 3 κορυφές, στην (υποθετική, αφού δεν ισχύει) περίπτωση όπου τα γεγονότα B_S θα ήταν ανεξάρτητα, θα είχαμε

$$\Pr\{\wedge_S \overline{B_S}\} = \prod_{|S|=3} \Pr\{\overline{B_S}\} = \left(1-p^3\right)^{\binom{n}{3}} \sim e^{-\binom{n}{3}p^3} \to e^{-c^3/6}$$

Βέβαια, τα γεγονότα B_S δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. Πραγματικά, δύο γεγονότα B_S, B_T είναι στοχαστικά ανεξάρτητα μόνο στην περίπτωση όπου $|S \cap T| \leq 1$ (αφού τότε τα σύνολα S, T δεν έχουν κοινές ακμές), ενώ η περίπτωση $|S \cap T| \geq 2$ συνεπάγεται (ακριβώς λόγω της δυνατότητας ύπαρξης κοινής ακμής) στοχαστικές εξαρτήσεις.

Παρόλα αυτά, θα δείξουμε ότι οι εμφανιζόμενες στοχαστικές εξαρτήσεις είναι μικρές και, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Janson, θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα μη ύπαρξης τριγώνων είναι ασυμπτωτικά ίδια με την πιθανότητα που θα ίσχυε στην περίπτωση της πλήρους ανεξαρτησίας.

Θεώρημα 43. Σε αραιούς τυχαίους γράφους του μοντέλου $G_{n,p}$ ($p = \frac{c}{n}$ και c μια σταθερά) η πιθανότητα μη ύπαρξης πλήρων υπογράφων μεγέθους 3 περιγράφεται ασυμπτωτικά από το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\{\wedge_S \overline{B_S}\} \to e^{-c^3/6}$$

όπου B_S είναι το γεγονός "το σύνολο S, που αποτελείται από 3 κορυφές, είναι ένας πλήρης γράφος (τρίγωνο)"

Απόδειξη: Προκειμένου να εφαρμόσουμε την (βασική) ανισότητα του Janson, υπολογίζουμε τις διάφορες ποσότητες που χρησιμοποιεί η ανισότητα αυτή.

Είναι καταρχήν φανερό ότι

$$\Pr\{B_S\} = \epsilon = p^3 = \left(\frac{c}{n}\right)^3 = o(1)$$

Επίσης,

$$M = \prod_{|S|=3} \Pr\{\overline{B_S}\} = \left(1 - p^3\right)^{\binom{n}{3}} \sim e^{-\binom{n}{3}p^3} \Leftrightarrow M \to e^{-c^3/6}$$

Τέλος, προκειμένου να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\Delta = \sum_{S \sim T} \Pr\{B_S \wedge B_T\}$$

παρατηρούμε καταρχήν ότι

$$S \sim T \Leftrightarrow |S \cap T| = 2$$

αφού $S \sim T \Leftrightarrow S \neq T$ και τα B_S, B_T είναι εξαρτημένα $\Leftrightarrow |S \cap T| \neq 3$ και $|S \cap T| \geq 2 \Leftrightarrow |S \cap T| = 2$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση $|S \cap T| = 2$ είναι

$$\Pr\{B_S \wedge B_T\} = p^5$$

ακριβώς εξαιτίας της ύπαρξης μίας κοινής ακμής.

Τέλος, υπάρχουν $\binom{3}{2}(n-3)$ διαφορετικά T έτσι ώστε $|S \cap T| = 2$ για κάθε συγκεκριμένο σύνολο S, και $\binom{n}{3}$ τρόποι να επιλεγεί το S, δηλαδή συνολικά

$$\binom{3}{2}(n-3)\binom{n}{3} = O(n^4)$$

ζευγάρια συνόλων S, T έτσι ώστε $|S \cap T| = 2$.

Με βάση τα παραπάνω είναι

$$\Delta = O(n^4)\, p^5 = O(n^4) \left(\frac{c}{n}\right)^5 = o(1)$$

Επομένως, αφού $\epsilon = o(1)$ και $\Delta = o(1)$, πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή της Janson, η οποία δίνει τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\wedge_S \overline{B_S}\} = \lim_{n\to\infty} M = e^{-c^3/6}$$

□

6.4 Μονοπάτια μήκους 3 σε τυχαίους γράφους

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατωφλίου για την ιδιότητα της ύπαρξης ενός τουλάχιστον μονοπατιού μήκους 3 ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε κορυφές ενός τυχαίου γράφου του μοντέλου $G_{n,p}$.

Θεώρημα 44. Εστω B το γεγονός "δύο οποιεσδήποτε κορυφές ενός τυχαίου γράφου $G_{n,p}$ συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι μήκους 3". Εάν

$$p = \left(\frac{c \ln n}{n^2}\right)^{1/3}$$

τότε

$$\Pr\{B\} \to 1 \text{ καθώς } n \to \infty$$

όπου $c > 2$ μια σταθερά.

Απόδειξη: Εστω u, v δύο οποιεσδήποτε συγκεκριμένες κορυφές του τυχαίου γράφου και έστω B_{uv} το γεγονός "δεν υπάρχει μονοπάτι μήκους 3 ανάμεσα στις u, v". Είναι

$$B = \wedge_{u,v} \overline{B_{uv}}$$

Επομένως, και επειδή υπάρχουν $\binom{n}{2}$ δυνατά ζευγάρια κορυφών u, v, είναι

$$\Pr\{\overline{B}\} = \Pr\{\cup_{u,v} B_{uv}\} \leq \sum_{u,v} \Pr\{B_{uv}\} = O(n^2) \Pr\{B_{uv}\}$$

οπότε η σχέση

$$\Pr\{B_{uv}\} = o(n^{-2})$$

αρκεί για να αποδειχθεί ότι $\Pr\{\overline{B}\} \to 0$, δηλαδή $\Pr\{B\} \to 1$.

Για να αποδείξουμε ότι $\Pr\{B_{uv}\} = o(n^{-2})$ θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Janson.

Εκφράζουμε το γεγονός B_{uv} σαν

$$B_{uv} = \wedge_{w_1,w_2}\overline{A_{w_1,w_2}}$$

όπου A_{w_1,w_2} είναι το γεγονός "τα $\{u, w_1\}$, $\{w_1, w_2\}$, $\{w_2, v\}$ είναι ακμές του γράφου".

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Janson υπολογίζουμε τις ποσότητες ϵ, M, Δ. Είναι καταρχήν

$$\Pr\{A_{w_1,w_2}\} = \epsilon = p^3 = o(1)$$

Επίσης, επειδή υπάρχουν $n-2$ τρόποι να επιλεγεί η κορυφή w_1 και $n-3$ τρόποι να επιλεγεί η w_2, είναι

$$\begin{aligned} M &= \prod_{w_1,w_2} \Pr\{\overline{A_{w_1,w_2}}\} = \left(1-p^3\right)^{(n-2)(n-3)} \leq e^{-p^3 n^2} \\ &= e^{-\frac{c\ln n}{n^2}n^2} = n^{-c} = o(n^{-2}) \end{aligned}$$

αφού $c > 2$.

Ο υπολογισμός του Δ αναλύεται στις 3 διαφορετικές περιπτώσεις κατά τις οποίες τα γεγονότα A_{w_1,w_2} και $A_{w_{1'},w_{2'}}$ είναι δυνατό να σχετίζονται με την σχέση $\sim$, που συνεπάγεται στοχαστική εξάρτηση και ταυτόχρονα διαφορετικότητα. Στη συνέχεια αναλύουμε τη συνεισφορά κάθε περίπτωσης στην ποσότητα Δ:

- $w_1 \neq w_{1'}$ και $w_2 = w_{2'}$. Στην περίπτωση αυτή, που προφανώς εμφανίζεται με $O\left(n^3\right)$ δυνατούς τρόπους, είναι
$$\Pr\{A_{w_1,w_2} \wedge A_{w_{1'},w_{2'}}\} = p^5$$
- $w_1 = w_{1'}$ και $w_2 \neq w_{2'}$. Πάλι υπάρχουν $O\left(n^3\right)$ δυνατοί τρόποι και
$$\Pr\{A_{w_1,w_2} \wedge A_{w_{1'},w_{2'}}\} = p^5$$
- $w_1 = w_{2'}$ και $w_2 = w_{1'}$. Στην περίπτωση αυτή, που προφανώς εμφανίζεται με $O\left(n^2\right)$ δυνατούς τρόπους, είναι
$$\Pr\{A_{w_1,w_2} \wedge A_{w_{1'},w_{2'}}\} = p^5$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} \Delta &= O\left(n^3\right)p^5 + O\left(n^3\right)p^5 + O\left(n^2\right)p^5 = O\left(n^3\right)p^5 \\ &= O\left(n^3\right)\left(\frac{c\ln n}{n^2}\right)^{5/3} = O\left(\frac{(c\ln n)^{5/3}}{n^{1/3}}\right) = o(1) \end{aligned}$$

Επομένως $\epsilon = o(1)$ και $\Delta = o(1)$ οπότε, εφαρμόζοντας τη βασική μορφή της ανισότητας του Janson, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\wedge_{w_1,w_2}\overline{A_{w_1,w_2}}\} = \lim_{n\to\infty} M = o(n^{-2})$$

□

6.5 Μια πιο κλασσική προσέγγιση: η μέθοδος του Brun

Η ανισότητα του Janson, την οποία παρουσιάσαμε αναλυτικά σε προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, αποτελεί μια σχετικά νέα πιθανοτική μέθοδο: πρωτοπαρουσιάστηκε από τον S. Janson στα 1990 στο άρθρο του με τίτλο "Poisson approximation for large deviations" ("Η προσέγγιση μεγάλων αποκλίσεων από την κατανομή Poisson") που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Random Structures and Algorithms (βλ. [33]).

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε μια περισσότερο κλασσική (καταρχήν από την άποψη ότι είναι πιο παλιά) μέθοδο για την προσέγγιση από την κατανομή Poisson αθροισμάτων σχεδόν ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών: πρόκειται για τη μέθοδο του Brun (Brun's Sieve: το "κόσκινο" του Brun) και οφείλει το όνομά της στον μαθηματικό T. Brun που την πρωτοχρησιμοποίησε.

Εστω $B_1, \ldots, B_n$ τα (ανεπιθύμητα) γεγονότα για μια υπό εξέταση ιδιότητα και έστω $X_1, \ldots, X_n$ οι αντίστοιχες δεικνύουσες τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

μετράει τον αριθμό των ανεπιθύμητων γεγονότων που πραγματοποιήθηκαν, οπότε ενδιαφερόμαστε για το μέγεθος της πιθανότητας η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή 0 (υποθέτουμε πάλι, κατά τον υπολογισμό των ορίων, την "κρυμμένη" ανεξάρτητη μεταβλητή n, δηλαδή τα όρια παίρνονται καθώς $n \to \infty$).

Ορίζοντας σαν

$$S^{(r)} = \sum_{i_1,\ldots,i_r} \Pr\{B_{i_1} \wedge \ldots \wedge B_{i_r}\}$$

όπου το άθροισμα παίρνεται ως προς όλα τα $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ (δηλαδή $S^{(r)}$ είναι η συνολική πιθανότητα ταυτόχρονης ικανοποίησης r οποιωνδήποτε συγκεκριμένων γεγονότων B_i), και επειδή

$$(X = 0) \;=\; \wedge_{i=1}^{n} \overline{B_i} \;=\; \overline{\cup_{i=1}^{n} B_i}$$

χρησιμοποιώντας την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού (inclusion- exclusion principle, βλέπε Παράρτημα A) έχουμε ότι

$$\Pr\{X = 0\} = 1 - \Pr\{\cup_{i=1}^{n} B_i\} = 1 - S^{(1)} + S^{(2)} - \cdots + (-1)^r S^{(r)} + \cdots$$

Η μέθοδος του Brun συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 45 (Μέθοδος Brun)**.** Εστω ότι υπάρχει μια σταθερά μ έτσι ώστε

$$E(X) = S^{(1)} \to \mu$$

και έτσι ώστε για οποιοδήποτε συγκεκριμένο r

$$E\left(\frac{X^{(r)}}{r!}\right) = S^{(r)} \to \frac{\mu^r}{r!}$$

Τότε η X προσεγγίζεται ασυμπτωτικά από την κατανομή Poisson, από την άποψη ότι

$$\Pr\{X = 0\} \to e^{-\mu}$$

και, γενικότερα, για κάθε t

$$\Pr\{X = t\} = e^{-\mu}\,\frac{\mu^t}{t!}$$

Απόδειξη: Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την περίπτωση $t = 0$. Εστω $\epsilon > 0$ μια (οσοδήποτε μικρή) σταθερά. Από το ανάπτυγμα Taylor της $e^{-\mu}$ είναι

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\mu^r}{r!} = e^{-\mu}$$

Επομένως, υπάρχει ένα s:

$$\left|\sum_{r=0}^{2s}(-1)^r\frac{\mu^r}{r!} - e^{-\mu}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Bonferroni (βλέπε Παράρτημα Α), που αποδεικνύουν ότι τα μερικά αθροίσματα του τύπου του εγκλεισμού- αποκλεισμού διαδοχικά ξεπερνούν και υπολείπονται της ποσότητας $\Pr\{X = 0\}$ την οποία και προσεγγίζουν ασυμπτωτικά στο όριο, και με την παρατήρηση ότι τα αθροίσματα με άρτιο αριθμό όρων, όπως προκύπτει προφανώς από την περίπτωση $r = 0$ που δίνει $\Pr\{X = 0\} = 1$, αποτελούν υπερεκτιμήσεις της $\Pr\{X = 0\}$, είναι

$$\Pr\{X = 0\} \leq \sum_{r=0}^{2s}(-1)^r S^{(r)}$$

Αλλά επειδή

$$S^{(r)} \to \frac{\mu^r}{r!}$$

υπάρχει ένα κατάλληλα μεγάλο n_0 έτσι ώστε $\forall n \geq n_0$ να είναι

$$\left|S^{(r)} - \frac{\mu^r}{r!}\right| \leq \frac{\epsilon}{2(2s+1)}$$

για $0 \leq r \leq 2s$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\Pr\{X = 0\} \leq e^{-\mu} + \epsilon$$

Χρησιμοποιώντας το μερικό άθροισμα του τύπου του εγκλεισμού-αποκλεισμού μέχρι $r = 2s+1$ έχουμε (με παρόμοια επιχειρήματα) ότι

$$\Pr\{X = 0\} \geq e^{-\mu} - \epsilon$$

Επειδή οι δύο παραπάνω σχέσεις ισχύουν για οσοδήποτε μικρό $\epsilon > 0$, τελικά είναι

$$\Pr\{X = 0\} \to e^{-\mu}$$

□

Συγκρίνοντας την ανισότητα του Janson με τη μέθοδο Brun παρατηρούμε ότι και οι δύο μέθοδοι αποδεικνύουν την ασυμπτωτική προσέγγιση αθροισμάτων "σχεδόν" ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή Poisson. Δεν είναι άλλωστε τυχαίο ότι πολλά γνωστά αποτελέσματα είναι δυνατό να αποδειχθούν και με τις δύο μεθόδους. Η εφαρμογή που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα και αποτελεί συνδυασμό της χρήσης των δύο αυτών μεθόδων, είναι χαρακτηριστική της συνάφειάς τους.

6.6 Συμμετοχή των κορυφών τυχαίων γράφων σε τρίγωνα

Στην ενότητα αυτή, συνδυάζοντας τη μέθοδο του Brun και την ανισότητα του Janson, θα υπολογίσουμε ένα ασυμπτωτικό όριο για την πιθανότητα του γεγονότος "οποιαδήποτε κορυφή ενός τυχαίου γράφου $G_{n,p}$ ανήκει σε ένα τρίγωνο".

Θεώρημα 46. Εστω μια σταθερά $c > 0$ και έστω $p = p(n)$ και $\mu = \mu(n)$ τέτοια ώστε

$$\binom{n-1}{2} p^3 = \mu$$

και

$$e^{-\mu} = \frac{c}{n}$$

Αν T είναι η ιδιότητα "οποιαδήποτε κορυφή του $G_{n,p}$ γράφου ανήκει σε ένα τρίγωνο", τότε

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{T\} = e^{-c}$$

Απόδειξη: Για μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη (fixed) κορυφή x και για οποιεσδήποτε δύο άλλες κορυφές y, z έστω T_{xyz} το γεγονός "το $\{x, y, z\}$ είναι ένα τρίγωνο". Εστω $N_x = \wedge_{y,z}\overline{T_{xyz}}$ (δηλαδή το γεγονός N_x σημαίνει ότι η κορυφή x δεν ανήκει σε κανένα τρίγωνο) και έστω X_x η αντίστοιχη δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή. Θα χρησιμοποιήσουμε καταρχήν την ανισότητα του Janson για να υπολογίσουμε ένα ασυμπτωτικό όριο για την $\Pr\{N_x\} = E(X_x)$. Είναι

$$\epsilon = \Pr\{T_{xyz}\} = p^3$$

Αλλά από την υπόθεση του θεωρήματος είναι

$$O(n^2)\, p^3 = O(\ln n) \;\; \text{δηλαδή} \;\; p^3 = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \Leftrightarrow p \sim n^{-2/3+o(1)}$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι $\epsilon = o(1)$.

Επίσης, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, είναι

$$E\left(\sum_{y,z} T_{xyz}\right) = \binom{n-1}{2} p^3 = \mu$$

αφού υπάρχουν $\binom{n-1}{2}$ τρόποι να επιλεγούν οι (διαφορετικές από την x) κορυφές y, z και οι τρεις κορυφές x, y, z σχηματίζουν τρίγωνο με πιθανότητα p^3.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Janson (και, ειδικότερα, για να δείξουμε σύγκλιση στην Poisson) αρκεί να υπολογίσουμε το Δ (και να δείξουμε ότι $\Delta = o(1)$). Παρατηρούμε ότι $xyz \sim xuv$ αν και μόνο αν τα δύο αυτά σύνολα κορυφών έχουν ακριβώς μία (έστω την y) κοινή κορυφή (πέραν της x, που εξ ορισμού είναι κοινή). Επομένως, η επιλογή των y, z, u και v συνίσταται στην πραγματικότητα στην επιλογή 3 (πέραν της x) διαφορετικών κορυφών και έτσι

$$\Delta = \sum_{y,z,v} \Pr\left\{T_{xyz} \wedge T_{xyv}\right\} = O\left(n^3\right) p^5 \sim O\left(n^3\right) \left(n^{-2/3}\right)^5 = o(1)$$

αφού η κοινή ακμή μεγαλώνει την πιθανότητα ταυτόχρονης ικανοποίησης των T_{xyz} και T_{xyv} από p^6 (στην περίπτωση όπου ήταν ξένα) σε p^5.

Επομένως, όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή της Janson και τη σύγκλιση στην Poisson συντρέχουν, οπότε

$$\Pr\{N_x\} = E(X_x) = \Pr\left\{\wedge_{y,z}\overline{T_{xyz}}\right\} \sim e^{-\mu} = \frac{c}{n}$$

Υπολογίσαμε λοιπόν τη μέση τιμή της δεικνύουσας τυχαίας μεταβλητής X_x που παίρνει την τιμή 1 αν μια συγκεκριμένη κορυφή δεν ανήκει σε κανένα τρίγωνο και την τιμή 0 διαφορετικά. Η μεταβλητή που ακολουθεί μετράει επομένως πόσες κορυφές δεν ανήκουν σε τρίγωνα:

$$X = \sum_{x \in V(G)} X_x$$

Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$S^{(1)} = E(X) = |V(G)| E(X_x) \to n\,\frac{c}{n} = c$$

Για να δείξουμε τη δυνατότητα εφαρμογής του θεωρήματος του Brun, αρκεί

$$S^{(r)} \to \frac{c^r}{r!}$$

Αλλά

$$S^{(r)} = \sum_{x_1,\ldots,x_r} \Pr\left\{N_{x_1} \wedge \cdots \wedge N_{x_r}\right\} = \binom{n}{r} \Pr\left\{N_{x_1} \wedge \cdots \wedge N_{x_r}\right\} \tag{6.1}$$

λόγω της συμμετρίας. Αλλά

$$N_{x_1} \wedge \cdots \wedge N_{x_r} = \wedge\overline{T_{x_iyz}}$$

όπου η τομή παίρνεται για $1 \le i \le r$ και για όλα τα δυνατά y, z. Το γεγονός ότι πρόκειται για την τομή συμπληρωματικών γεγονότων μας παρακινεί να εφαρμόσουμε εκ νέου την ανισότητα του Janson. Για κάθε ένα από τα επιμέρους γεγονότα της τομής είναι

$$\epsilon = \Pr\{T_{x_iyz}\} = p^3 = o(1)$$

Επειδή υπάρχουν r τρόποι να επιλεγεί η κορυφή x_i και στη συνέχεια $\binom{n-1}{2}$ τρόποι να επιλεγούν οι κορυφές y και z, η μέση τιμή του αθροίσματος των T_{x_iyz} είναι

$$\sum \Pr\{T_{x_iyz}\} \sim r\binom{n-1}{2}p^3 = r\mu$$

όπου η ασυμπτωτική προσέγγιση ($\sim$) χρειάζεται για να παρθούν υπόψη στους $r\binom{n-1}{2}$ τρόπους εκείνοι οι τρόποι που μετριούνται περισσότερες από μία φορά (αυτό συμβαίνει όταν το x_i επιλέγεται σαν κορυφή τύπου y ή z κάποιου x_j, επομένως υπάρχουν $2n = O(n) = o(rn^2)$ επαναλήψεις).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το νέο αυτό Δ είναι $o(1)$. Είναι

$$\Delta = \sum_{x_iyz \sim x_jy'z'} \Pr\{T_{x_iyz} \wedge T_{x_jy'z'}\}$$

Σε κάθε περίπτωση όπου $x_iyz \sim x_jy'z'$ υπάρχει μία ακριβώς κοινή ακμή και επομένως

$$\Pr\{T_{x_iyz} \wedge T_{x_jy'z'}\} = p^5$$

Οι περιπτώσεις όπου $x_iyz \sim x_jy'z'$ χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- $x_i = x_j$: υπάρχουν r τρόποι να επιλεγεί η κοινή κορυφή $x_i = x_j$ και στη συνέχεια $O(n^3)$ τρόποι να επιλεγούν οι υπόλοιπες τρεις (διαφορετικές μεταξύ τους) κορυφές.
- $x_i \neq x_j$: υπάρχουν $\binom{r}{2}$ τρόποι να επιλεγούν τα διαφορετικά x_i,x_j και στη συνέχεια μόνο $O(n^2)$ τρόποι να επιλεγούν οι υπόλοιπες δύο υποχρεωτικά κοινές κορυφές (αν, πέραν των x_i και x_j, υπήρχε και άλλη μη κοινή κορυφή δεν θα ήταν δυνατό να υπάρξει κοινή ακμή).

Επομένως

$$\Delta = \left(O(rn^3) + O(r^2n^2)\right)\, p^5 = O\left(n^3\right)\, p^5 = o(1)$$

αφού το κάθε φορά r είναι συγκεκριμένο (fixed). Εφαρμόζοντας την Janson, η σύγκλιση στην Poisson δίνει

$$\Pr\{N_{x_1} \wedge \cdots \wedge N_{x_r}\} \to e^{-r\mu}$$

και από την σχέση 6.1

$$S^{(r)} = \binom{n}{r}e^{-r\mu} \sim \frac{(ne^{-\mu})^r}{r!} = \frac{c^r}{r!}$$

και επομένως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Brun ισχύουν, οπότε

$$\Pr\{X = 0\} \to e^{-c}$$

□

Κεφάλαιο 7

Η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης

7.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Ο χαρακτήρας της μεθόδου των ακολουθιών διατήρησης (martingale sequences) που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο είναι, συγκρινόμενος με το Τοπικό Θεώρημα και την ανισότητα του Janson που παρουσιάστηκαν στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, διττός: από τη μια μεριά, η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης έχει ορισμένα κοινά στοιχεία με τις δύο αυτές μεθόδους και κατά κάποιον τρόπο αποτελεί φυσική συνέχειά τους ενώ, από την άλλη, τόσο οι υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται όσο και το είδος των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνονται με τη χρησιμοποίησή της είναι αρκετά διαφορετικά και προσδίδουν στη μέθοδο αυτή μια ιδιαίτερη, ξεχωριστή οντότητα.

Στα πλαίσια αυτής της εισαγωγικής ενότητας και πριν προχωρήσουμε σε μια λεπτομερή, τεχνική παρουσίαση της μεθόδου, θα επιχειρήσουμε μια συνοπτική σύγκριση των βασικών ποιοτικών χαρακτηριστικών της με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των τεχνικών που περιγράψαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια.

Μια βασική δομική διαφορά στον τρόπο που αναπτύσσεται η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης σε σχέση με την ανισότητα του Janson αλλά και το Τοπικό Θεώρημα εντοπίζεται στο ότι, ενώ οι δύο άλλες μέθοδοι μελετούν βασικά τη συμπεριφορά αθροισμάτων (ή τομών των αντίστοιχων γεγονότων) τυχαίων μεταβλητών (κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί στην πραγματοποίηση ή όχι της επιθυμητής ιδιότητας σε ένα τμήμα της υπό εξέταση δομής), η μέθοδος αυτή ορίζει και υπολογίζει τα ποσοτικά χαρακτηριστικά μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικές εξελικτικές φάσεις κατά την εξέταση (ή, καλύτερα, έκθεση, exposure) της υπό μελέτη συνδυαστικής δομής. Πιο συγκεκριμένα, κάθε μεταβλητή της ακολουθίας αυτής συνίσταται στην εξέταση ενός ολοένα και μεγαλύτερου (και όχι απλά διαφορετικού, όπως στις άλλες δύο μεθόδους) τμήματος της υπό εξέταση δομής και επομένως η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών "αποκαλύπτει" διαδοχικά ολοένα και περισσότερες πληροφορίες για τη δομή αυτή.

Μια άλλη βασική διαφορά εντοπίζεται στη στόχευση των μεθόδων: οι δύο προηγούμενες μέθοδοι αποτελούν βασικά αποδείξεις ύπαρξης μιας επιθυμητής δομής, ενώ η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης (ακριβώς επειδή, όπως θα δούμε αργότερα, αποδεικνύει την ισχυρή συγκέντρωση μιας μεταβλητής γύρω από τη μέση της τιμή) χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό των ποσοτικών χαρακτηριστικών που έχουν συναρτήσεις ορισμένες στις υπό εξέταση συνδυαστικές δομές.

Από την άποψη αυτή είναι χαρακτηριστικά τα παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου που περιγράφονται σε επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, όπως η απόδειξη της ισχυρής συγκέντρωσης του χρωματικού αριθμού (chromatic number) τυχαίων γράφων γύρω από τη μέση του τιμή και στη συνέχεια ο μερικός υπολογισμός του αριθμού αυτού στην περίπτωση πυκνών τυχαίων γράφων.

Από την άλλη, ένα κοινό χαρακτηριστικό των τριών αυτών μεθόδων είναι το γεγονός ότι όλες επιχειρούν να αντιμετωπίσουν την περίπτωση της έλλειψης πλήρους ανεξαρτησίας μεταξύ των χρησιμοποιούμενων τυχαίων μεταβλητών. Ωστόσο, και εδώ εντοπίζεται μία ακόμα λεπτή διαφοροποίησή τους, η κοινή αυτή επιδίωξη επιτυγχάνεται με διαφορετική μεθοδολογία και στα πλαίσια μιας αρκετά διαφορετικής προσέγγισης.

Πιο συγκεκριμένα, ενώ το Τοπικό Θεώρημα και η ανισότητα του Janson υποθέτουν, σε γενικές γραμμές, σχετικά μικρές στοχαστικές εξαρτήσεις, η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης στηρίζεται στην απόδειξη μιας ειδικής ιδιότητας για τις τυχαίες μεταβλητές που χρησιμοποιεί: την ιδιότητα να συναποτελούν μια ακολουθία διατήρησης, ιδιότητα που σε γενικές γραμμές σημαίνει ότι η μέση τιμή μιας οποιασδήποτε μεταβλητής της ακολουθίας των μεταβλητών εξαρτάται μόνο από την αμέσως προηγούμενή της στην ακολουθία μεταβλητή, ενώ είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες προηγούμενες στην ακολουθία μεταβλητές, Η ιδιότητα αυτή, που θυμίζει τις διακριτές διαδικασίες Markov, με ασθενέστερες όμως ιδιότητες, παραπέμπει συνήθως (όπως και στην περίπτωση των δύο άλλων μεθόδων) στην ύπαρξη μικρής στοχαστικής εξάρτησης, ωστόσο, όπως θα φανεί και από την τεχνική ανάλυση στις επόμενες ενότητες, η ακολουθούμενη μεθοδολογία είναι αρκετά διαφορετική.

7.2 Ακολουθίες διατήρησης: ορισμός και ιδιότητες

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε την έννοια της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών διατήρησης, που αποτελεί το βασικό πιθανοθεωρητικό μοντέλο στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης. Η έννοια αυτή χρησιμοποιεί δεσμευμένες (ή υπό συνθήκη, conditional) κατανομές και μέσες τιμές, τις οποίες και ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 16. Εστω
$$p(x,y) = \Pr\{X = x \cap Y = y\}$$
η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint probability density function) των διακριτών τυχαίων μεταβλητών X και Y. Η δεσμευμένη (από την Y) πυκνότητα πιθανότητας της X, δίνεται από τη σχέση

$$\Pr\{X = x|Y = y\} = \frac{p(x,y)}{\Pr\{Y = y\}} = \frac{p(x,y)}{\sum_x p(x,y)}$$

και η αντίστοιχη δεσμευμένη μέση τιμή είναι επομένως

$$E(X|Y=y) = \sum_x x \Pr\{X=x|Y=y\} = \frac{\sum_x xp(x,y)}{\sum_x p(x,y)}$$

□

Με βάση αυτόν τον ορισμό, μπορούμε να εκφράσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(X|Y)$ σα μια τυχαία μεταβλητή, ως εξής:

Ορισμός 17. Η μέση τιμή $E(X|Y)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή $f(Y)$ της μορφής

$$f(Y) = E(X|Y=y)$$

και επομένως

$$f(Y) = \frac{\sum_x xp(x,y)}{\sum_x p(x,y)}$$

□

Ο μάλλον πρωτότυπος αυτός ορισμός της μέσης τιμής $E(X|Y)$ σαν μιας τυχαίας μεταβλητής $f(Y) = E(X|Y=y)$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμος κατά την απόδειξη του ακόλουθου σημαντικού λήμματος:

Λήμμα 7.

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

Απόδειξη: Αφού, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η μέση τιμή $E(X|Y)$ είναι ουσιαστικά μια τυχαία μεταβλητή με τιμές $f(Y) = E(X|Y=y)$, η μέση τιμή της μέσης αυτής τιμής έχει νόημα και είναι

$$\begin{aligned}
E(E(X|Y)) &= E(f(Y)) = \sum_y f(Y) \Pr\{Y=y\} \\
&= \sum_y \Pr\{Y=y\} \frac{\sum_x xp(x,y)}{\sum_x p(x,y)} = \sum_y \sum_x xp(x,y) \\
&= \sum_x \sum_y xp(x,y) = \sum_x x \sum_y p(x,y) \\
&= \sum_x x \Pr\{X=x\} = E(X)
\end{aligned}$$

□

Το παραπάνω λήμμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την απόδειξη μιας βασικής ιδιότητας των ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών διατήρησης, από την οποία προκύπτει και μια ενδιαφέρουσα ποιοτική ερμηνεία των ακολουθιών αυτών. Αλλά, προηγουμένως, θα ορίσουμε τεχνικά μια ακολουθία διατήρησης τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 18. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, \ldots$ καλείται ακολουθία διατήρησης, αν και μόνο αν είναι

$$E(X_i|X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}) = X_{i-1}$$

για οποιοδήποτε $i > 0$.

□

Σε μια προσπάθεια να προσεγγίσουμε διαισθητικά το χαρακτήρα μιας ακολουθίας διατήρησης, δίνουμε το ακόλουθο ερμηνευτικό παράδειγμα στον παραπάνω τεχνικό ορισμό: Εστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \ldots$ αντιστοιχούν στο τρέχον διαθέσιμο ποσό ενός παίκτη σε καζίνο, δηλαδή X_0 είναι το αρχικό κεφάλαιο του παίκτη και X_i είναι το διαθέσιμο ποσό του μετά το $i-$οστό αποτέλεσμα του τυχερού παιχνιδιού. Αν το παιχνίδι είναι τίμιο (fair) πρέπει σε κάθε γύρο του, και ανεξάρτητα από την στρατηγική που ακολουθεί ο παίκτης, το αναμενόμενο (expected) κέρδος να ισούται με την αναμενόμενη απώλεια, με άλλα λόγια η μέση τιμή της μεταβολής του κεφαλαίου του παίκτη πρέπει ισούται με μηδέν. Αυτήν ακριβώς την κατά μέση τιμή διατήρηση του αρχικού κεφαλαίου του παίκτη σε ένα τίμιο τυχερό παιγνίδι υπαινίσσεται η ιδιότητα της διατήρησης.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να προχωρήσουμε στην ακόλουθη σημαντική παρατήρηση: η ιδιότητα διατήρησης δεν κάνει καμία υπόθεση για τη στοχαστική ανεξαρτησία ή όχι και την συγκεκριμένη κατανομή των τυχαίων μεταβλητών της ακολουθίας. Αυτή ακριβώς η έλλειψη οποιασδήποτε περιοριστικής υπόθεσης για τις τυχαίες μεταβλητές είναι χαρακτηριστική της γενικότητας της μεθόδου των ακολουθιών διατήρησης και προσδίδει ιδιαίτερη δύναμη στη μέθοδο αυτή.

Στηριγμένοι στο προηγούμενο λήμμα θα αποδείξουμε μια σημαντική, χαρακτηριστική ιδιότητα των ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών διατήρησης.

Λήμμα 8. Εστω $X_0, X_1, \ldots$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης. Είναι, $\forall i > 0$

$$E(X_i) = E(X_0)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της ιδιότητας διατήρησης είναι

$$E(X_i|X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}) = X_{i-1}$$

Παίρνοντας μέσες τιμές, η παραπάνω σχέση δίνει

$$E(E(X_i|X_0, X_1, \ldots, X_{i-1})) = E(X_{i-1})$$

που από το προηγούμενο λήμμα γίνεται

$$E(X_i) = E(X_{i-1})$$

για κάθε $i > 0$. Επομένως, $E(X_i) = E(X_0)$, $\forall i > 0$. □

Επιστρέφοντας στη διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας της διατήρησης με βάση τον παίκτη του καζίνο, το λήμμα που μόλις αποδείξαμε συνεπάγεται (όπως άλλωστε και ο ορισμός μιας ακολουθίας διατήρησης) ότι το αναμενόμενο (ή κατά μέση τιμή) διαθέσιμο κεφάλαιο του παίκτη οφείλει σε κάθε στιγμή, και εφόσον το τυχερό παιχνίδι είναι τίμιο, να είναι ίσο με το αρχικό του κεφάλαιο, και μάλιστα ανεξάρτητα από τη στρατηγική που ακολουθεί ο παίκτης.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα παρουσιάζοντας μια συγκεκριμένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης.

Λήμμα 9. Εστω ένα κουτί που περιέχει αρχικά b μαύρα και w λευκά σφαιρίδια. Διαδοχικά επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο και το αντικαθιστούμε με c σφαιρίδια του ίδιου χρώματος. Εστω X_i ο λόγος του αριθμού των μαύρων σφαιριδίων προς τον συνολικό αριθμό των σφαιριδίων στο κουτί μετά την i-οστή τυχαία επιλογή και αντικατάσταση. Η ακολουθία $X_0, X_1, \ldots$ είναι μια ακολουθία διατήρησης. □

Η απόδειξη του λήμματος αυτού αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

7.3 Ακολουθίες διατήρησης για έκθεση τυχαίων γράφων

Η ιδιαίτερη σημασία αυτής της ενότητας συνίσταται στην επίδειξη της ακόλουθης αξιοσημείωτης ιδιότητας: μπορεί να κατασκευαστεί μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης από οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή. Η χρησιμότητα αυτής της ιδιότητας προκύπτει αν σκεφτούμε ότι στη θέση της τυχαίας μεταβλητής μπορούμε να παίρνουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση ορισμένη σε έναν τυχαίο γράφο (π.χ. το χρωματικό αριθμό του γράφου, το μέγεθος ενός μέγιστου πλήρους υπογράφου του) και στη συνέχεια, αξιοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα, να κατασκευάζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης.

Με άλλα λόγια, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης για οποιαδήποτε γραφοθεωρητική συνάρτηση. Η δυνατότητα μιας τέτοιας κατασκευής είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού επιτρέπει τη χρησιμοποίηση των ισχυρών πιθανοθεωρητικών εργαλείων (όπως είναι η ανισότητα του Azuma που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα) που ισχύουν στην περίπτωση ακολουθιών διατήρησης και τα οποία οδηγούν αρκετές φορές σε ισχυρά αποτελέσματα για τις υπό εξέταση συναρτήσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής των εργαλείων αυτών είναι η απόδειξη της ισχυρής συγκέντρωσης των τιμών της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί σε μια γραφοθεωρητική συνάρτηση γύρω από τη μέση της τιμή. Η συγκέντρωση αυτή σε πολλές περιπτώσεις (και σε συνδυασμό με την ευκολία υπολογισμού, αρκετά συχνά, της μέσης τιμής) προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού της ακριβούς διακύμανσης των τιμών της υπό εξέταση συνάρτησης.

Το γεγονός ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για οποιαδήποτε γραφοθεωρητική συνάρτηση και η δυνατότητα απόδειξης ισχυρής συγκέντρωσης της συνάρτησης γύρω από τη μέση της τιμή, καθιστούν τη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης ιδιαίτερα γενική και ισχυρή. Επίσης, το γεγονός ότι μπορούν να κατασκευαστούν δύο συγκεκριμένες ακολουθίες διατήρησης:

- η ακολουθία διατήρησης για έκθεση των ακμών ενός τυχαίου γράφου (edge exposure martingale) και

- η ακολουθία διατήρησης για έκθεση των κορυφών ενός τυχαίου γράφου (vertex exposure martingale) που είναι δυνατό να περιγράψουν οποιαδήποτε γραφοθεωρητική συνάρτηση, καθιστά την εφαρμογή της μεθόδου αρκετά απλή.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην τεχνική τεκμηρίωση των παραπάνω ιδιοτήτων, είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε έναν γενικευμένο ορισμό μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών διατήρησης. Το ερμηνευτικό παράδειγμα των τυχαίων μεταβλητών που αντιστοιχούν στα διαθέσιμα ποσά ενός παίκτη σε καζίνο, προσφέρουν τη δυνατότητα να συλλάβουμε διαισθητικά την αναγκαιότητα μιας τέτοιας γενίκευσης.

Πραγματικά, στο παράδειγμα αυτό, η ιδιότητα της διατήρησης

$$E(X_i|X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}) = X_{i-1}$$

περιγράφει το κατά μέση τιμή διαθέσιμο ποσό του παίκτη σε σχέση με τα διαθέσιμα ποσά του στο παρελθόν (σε προηγούμενους γύρους του τυχερού παιγνιδιού). Μια επιθυμητή γενίκευση θα ήταν μια αντίστοιχη συνθήκη για τη διακύμανση των διαθέσιμων ποσών του παίκτη σε σχέση και με άλλες, περισσότερο γενικές, ποσότητες. Μια τέτοια ποσότητα, η οποία μάλιστα είναι και η γενικότερη δυνατή αφού καθορίζει πλήρως την εξέλιξη του τυχερού παιγνιδιού, είναι το αποτέλεσμα (έστω Z_i) του τυχερού παιγνιδιού κατά τον $i-$οστό γύρο του.

Η αντίστοιχη γενικευμένη ιδιότητα της διατήρησης θα θέλαμε να έχει τη μορφή

$$E(X_i|Z_0, Z_1, \ldots, Z_{i-1}) = X_{i-1}$$

Το συγκεκριμένο παράδειγμα αναδεικνύει την κατεύθυνση προς την οποία οφείλει να κινηθεί η επιθυμητή γενίκευση: θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να ορίσουμε, με βάση μια ισότητα της παραπάνω μορφής, μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης $X_0, X_1, \ldots$ σε σχέση όχι πλέον με τυχαίες μεταβλητές της ίδιας αυτής ακολουθίας αλλά σε σχέση με μια άλλη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

Σε μια προσπάθεια να συγκεντρώσουμε την προσοχή του αναγνώστη στα ιδιαίτερα σημαντικά αποτελέσματα της γενίκευσης αυτής, κρίνουμε σκόπιμο να παραλείψουμε τις λεπτομερείς τεχνικές αποδείξεις και περιοριζόμαστε στο να αναδείξουμε ορισμένα βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά των εμπλεκόμενων εννοιών. Πάντως, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στο [47] για μια αναλυτική τεχνική παρουσίαση των εννοιών αυτών και τις αποδείξεις των θεωρημάτων που ακολουθούν.

Ο γενικευμένος ορισμός μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών διατήρησης έχει ως εξής:

Ορισμός 19. Εστω ένας πιθανοτικός δειγματοχώρος Ω και έστω $F_0, F_1, \ldots$ ένα φίλτρο (filter) του. Υποθέτοντας ότι κάθε μια τυχαία μεταβλητή X_i από τις $X_0, X_1, \ldots$ είναι F_i-μετρήσιμη, η ακολουθία $X_0, X_1, \ldots, X_n$ είναι μια ακολουθία διατήρησης, αν $\forall i > 0$

$$E(X_{i+1}|F_i) = X_i$$

□

Σε γενικές γραμμές, μια ακολουθία $F_0, F_1, \ldots$ συνόλων από γεγονότα του δειγματοχώρου Ω καλείται φίλτρο του δειγματοχώρου, όταν τα διαδοχικά F_i αποτελούν διαδοχικές συγκεκριμενοποιήσεις (refinements) του χώρου αυτού. Με άλλα λόγια, F_0 είναι ο τετριμμένος διαμερισμός του Ω στο ίδιο το Ω, κάθε F_{i+1} αποτελεί λεπτομερέστερο, σε σχέση με τον αντίστοιχο του F_i, διαμερισμό του Ω και τελικά το F_n αντιστοιχεί στον λεπτομερέστερο δυνατό διαμερισμό του Ω, που προκύπτει όταν κάθε γεγονός του F_n είναι ένα μονομελές σύνολο που περιέχει ένα απλό σημείο (sample point) του δειγματοχώρου.

Μια τυχαία μεταβλητή X_i είναι F_i−μετρήσιμη αν τα απαραίτητα για τον προσδιορισμό της κατανομής της γεγονότα (π.χ. γεγονότα της μορφής $\{X = x\}$, αφού επικεντρώνουμε την προσοχή μας στη διακριτή περίπτωση) περιέχονται στο σύνολο γεγονότων F_i. Με άλλα λόγια, η F_i−μετρησιμότητα της τυχαίας μεταβλητής X_i σημαίνει ότι το σύνολο γεγονότων F_i είναι αρκετά λεπτομερές (ή, αλλιώς, έχει διαμοιράσει αρκετά το δειγματοχώρο) ώστε να περιέχει τα επιμέρους γεγονότα που είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό της X_i.

Το ακόλουθο θεώρημα, αξιοποιώντας τον γενικευμένο αυτό ορισμό, προσφέρει τη δυνατότητα κατασκευής μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών διατήρησης για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή.

Θεώρημα 47 (Doob ακολουθίες διατήρησης)**.** Εστω Ω ένας δειγματοχώρος και $F_0, F_1, \ldots$ ένα φίλτρο του. Εστω X μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο δειγματοχώρο αυτό. Με βάση τον ορισμό

$$X_i = E(X|F_i)$$

η ακολουθία $X_0, X_1, \ldots, X_n$ αποτελεί μια (Doob) ακολουθία διατήρησης. □

Οι ακολουθίες διατήρησης που κατασκευάζονται με βάση τη σχέση $X_i = E(X|F_i)$ του παραπάνω θεωρήματος, καλούνται συνήθως (Doob) ακολουθίες διατήρησης, προς τιμήν του μαθηματικού J. Doob που τις όρισε για πρώτη φορά (βλέπε [17]) και, όπως αναφέραμε προηγουμένως, προσφέρουν τη δυνατότητα κατασκευής μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών διατήρησης για οποιαδήποτε γραφοθεωρητική συνάρτηση.

Υπάρχουν δύο συγκεκριμένες (Doob) ακολουθίες διατήρησης που χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε συναρτήσεις τυχαίων γράφων. Είναι αξιοσημείωτο, και σε αυτό το γεγονός ακριβώς οφείλεται η ευρύτατη χρησιμοποίησή τους, ότι αυτές οι ακολουθίες διατήρησης είναι κοινές για οποιαδήποτε γραφοθεωρητική συνάρτηση. Ακολουθούν οι σχετικοί ορισμοί.

Ορισμός 20 (Ακολουθία διατήρησης για έκθεση ακμών)**.** Εστω ένας τυχαίος γράφος G του μοντέλου $G_{n,p}$ (που αποτελεί, στη συγκεκριμένη περίπτωση, τον πιθανοτικό δειγματοχώρο Ω) που προκύπτει αν επιλέγουμε κάθε μια από τις $m = n(n-1)/2$ δυνατές ακμές στοχαστικά ανεξάρτητα και ισοπίθανα με πιθανότητα p. Αριθμούμε με οποιοδήποτε τρόπο τις m δυνατές ακμές και αντιστοιχούμε σε κάθε ακμή (έστω j, $1 \leq j \leq m$, η ταυτότητα της ακμής στην παραπάνω αρίθμηση) μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή I_j με τιμή 1 αν η ακμή ανήκει στον γράφο και 0 διαφορετικά. Εστω μια οποιαδήποτε συνάρτηση f ορισμένη στο γράφο G του δειγματοχώρου $G_{n,p}$. Η ακολουθία $X_0, X_1, \ldots, X_m$ όπου

$$X_k = E(f(G)|I_1, \ldots, I_k)$$

καλείται (Doob) ακολουθία διατήρησης για την έκθεση των ακμών ενός τυχαίου γράφου (edge exposure martingale).

□

Είναι φανερό ότι $X_0 = E(f(G))$ είναι η μέση τιμή της εξεταζόμενης συνάρτησης, ενώ $X_m = f(G)$ είναι (αφού έχει πια εξεταστεί η ύπαρξη ή όχι όλων των δυνατών ακμών) η πραγματική τιμή της συνάρτησης αυτής για το όρισμα G (το οποιοδήποτε συγκεκριμένο στιγμιότυπο της κατανομής $G_{n,p}$).

Η ιδιότητα της (Doob) ακολουθίας διατήρησης προκύπτει από το γεγονός ότι η ακολουθία $F_0, F_1, \ldots, F_n$, όπου F_k είναι το σύνολο που παράγεται από την κλειστότητα (closure) ως προς το συμπλήρωμα και την ένωση (επομένως και ως προς την τομή) των γεγονότων που αντιστοιχούν στις τυχαίες μεταβλητές $I_1, \ldots, I_k$, αποτελεί φίλτρο του δειγματοχώρου, αφού η διαδοχική έκθεση των ακμών του γράφου οδηγεί σε ολοένα και λεπτομερέστερο διαμερισμό του δειγματοχώρου και παρέχει διαδοχικά περισσότερες πληροφορίες για αυτόν.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται η ακολουθία διατήρησης για την έκθεση των κορυφών ενός γράφου:

Ορισμός 21 (Ακολουθία διατήρησης για έκθεση κορυφών)**.** Εστω ένας τυχαίος γράφος G του μοντέλου $G_{n,p}$ (που αποτελεί, στη συγκεκριμένη περίπτωση, τον πιθανοτικό δειγματοχώρο Ω) που προκύπτει αν επιλέγουμε κάθε μια από τις $m = n(n-1)/2$ δυνατές ακμές στοχαστικά ανεξάρτητα και ισοπίθανα με πιθανότητα p. Για $1 \leq i \leq n$, έστω E_i το σύνολο όλων των δυνατών ακμών με κορυφές στο $\{1, \ldots, i\}$. Εστω I_j μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή για κάθε δυνατή ακμή $j \in E_i$, με τιμή 1 αν η ακμή ανήκει στον γράφο και 0 διαφορετικά. Εστω $\vec{I_i}$ το διάνυσμα $(I_1, \ldots, I_j, \ldots)$, $\forall j \in E_i$. Εστω επίσης μια οποιαδήποτε συνάρτηση f ορισμένη στο γράφο G του δειγματοχώρου $G_{n,p}$. Η ακολουθία $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ όπου

$$Y_k = E(f(G)|\vec{I_1}, \ldots, \vec{I_k})$$

καλείται (Doob) ακολουθία διατήρησης για την έκθεση των κορυφών ενός τυχαίου γράφου (vertex exposure martingale).

□

Με άλλα λόγια, οι διαδοχικές τυχαίες μεταβλητές Y_i αντιστοιχούν στην τρέχουσα πληροφορία για τη συνάρτηση $f(G)$ καθώς έχει εξεταστεί η ύπαρξη ή όχι όλων των δυνατών ακμών μεταξύ των κορυφών $1, \ldots, i$. Επομένως, $Y_0 = E(f(G))$ είναι η μέση τιμή της εξεταζόμενης συνάρτησης, ενώ $Y_n = f(G)$ είναι η πραγματική της τιμή (αφού έχουν πια εξεταστεί όλες οι δυνατές ακμές του γράφου).

7.4 Το εργαλείο της μεθόδου: η ανισότητα του Azuma

Στα 1979 ο B. Maurey ([44]) παρουσίασε μια ισχυρότατη ανισότητα που φράσσει εκ των άνω την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων (large deviations) των τιμών των τυχαίων μεταβλητών μιας ακολουθίας διατήρησης από τη μέση τους τιμή. Η ανισότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε τα επόμενα χρόνια σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εφαρμογών (βλέπε χαρακτηριστικά την εργασία των Milman και Schechtman, [45]).

Επίσης, η ανισότητα αυτή αποδείχτηκε ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη ακολουθιών διατήρησης που αντιστοιχούν σε γραφοθεωρητικές συναρτήσεις. Στη σχετική βιβλιογραφία, και ειδικότερα στην περίπτωση τέτοιων γραφοθεωρητικών εφαρμογών, η ανισότητα αυτή είναι γνωστή σαν ανισότητα του Azuma (Azuma's inequality).

Η ανισότητα του Azuma αποτελεί ένα πανίσχυρο εργαλείο που προσφέρει η ιδιότητα της διατήρησης, αφού δίνει τη δυνατότητα απόδειξης ενός εκθετικά μικρού άνω φράγματος για την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων των τιμών των τυχαίων μεταβλητών μιας ακολουθίας διατήρησης από τη μέση τους τιμή και επομένως αποδεικνύει την ισχυρή συγκέντρωση των μεταβλητών αυτών γύρω από τη μέση τιμή τους.

Η βασική μορφή της ανισότητας του Azuma έχει ως εξής:

Θεώρημα 48 (Ανισότητα του Azuma)**.** Εστω $X_0 = 0, X_1, \ldots, X_m$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης που ικανοποιούν τη σχέση

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1$$

για όλα τα $0 \leq i < m$. Για οποιοδήποτε $\lambda > 0$ είναι

$$\Pr\{X_m > \lambda\sqrt{m}\} < e^{-\lambda^2/2}$$

□

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η ανισότητα του Azuma δίνει το ίδιο άνω φράγμα με το

$$\Pr\{S_n > \lambda\sqrt{n}\} < e^{-\lambda^2/2}$$

άνω φράγμα για την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων των τιμών της κατανομής S_n την οποία περιγράψαμε αναλυτικά στην ενότητα 1.7. Η ομοιότητα αυτή δεν είναι συμπτωματική: έστω το τυχαίο πείραμα που συνίσταται στο "στρίψιμο" ενός τίμιου νομίσματος (ίση πιθανότητα 1/2 για "κεφάλι", "γράμματα"). Αν X_i είναι μια τυχαία μεταβλητή που μετράει τη διαφορά του αριθμού των φορών όπου το αποτέλεσμα ήταν "κεφάλι" μείον τον αριθμό των φορών όπου το αποτέλεσμα ήταν "γράμματα" κατά τις πρώτες i επαναλήψεις αυτού του τυχαίου πειράματος, είναι φανερό ότι η X_m έχει την κατανομή S_m.

Από την άλλη, η ακολουθία $X_0, X_1, \ldots, X_m$ είναι μια ακολουθία διατήρησης αφού

$$E(X_{i+1}|X_0, X_1, \ldots, X_i) = (X_i + 1)\,\frac{1}{2} + (X_i - 1)\,\frac{1}{2} = X_i$$

Επίσης, επειδή μία επιπλέον επανάληψη αυτού του τυχαίου πειράματος συνεπάγεται μεταβολή (αύξηση ή μείωση, ανάλογα με το αποτέλεσμα) της X_i το πολύ κατά 1, είναι

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1$$

Επομένως, η συγκεκριμένη ακολουθία διατήρησης επαληθεύει (μέσω του άνω φράγματος για την κατανομή S_n) την ανισότητα του Azuma. Επιπλέον (και αυτός είναι ένας ακόμα λόγος που επιχειρούμε αυτόν τον παραλληλισμό μεταξύ της ανισότητας του Azuma και του άνω φράγματος για την κατανομή S_n) η γενική απόδειξη της ανισότητας του Azuma είναι παρόμοια με την απόδειξη αυτού του άνω φράγματος για την κατανομή S_n.

Απόδειξη της ανισότητας του Azuma: Εστω $Y_i = X_{i+1} - X_i$. Αν $E(Y_i|X_{i-1}) = k$, τότε

$$E(E(X_{i+1} - X_i|X_{i-1})) = E(k) = k \Leftrightarrow k = E(X_{i+1} - X_i) = 0$$

από το λήμμα 7 και την ιδιότητα της διατήρησης. Με άλλα λόγια, η μέση τιμή των $Y_i|X_{i-1}$ είναι (όπως άλλωστε και η μέση τιμή των δεικνυουσών μεταβλητών X_i των οποίων το άθροισμα αποτελεί την κατανομή S_n) ίση με μηδέν. Επομένως, και επειδή $|Y_i| \leq 1$, είναι (όπως και στην απόδειξη του άνω φράγματος για την S_n)

$$E\left(e^{\alpha Y_i}|X_{i-1}\right) \leq \cosh(\alpha) \leq e^{\alpha^2/2}$$

Από την άλλη, η σχέση $Y_i = X_{i+1} - X_i$, το λήμμα 7 και η ιδιότητα της διατήρησης συνεπάγονται, για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, ότι είναι

$$\begin{aligned}
E\left(e^{\alpha X_m}\right) &= E\left(\prod_{i=1}^{m} e^{\alpha Y_i}\right) \\
&= E\left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} e^{\alpha Y_i}\right) E\left(e^{\alpha Y_m}|X_{m-1}\right)\right) \\
&\leq E\left(\prod_{i=1}^{m-1} e^{\alpha Y_i}\right) e^{\alpha^2/2} \leq \left(e^{\alpha^2/2}\right)^{m-1} e^{\alpha^2/2} = e^{\alpha^2 m/2}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov είναι

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_m > \lambda\sqrt{m}\} &= \Pr\left\{e^{\alpha X_m} > e^{\alpha\lambda\sqrt{m}}\right\} \\
&\leq \frac{E(e^{\alpha X_m})}{e^{\alpha\lambda\sqrt{m}}} \leq e^{\alpha^2 m/2 - \alpha\lambda\sqrt{m}} \\
&= e^{-\lambda^2/2}
\end{aligned}$$

επιλέγοντας $\alpha = \lambda/(\sqrt{m})$ για να βελτιστοποιήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα. □

Ακολουθεί η διατύπωση της ανισότητας του Azuma σε μια γενικευμένη της μορφή, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση γραφοθεωρητικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 49 (Ανισότητα του Azuma, γενική μορφή)**.** Εστω $X_0 = c,\ X_1, \ldots, X_m$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών διατήρησης που ικανοποιούν τη σχέση

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1 \tag{7.1}$$

για όλα τα $0 \leq i < m$. Για οποιοδήποτε $\lambda > 0$ είναι

$$\Pr\{|X_m - c| > \lambda\sqrt{m}\} < 2\, e^{-\lambda^2/2}$$

□

Η ιδιαίτερη χρησιμότητα της γενικευμένης αυτής μορφής της ανισότητας του Azuma στην περίπτωση γραφοθεωρητικών συναρτήσεων f προκύπτει από το γεγονός ότι σε (Doob) ακολουθίες διατήρησης για έκθεση ακμών (κορυφών) ενός γράφου G είναι

$$X_m = f(G) \text{ και } X_0 = E(f(G))$$

οπότε η γενικευμένη ανισότητα του Azuma δίνει

$$\Pr\{|f(G) - E(f(G))| > \lambda\sqrt{m}\} < 2\, e^{-\lambda^2/2} \tag{7.2}$$

δηλαδή προσφέρει τη δυνατότητα απόδειξης εκθετικά μικρών πιθανοτήτων απόκλισης των τιμών μιας γραφοθεωρητικής συνάρτησης από τη μέση της τιμή.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να σχολιάσουμε τη σχέση

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1$$

που, όπως είδαμε, αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για να ισχύει η ανισότητα του Azuma.

Σε γενικές γραμμές, η σχέση αυτή υπαινίσσεται ότι οι διαφορές ανάμεσα στις τιμές διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών μιας ακολουθίας διατήρησης είναι μικρές. Η υπόθεση αυτή είναι καταρχήν διαισθητικά αναγκαία, ακριβώς για να εξασφαλίζεται η μικρή πιθανότητα μεγάλων τιμών των τυχαίων μεταβλητών (δηλαδή μεγάλων αποκλίσεων των τυχαίων μεταβλητών από τις μέσες τους τιμές). Η συνθήκη και το θεώρημα που ακολουθούν αποτελούν τη βάση για μια βαθύτερη και περισσότερο τεχνική κατανόηση αυτής της σχέσης, ιδιαίτερα στην περίπτωση γραφοθεωρητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 22 (Συνθήκη του Lipschitz)**.** Εστω f μια γραφοθεωρητική συνάρτηση. Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz για ακμές (αντίστοιχα, κορυφές) αν, για δυο γράφους G, G' που διαφέρουν σε μία μόνο ακμή (αντίστοιχα, κορυφή), είναι

$$|f(G) - f(G')| \leq 1$$

□

Θεώρημα 50. Αν μια γραφοθεωρητική συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz για ακμές (αντίστοιχα, κορυφές), η αντίστοιχη ακολουθία για έκθεση ακμών (αντίστοιχα, κορυφών) τυχαίων γράφων ικανοποιεί τη σχέση

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1$$

□

Αρκεί επομένως, προκειμένου να εφαρμόζουμε την ανισότητα του Azuma σε ακολουθίες διατήρησης για την έκθεση ακμών ή κορυφών που αντιστοιχούν σε γραφοθεωρητικές συναρτήσεις, απλά να αποδεικνύουμε ότι η έκθεση (exposure) μιας επιπλέον ακμής (κορυφής) του τυχαίου γράφου, μεταβάλλει την τιμή της συνάρτησης το πολύ κατά 1 κατά απόλυτη τιμή.

Στην ιδιαίτερη σημασία της σχέσης $|X_{i+1} - X_i| \leq 1$ (που αποτελεί προϋπόθεση για την εφαρμογή της ανισότητας του Azuma) και των μικρών διαφορών μεταξύ των τιμών διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθιών διατήρησης που αυτή συνεπάγεται, οφείλεται και το γεγονός ότι στη σχετική βιβλιογραφία η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης αποκαλείται συχνά μέθοδος των φραγμένων διαφορών (method of bounded differences).

Εχοντας ολοκληρώσει την τεχνική περιγραφή της μεθόδου, παρουσιάζουμε στις ενότητες που ακολουθούν ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου η εφαρμογή της οδηγεί σε πραγματικά εντυπωσιακά αποτελέσματα.

7.5 Η ισχυρή συγκέντρωση του χρωματικού αριθμού

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μια πρώτη, εξαιρετικά απλή αλλά ιδιαίτερα εντυπωσιακή εφαρμογή της μεθόδου των ακολουθιών διατήρησης. Θα αποδείξουμε ότι οι τιμές του χρωματικού αριθμού (chromatic number) τυχαίων γράφων του μοντέλου $G_{n,p}$ είναι ισχυρά συγκεντρωμένες (tightly concentrated) γύρω από τη μέση τους τιμή.

Για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη, υπενθυμίζουμε ότι χρωματικός αριθμός ενός γράφου καλείται ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για τον χρωματισμό των κορυφών του, έτσι ώστε δύο οποιεσδήποτε γειτονικές (adjacent) κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα (δες επίσης το Παράρτημα Β).

Θεώρημα 51. Εστω G ένας γράφος του $G_{n,p}$ (για οποιαδήποτε n, p) και έστω $\chi(G)$ ο χρωματικός αριθμός του γράφου. Είναι

$$\Pr\{|\chi(G) - E(\chi(G))| > \lambda\sqrt{n}\} < 2\, e^{-\lambda^2/2}$$

για οποιοδήποτε $\lambda > 0$.

Απόδειξη: Εστω η (Doob) ακολουθία διατήρησης για την έκθεση κορυφών τυχαίων γράφων (vertex exposure martingale) $X_0, X_1 \dots$ που αντιστοιχεί στη γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = \chi(G)$ (για την ύπαρξη και την κατασκευή μιας τέτοιας ακολουθίας διατήρησης μιλήσαμε αναλυτικά στην ενότητα 7.3).

Η γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = \chi(G)$ ικανοποιεί προφανώς τη συνθήκη του Lipschitz, αφού η έκθεση μιας επιπλέον κορυφής αυξάνει τον υπολογιζόμενο χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ το πολύ κατά 1, αφού η προσθήκη ενός επιπλέον χρώματος εξασφαλίζει (αλλά ενδεχομένως δεν είναι και απαραίτητη αφού τα υπάρχοντα χρώματα είναι δυνατό να επαρκούν) τη δυνατότητα χρωματισμού οποιωνδήποτε δύο γειτονικών κορυφών με διαφορετικά χρώματα.

Επομένως, από το θεώρημα 50 ισχύει η σχέση των φραγμένων διαφορών $|X_{i+1} - X_i| \leq 1$ οπότε, εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή της ανισότητας Azuma για $c = X_0 = E(\chi(G))$ (εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τη σχέση 7.2), είναι

$$\Pr\{|\chi(G) - E(\chi(G))| > \lambda\sqrt{n}\} < 2\, e^{-\lambda^2/2}$$

επειδή $X_n = \chi(G)$ (αφού η έκθεση όλων των κορυφών "αποκαλύπτει" πλήρως τον χρωματικό αριθμό του γράφου). $\square$

Η ισχυρή συγκέντρωση του χρωματικού αριθμού $\chi(G)$ γύρω από τη μέση του τιμή $E(\chi(G))$ προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα επιλέγοντας ένα λ το οποίο να τείνει στο άπειρο οσοδήποτε αργά και από το γεγονός ότι (όπως θα δούμε στη μεθεπόμενη ενότητα) ο χρωματικός αριθμός πυκνών τυχαίων γράφων είναι $\chi(G_{n,1/2}) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$, οπότε για τέτοια λ (και επειδή $\lambda\sqrt{n} = o(n/\log n)$) είναι $\chi(G) = E(\chi(G)) \pm o(\chi(G))$ σχεδόν βέβαια.

Το περισσότερο εντυπωσιακό στοιχείο της συγκεκριμένης αυτής εφαρμογής της μεθόδου των ακολουθιών διατήρησης, που οφείλεται στους Shamir και Spencer ([60]), είναι το ότι αποδεικνύεται η ισχυρή συγκέντρωση μιας γραφοθεωρητικής συνάρτησης γύρω από τη μέση της τιμή χωρίς να είναι αναγκαίο να υπολογιστεί η μέση τιμή αυτή καθεαυτή!

Ενα ακόμα τέτοιο παράδειγμα απόδειξης ισχυρής συγκέντρωσης μιας γραφοθεωρητικής συνάρτησης γύρω από τη μέση της τιμή χωρίς να είναι γνωστή η ίδια η μέση τιμή, παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

Επίσης, στη μεθεπόμενη ενότητα παραθέτουμε μια εφαρμογή όπου η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ίδιας της τιμής μιας γραφοθεωρητικής συνάρτησης.

7.6 Αξιόπιστα "παχιά δέντρα" με λάθη στις ακμές

Στο άρθρο "On The Reliability of Fat-Trees" ("Σχετικά με την αξιοπιστία των fat-trees", βλ. [49]) οι Νικολετσέας, Πάντζιου, Σπυράκης και Ψυχάρης μελετάνε την ανοχή σε λάθη του fat-tree: ενός ιδιαίτερα σημαντικού για τον παράλληλο υπολογισμό δικτύου διασύνδεσης (interconnection network).

Σε γενικές γραμμές, ένα "παχύ δέντρο"(fat-tree) μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας δενδροειδής γράφος του οποίου τα φύλλα (leaves) αναπαριστούν τους προς επικοινωνία επεξεργαστές (processors), ενώ οι εσωτερικοί κόμβοι (internal nodes) αποτελούν υποδίκτυα (subnetworks) που συναποτελούν το δίκτυο διασύνδεσης και οι οποίοι συνδέονται με κανάλια (channels) κατάλληλης χωρητικότητας (capacity: ο αριθμός των ακμών σε κάθε κανάλι).

Η ύπαρξη αρκετών, χωρίς κοινές ακμές (edge disjoint) μονοπατιών ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε φύλλα του δέντρου και η διατήρησή τους παρά τα λάθη στις ακμές, έχει επομένως ιδιαίτερη σημασία για την αξιόπιστη επικοινωνία μεταξύ των επεξεργαστών και αποτελεί ένα από τα προβλήματα που εξετάζονται στο άρθρο αυτό.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται η διατήρηση, σχεδόν βέβαια, των μισών τουλάχιστον από τα αρχικά υπάρχοντα μονοπάτια και αυτό μάλιστα συμβαίνει για ένα αρκετά μεγάλο εύρος πιθανοτήτων λάθους που συμπεριλαμβάνει τις (μεγάλες) σταθερές πιθανότητες λάθους $f < 0.25$. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας δείχνει την υψηλή ανοχή σε λάθη (fault-tolerance) και επομένως τη μεγάλη αξιοπιστία του fat-tree σαν δικτύου διασύνδεσης.

Ο αριθμός των χωρίς κοινές ακμές μονοπατιών μεταξύ δύο οποιωνδήποτε υποσυνόλων φύλλων του δέντρου συνδέεται άμεσα με την έννοια της μέγιστης ροής (maximum flow) που μπορεί να διακινηθεί ανάμεσα στα δύο αυτά υποσύνολα. Αλλά, σύμφωνα με ένα ευρύτατα γνωστό θεώρημα της θεωρίας γράφων, η μέγιστη ροή σε έναν γράφο ισούται με το μέγεθος ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής (cut set) του γράφου (για αναλυτικούς ορισμούς της έννοιας της ροής και του συνόλου αποκοπής σε ένα γράφο και την απόδειξη του θεωρήματος μέγιστης ροής-ελάχιστης αποκοπής, δες τα [32, 65] και το παράρτημα B αυτού του βιβλίου).

Στα πλαίσια αυτής της ενότητας θα παρουσιάσουμε μόνο εκείνο το μέρος της απόδειξης της διατήρησης των μονοπατιών που αφορά στη διατήρηση του μεγέθους ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής (και επομένως της διατήρησης της μέγιστης ροής) και στο οποίο χρησιμοποιείται η μέθοδος των ακολουθιών διατήρησης. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο ίδιο το άρθρο ([49]) για την πλήρη απόδειξη αυτής της σημαντικής ιδιότητας αλλά και των υπόλοιπων αποτελεσμάτων.

Ορισμός 23. Εστω H τέτοιο ώστε όλα τα κανάλια (channels) στα υψηλότερα H επίπεδα του γράφου (δέντρου) G που αναπαριστά το fat-tree να έχουν χωρητικότητα (αριθμό ακμών) τουλάχιστον $\alpha\sqrt{n}\sqrt{\log n}$, όπου n είναι ο αριθμός των κόμβων του δέντρου και $\alpha \geq 2$ μια σταθερά. Καλούμε G_H το υψηλότερο τμήμα του δέντρου που αποτελείται από αυτά τα H επίπεδα. □

Ορισμός 24. Εστω $C(G_H)$ το μέγεθος ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής του G_H και έστω $C(G_H^*)$ το μέγεθος ενός τέτοιου συνόλου στο γράφο G_H^* που παράγεται από τον G_H αν κάθε ακμή του επιλέγεται τυχαία, ισοπίθανα με πιθανότητα $p = 1 - f$ και στοχαστικά ανεξάρτητα. □

Με το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύουμε καταρχήν την κατά μέση τιμή διατήρηση ενός μεγάλου (γραμμικά μεγάλου, σε σχέση με το αρχικό) ελάχιστου συνόλου αποκοπής στο γράφο μετά τα λάθη:

Θεώρημα 52.

$$E(C(G_H^*)) = (1 - f)\, C(G_H)$$

Απόδειξη: Εστω μια δεικνύουσα τυχαία μεταβλητή για κάθε ακμή σε ένα ελάχιστο σύνολο αποκοπής με τιμή 1 (0) ανάλογα με το αν η ακμή αυτή παραμένει στο γράφο μετά τα λάθη (ή όχι, αντίστοιχα). Το θεώρημα προκύπτει εύκολα από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής. □

Για να αποδείξουμε ότι και το πραγματικό μέγεθος $C(G_H^*)$ ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής παραμένει μετά τα λάθη, όπως και η μέση τιμή του $E(C(G_H^*))$, γραμμικά μεγάλο σε σχέση με την αρχική του τιμή, θα αποδείξουμε την ισχυρή συγκέντρωση της πραγματικής τιμής γύρω από τη μέση τιμή, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης.

Θεώρημα 53.

$$\Pr\left\{|C(G_H^*) - E(C(G_H^*))| > \alpha\sqrt{n}\sqrt{\log n}\right\} \leq \frac{2}{n}$$

$\forall \alpha \geq \sqrt{2}$.

Απόδειξη: Εστω η (Doob) ακολουθία διατήρησης για την έκθεση ακμών τυχαίων γράφων (edge exposure martingale) $X_0, X_1 \ldots$ που αντιστοιχεί στη γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = C(G_H^*)$.

Η γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = C(G_H^*)$ ικανοποιεί προφανώς τη συνθήκη του Lipschitz, αφού η έκθεση μιας επιπλέον ακμής, έστω e_k, και η εξέταση του αν η ακμή αυτή διατηρείται ή όχι στο γράφο μετά τα λάθη, μπορεί μόνο να μικρύνει το μέγεθος του ελάχιστου συνόλου αποκοπής το πολύ κατά 1 (αυτό είναι δυνατό να συμβεί αν η ακμή αυτή δεν ανήκει στο γράφο μετά από τα λάθη, διαφορετικά είναι $X_k = X_{k-1}$).

Επομένως, από το θεώρημα 50, ικανοποιείται η σχέση των φραγμένων διαφορών $|X_{i+1} - X_i| \leq 1$ και, εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή της ανισότητας του Azuma (ή χρησιμοποιώντας τη σχέση 7.2), είναι

$$\Pr\left\{|C(G_H^*) - E(C(G_H^*))| > \alpha\sqrt{n}\sqrt{\log n}\right\} \leq 2\,e^{-\lambda^2/2} \leq \frac{2}{n}$$

επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\lambda = \alpha\sqrt{\log n}$. □

Επομένως, η πραγματική τιμή της $C(G_H^*)$ (του μεγέθους δηλαδή ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής μετά τα λάθη) είναι $(1 \pm \beta)$ φορές το μέγεθος του συνόλου αυτού πριν από τα λάθη, όπου $\beta > 0$ μια οσοδήποτε μικρή σταθερά, γεγονός που, σε συνδυασμό με το θεώρημα 52 εξασφαλίζει ότι

$$C(G_H^*) = (1 \pm \beta)(1 - f)C(G_H)$$

οπότε, επιλέγοντας $\beta \to 0$, αποδεικνύεται τελικά η διατήρηση (ενός μεγάλου γραμμικού μέρους) του μεγέθους ενός ελάχιστου συνόλου αποκοπής και επομένως και της μέγιστης ροής.

7.7 Ο χρωματικός αριθμός πυκνών τυχαίων γράφων

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης για να υπολογίσουμε (μερικά) το χρωματικό αριθμό πυκνών τυχαίων γράφων.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέγεθος $\omega(G)$ ενός μέγιστου πλήρους υπογράφου (maximum clique subgraph) των τυχαίων γράφων G του μοντέλου $G_{n,1/2}$ είναι

$$\omega(G) \sim 2\ln n \tag{7.3}$$

σχεδόν βέβαια.

Σε αυτήν την ενότητα θα περιοριστούμε απλά στην απόδειξη της σχέσης

$$\omega(G) \geq 2\ln n$$

που ισχύει με μεγάλη πιθανότητα, στα πλαίσια μιας μερικής απόδειξης της σχέσης

$$\chi(G) \sim \frac{n}{2\ln n}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [4] για το υπόλοιπο τμήμα της απόδειξης της σχέσης αυτής που ισχύει με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο και αποτελεί έναν ασυμπτωτικό υπολογισμό του χρωματικού αριθμού πυκνών τυχαίων γράφων.

Ο έμμεσος αυτός υπολογισμός του χρωματικού αριθμού με βάση τον υπολογισμό του μεγέθους ενός μέγιστου πλήρους υπογράφου, οφείλεται στην αρκετά γνωστή σχέση των δύο αυτών γραφοθεωρητικών εννοιών. Πραγματικά, το μέγεθος $\omega(G)$ ενός μέγιστου πλήρους υπογράφου ισούται με το μέγεθος $\alpha(G)$ ενός μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας (maximum independent set), δηλαδή ενός μέγιστου συνόλου κορυφών που είναι αμοιβαία μη γειτονικές μεταξύ τους (η ισότητα αυτή προκύπτει εύκολα αν πάρει κανείς τον συμπληρωματικό γράφο ενός $G_{n,1/2}$ τυχαίου γράφου, που είναι επίσης ένας $G_{n,1/2}$ γράφος, και στον οποίο ένας πλήρης υπογράφος του αρχικού γράφου γίνεται προφανώς σύνολο ανεξαρτησίας). Επειδή κανείς μπορεί να χρωματίσει τις κορυφές ενός συνόλου ανεξαρτησίας χρησιμοποιώντας μόνο ένα χρώμα, είναι προφανώς

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} = \frac{n}{\omega(G)}$$

Πάντως, όσον αφορά την ασυμπτωτική ανάλυση, η οποία μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα κατά τη χρησιμοποίηση της πιθανοτικής μεθόδου, αλλά και εξαιτίας της ισχυρής συγκέντρωσης του χρωματικού αριθμού, είναι δυνατό να αποδειχθεί η ακόλουθη προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική:

$$\chi(G) \sim \frac{n}{\omega(G)}$$

Το λεπτό σημείο της (μερικής) απόδειξης της σχέσης 7.3 συνίσταται στον ορισμό της ακόλουθης συνάρτησης, που αποτελεί και τη γραφοθεωρητική συνάρτηση για την κατασκευαζόμενη ακολουθία διατήρησης.

Ορισμός 25. Εστω $Y = Y(G)$ ο μέγιστος αριθμός πλήρων υπογράφων (cliques) μεγέθους $k = 2\ln n$ που δεν έχουν κοινές ακμές (edge disjoint). □

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης, παραθέτουμε το ακόλουθο λήμμα για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y. Κρίνουμε σκόπιμο, ακριβώς για να επικεντρώσουμε την προσοχή του αναγνώστη στη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης, να παραλείψουμε την απόδειξη του λήμματος αυτού (η οποία βασικά στηρίζεται στην ανισότητα του Janson και μπορεί να βρεθεί, για παράδειγμα, στο [4]).

Λήμμα 10.

$$E(Y) \geq \frac{n^2}{2k^4}$$

□

Με βάση το παραπάνω λήμμα (που αποδεικνύει μεγάλη μέση τιμή για τον αριθμό των πλήρων υπογράφων μεγέθους k χωρίς κοινές ακμές) και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ακολουθιών διατήρησης θα αποδείξουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 54.

$$\Pr\{\omega(G) < k\} < \exp\left(-\frac{n^2}{c\ln^8 n}\right)$$

όπου $c > 0$ μια σταθερά.

Απόδειξη: Εστω για $m = \binom{n}{2}$ η (Doob) ακολουθία διατήρησης για την έκθεση ακμών τυχαίων γράφων (edge exposure martingale) $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$ που αντιστοιχεί στη γραφοθεωρητική συνάρτηση $f(G) = Y(G)$.

Η συνάρτηση Y ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz αφού η προσθήκη μιας επιπλέον ακμής στο γράφο G μπορεί να αυξήσει τον αριθμό των χωρίς κοινές ακμές πλήρων υπογράφων μεγέθους k το πολύ κατά 1. Τονίζουμε ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει ακριβώς επειδή οι πλήρεις υπογράφοι δεν πρέπει να μοιράζονται κοινές ακμές, οπότε μια προστιθέμενη ακμή, ακόμα και στην περίπτωση που "ολοκληρώνει" περισσότερους από έναν πλήρεις υπογράφους μεγέθους k, στην πραγματικότητα προσθέτει μόνο έναν από αυτούς στο σύνολο των ήδη υπαρχόντων πλήρων υπογράφων χωρίς κοινές ακμές, γιατί διαφορετικά θα παραβιάζονταν, από αυτήν ακριβώς την προστιθέμενη ακμή, η απαίτηση για τη μη ύπαρξη κοινών ακμών. Αντίθετα, αν μετράγαμε απλά πλήρεις υπογράφους μεγέθους k, χωρίς την επιπλέον απαίτηση οι υπογράφοι αυτοί να μην έχουν κοινές ακμές, μία νέα ακμή θα μπορούσε προφανώς να προσθέσει στο γράφο περισσότερους του ενός πλήρεις υπογράφους.

Είναι επίσης φανερό ότι ο G δεν περιέχει κανέναν πλήρη υπογράφο μεγέθους k αν και μόνο αν $Y = 0$. Επομένως, και χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη μορφή της ανισότητας του Azuma, είναι

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\omega(G) < k\} &= \Pr\{Y = 0\} \leq \Pr\{|Y - E(Y)| \geq E(Y)\} \\
&= \Pr\left\{|Y - E(Y)| \geq \frac{E(Y)}{\sqrt{m}}\sqrt{m}\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{E^2(Y)}{2(\sqrt{m})^2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{n^4}{8\,k^8\,n^2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n^2}{c\,\ln^8 n}\right\}
\end{aligned}
$$

επειδή είναι $\lambda = E(Y)/(\sqrt{m})$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. □

Η συγκεκριμένη αυτή της εφαρμογή της μεθόδου των ακολουθιών διατήρησης οφείλεται στον B. Bollobás ([8]).

Κεφάλαιο 8

Τυχαίοι περίπατοι και μαρκοβιανές αλυσίδες

8.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε μια νεότατη και πολύ ισχυρή πιθανοτική μέθοδο (τη μέθοδο των τυχαίων περιπάτων και των μαρκοβιανών αλυσίδων) που έχει έντονο κατασκευαστικό-αλγοριθμικό χαρακτήρα και διαφέρει αρκετά από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

Πραγματικά, όλες οι τεχνικές που περιγράψαμε μέχρι τώρα, έχουν δύο βασικούς κοινούς στόχους οι οποίοι χαρακτηρίζουν την ενιαία εσωτερική λογική με βάση την οποία αναπτύσσονται. Οι στόχοι αυτοί, συνοπτικά, είναι:

- Η απόδειξη της ύπαρξης συνδυαστικών δομών που πληρούν ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες.

- Ο υπολογισμός των ποσοτικών χαρακτηριστικών γραφοθεωρητικών συναρτήσεων.

Αντίθετα, δε θίξαμε μέχρι τώρα καθόλου το θέμα του σχεδιασμού και της ανάλυσης αλγόριθμων που, αξιοποιώντας την πιθανοτική μέθοδο, κατασκευάζουν τέτοιες επιθυμητές συνδυαστικές δομές, στο βαθμό που αυτές υπάρχουν. Χαρακτηριστικός από την άποψη αυτή είναι ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα των κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης: ενώ αποδείξαμε την ύπαρξη λογαριθμικά μικρών κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης σε πυκνούς τυχαίους γράφους σχεδόν βέβαια (και επίσης δείξαμε ότι σε τέτοιους γράφους δεν υπάρχουν, με μεγάλη πιθανότητα, μικρότερα κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης), δεν αναφερθήκαμε καθόλου στους αλγόριθμους εκείνους που κατασκευάζουν τέτοια σχεδόν βέλτιστα (από την άποψη ακριβώς ότι είναι οσοδήποτε κοντά στο βέλτιστο λογαριθμικό μέγεθος) κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με αποδοτικό τρόπο, προσφέροντας έτσι μια ικανοποιητική λύση στο υπολογιστικά δύσκολο αυτό πρόβλημα.

Σύμφωνα και με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.4 ο ρόλος της πιθανοτικής μεθόδου είναι ιδιαίτερα σημαντικός στην αποτελεσματική αντιμετώπιση υπολογιστικών προβλημάτων τα οποία θεωρούνται, από τη σκοπιά της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, δύσκολα (hard) από την άποψη ότι υπάρχουν ισχυρές θεωρητικές και πρακτικές ενδείξεις για τη μη ύπαρξη αποδοτικών (πολυωνυμικής πολυπλοκότητας χρόνου) αλγόριθμων για την ακριβή (exact) επίλυσή τους.

Η συνεισφορά της πιθανοτικής μεθόδου στο σημαντικό αυτό ζήτημα συνίσταται στη δυνατότητα σχεδιασμού αλγόριθμων που κατασκευάζουν μια ικανοποιητική προσέγγιση (approximate solution) της ακριβούς λύσης σε πολυωνυμικό χρόνο με μεγάλη πιθανότητα ή και κατά μέση τιμή. Οι αλγόριθμοι αυτοί, ακριβώς επειδή στηρίζονται στην εκτέλεση τυχαίων πειραμάτων τα αποτελέσματα των οποίων καθορίζουν την πορεία εξέλιξής τους, αποκαλούνται πιθανοτικοί αλγόριθμοι (randomized algorithms). Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [29, 53, 54] για μια εξαιρετική περιγραφή ζητημάτων της θεωρίας της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Επίσης, το [47] αποτελεί μια πολύπλευρη (αλλά και σύγχρονη, αφού το βιβλίο αυτό εκδόθηκε το 1995) διαπραγμάτευση ορισμένων βασικών μεθόδων σχεδιασμού και ανάλυσης πιθανοτικών αλγόριθμων.

Μια ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση αυτής της αποδοτικής προσεγγιστικής επίλυσης υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων, που τα τελευταία χρόνια αποτελεί αντικείμενο έντονης έρευνας, είναι η προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης (counting) και τυχαίας κατασκευής (random generation) συνδυαστικών δομών που ικανοποιούν ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες.

Η πρώτη κατηγορία προβλημάτων συνίσταται στον υπολογισμό του αριθμού όλων των επιθυμητών συνδυαστικών δομών (π.χ. όλων των γεννητικών δέντρων (spanning trees) ή όλων των ταιριασμάτων (matchings) ενός γράφου). Η τυχαία κατασκευή των δομών αυτών συνίσταται στην παραγωγή τους με τυχαίο τρόπο και σύμφωνα με μια ορισμένη κατανομή (π.χ. ομοιόμορφα, uniformly).

Η σημασία του σχεδιασμού και της ανάλυσης αποδοτικών πιθανοτικών αλγόριθμων για δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα γενικά, και για δύσκολα προβλήματα απαρίθμησης και τυχαίας κατασκευής ειδικότερα, είναι τόσο μεγάλη και οι αντίστοιχες μέθοδοι και τεχνικές τόσο σύνθετες και πολύπλευρες, ώστε μια πλήρης διαπραγμάτευσή τους θα μπορούσε κάλλιστα να αποτελέσει αντικείμενο ενός άλλου, ξεχωριστού βιβλίου (στην πραγματικότητα, σκοπεύουμε να επανέλθουμε με αναλυτικό τρόπο στο σημαντικό αυτό ζήτημα στο δεύτερο τόμο αυτού του βιβλίου).

Ωστόσο, η μεγάλη σημασία των θεμάτων αυτών επιβάλλει την έστω και σύντομη και συνοπτική παρουσίαση ορισμένων βασικών τους πλευρών. Κρίνουμε επομένως σκόπιμο να αναπτύξουμε στα πλαίσια ενός ξεχωριστού κεφαλαίου αυτού του τόμου ορισμένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας τουλάχιστον από τις πλέον σύγχρονες και ισχυρές πιθανοτικές αλγοριθμικές τεχνικές: της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων (The Markov Chain Method).

Αρχικά θα περιγράψουμε την έννοια του τυχαίου περίπατου (random walk) και τη σχέση του σημαντικού αυτού αναλυτικού εργαλείου με το σχεδιασμό και την ανάλυση της πολυπλοκότητας χρόνου πιθανοτικών αλγόριθμων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις μαρκοβιανές αλυσίδες, μια αφαιρετική προσέγγιση των τυχαίων περιπάτων που διευκολύνει τη συστηματική τους μελέτη και στεκόμαστε με έμφαση σε μια σημαντική επιθυμητή ιδιότητα των μαρκοβιανών αλυσίδων: τη γρήγορη σύγκλιση (rapid mixing), που όταν ισχύει εξασφαλίζει την αποδοτική προσεγγιστική επίλυση, από την άποψη της πολυπλοκότητας χρόνου, του υπό εξέταση υπολογιστικά δύσκολου προβλήματος.

Επίσης, θα αναφερθούμε σε μια σημαντική κατηγορία γράφων, τους γράφους επεκτατές (expander graphs), στους οποίους οι τυχαίοι περίπατοι έχουν την ιδιότητα να αντιστοιχούν σε μαρκοβιανές αλυσίδες που συγκλίνουν γρήγορα. Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω έννοιες κατά τον υπολογισμό της μέγιστης επιτρεπόμενης πιθανότητας λάθους ώστε οι κανονικοί τυχαίοι γράφοι (που είναι, ακόμα και στην περίπτωση σταθερού βαθμού, γράφοι επεκτατές σχεδόν βέβαια) να διατηρούν αυτήν την ιδιότητα της επέκτασης παρά τα λάθη στις ακμές τους, με μεγάλη πιθανότητα.

8.2 Τυχαίοι περίπατοι

Οι τυχαίοι περίπατοι (random walks) αποτελούν ένα από τα ισχυρότερα αναλυτικά εργαλεία της πιθανοτικής μεθόδου. Το έντονο και διαρκώς αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζεται τα τελευταία χρόνια για τη μελέτη τυχαίων περιπάτων οφείλεται, πέρα από τη μαθηματική ομορφιά, την κομψότητα και τη δυνατότητά τους να αποδεικνύουν με σύντομο και απλό τρόπο ορισμένα από τα βαθύτερα χαρακτηριστικά των στοχαστικών φαινομένων, στη χρησιμοποίησή τους κατά το σχεδιασμό και κυρίως κατά την ανάλυση της πολυπλοκότητας χρόνου πιθανοτικών αλγόριθμων.

Ανάλογα με τη δομή στην οποία διεξάγεται ο τυχαίος περίπατος διακρίνουμε δύο βασικά είδη τυχαίων περιπάτων με ιδιαίτερη σημασία για την πιθανοτική μέθοδο. Ο τυχαίος περίπατος στην ευθεία (random walk on the line), που είναι και ο απλούστερος δυνατός, αντιστοιχεί στην επαναληπτική ρίψη ενός τίμιου (με ίση πιθανότητα για τα δύο δυνατά αποτελέσματα: "κεφάλι" και "γράμματα") νομίσματος και στην πρόσθεση της τιμής $+1$ για κάθε αποτέλεσμα που είναι "κεφάλι" ή της τιμής -1 για κάθε αποτέλεσμα που είναι "γράμματα" στο πριν από την τρέχουσα ρίψη διαμορφωμένο άθροισμα τιμών. Η μετά από κάθε επανάληψη διαφορά του αριθμού των αποτελεσμάτων που ήταν "κεφάλι" μείον τον αριθμό των αποτελεσμάτων που ήταν "γράμματα" (που ισούται με το τρέχον άθροισμα των δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών με τιμές $+1$ και -1 για κάθε ρίψη, ισοπίθανα για κάθε δυνατή τιμή και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ρίψεις) χαρακτηρίζει την τρέχουσα κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο τυχαίος περίπατος. Η ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία εξηγεί την ονομασία "περίπατος στην ευθεία" για το είδος αυτό του τυχαίου περίπατου: η διακύμανση των μερικών αθροισμάτων των τιμών $+1$ και -1 αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σωματιδίου στην ευθεία των πραγματικών αριθμών το οποίο, ξεκινώντας από την τιμή 0, επιλέγει σε κάθε διακριτό χρονικό βήμα (αντίστοιχα, μετά από κάθε ρίψη του νομίσματος) είτε να κινηθεί κατά 1 βήμα προς τα δεξιά (αποτέλεσμα "κεφάλι", τιμή $+1$) είτε να κινηθεί κατά 1 βήμα προς τα αριστερά (αποτέλεσμα "γράμματα", τιμή -1).

Παρά την εξαιρετική απλότητά του, ο τυχαίος περίπατος στην ευθεία έχει σημαντικές εφαρμογές στην ανάλυση κατά μέση τιμή της απόδοσης πιθανοτικών αλγόριθμων. Μια τέτοια χαρακτηριστική εφαρμογή είναι ο υπολογισμός της μέσης πολυπλοκότητας χρόνου ενός πιθανοτικού αλγόριθμου για μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας λογικών τύπων (satisfiability, SAT) που παρουσιάζουμε αργότερα σε αυτήν την ενότητα. Επίσης, παροτρύνουμε τον αναγνώστη να ανατρέξει στο [25] όπου, στα πλαίσια ενός ξεχωριστού κεφαλαίου, αναλύονται ορισμένες βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν τον τυχαίο περίπατο στην ευθεία (όπως η πιθανότητα επιστροφής στο σημείο εκκίνησης μέσα σε ορισμένο χρονικό διάστημα, η κατανομή του αριθμού των περασμάτων από τον θετικό στον αρνητικό ημιάξονα της ευθείας των πραγματικών αριθμών κτλ.) και αποδεικνύονται με εξαιρετικά απλό τρόπο ορισμένα βαθιά χαρακτηριστικά των φαινομένων διακύμανσης σε τυχαία πειράματα (chance fluctuation phenomena) που έρχονται σε ευθεία αντίθεση με την κοινή λογική και προσφέρουν τη δυνατότητα μιας πληρέστερης κατανόησης των τυχαίων αυτών φαινομένων.

Ακόμα πιο σημαντικός, λόγω της ευρύτατης εφαρμογής του σε γραφοθεωρητικά προβλήματα και των αυξημένων δυνατοτήτων αφαίρεσης που προσφέρει η περισσότερο σύνθετη δομή του, είναι ο τυχαίος περίπατος σε γράφο. Πρόκειται για την περιγραφή από μια διακριτού χρόνου στοχαστική διεργασία της τυχαίας κίνησης ενός σωματιδίου (particle) σε ένα γράφο, σε κάθε βήμα της οποίας το σωματίδιο, ευρισκόμενο σε μια συγκεκριμένη κορυφή του γράφου επιλέγει την επόμενη κορυφή στην οποία θα μεταβεί ισοπίθανα ανάμεσα σε όλες τις γειτονικές κορυφές της κορυφής στην οποία βρίσκεται και στοχαστικά ανεξάρτητα από τις αντίστοιχες επιλογές που έκανε στο παρελθόν.

Δύο βασικές ποσότητες για την εξέλιξη ενός τυχαίου περίπατου σε γράφο, με ιδιαίτερη χρησιμότητα κατά την ανάλυση της πολυπλοκότητας μέσης τιμής της απόδοσης πιθανοτικών αλγόριθμων, είναι:

- ο μέσος αριθμός χρονικών βημάτων για τη μετάβαση από μια συγκεκριμένη κορυφή u σε μια άλλη κορυφή v.
- ο μέσος αριθμός χρονικών βημάτων για την επίσκεψη σε όλες τις κορυφές του γράφου.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να θεμελιώσουμε τη σχέση ανάμεσα σε τέτοιες χαρακτηριστικές ποσότητες και τη μέση πολυπλοκότητα χρόνου ενός πιθανοτικού αλγόριθμου. Θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα την ανάλυση κατά μέση τιμή της απόδοσης ενός πιθανοτικού αλγόριθμου για μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας λογικών τύπων (boolean formulas), με βάση την προσομοίωση της εξέλιξης του αλγόριθμου αυτού από έναν τυχαίο περίπατο στην ευθεία.

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη (δες επίσης την ενότητα 2.5) ότι ένας λογικός τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή αποτελείται από τη λογική σύζευξη (AND) προτάσεων (clauses) που είναι διαζεύξεις (OR) λογικών μεταβλητών που βρίσκονται σε απλή ή συμπληρωμένη μορφή. Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας συνίσταται στο να απαντηθεί το αν υπάρχει ή όχι μία τουλάχιστον ανάθεση των δύο δυνατών λογικών τιμών (αληθής, ψευδής) στις λογικές μεταβλητές η οποία να ικανοποιεί τον λογικό τύπο (δηλαδή να ικανοποιεί όλες τις προτάσεις του ταυτόχρονα).

Η ειδική περίπτωση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας (SAT) όπου όλες οι προτάσεις του λογικού τύπου έχουν τον ίδιο αριθμό όρων k ονομάζεται $k-$SAT. Είναι γνωστό (βλέπε π.χ. [29]) ότι το $k-$SAT πρόβλημα παραμένει υπολογιστικά δύσκολο για $k \geq 3$, ενώ έχει επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για τις τιμές $k = 1, 2$. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικό πιθανοτικό αλγόριθμο για την επίλυση του $2-$SAT προβλήματος και αναλύουμε μερικά την πολυπλοκότητά του κατά μέση τιμή.

Ο αλγόριθμος αυτός, ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε ανάθεση τιμών στις λογικές μεταβλητές και για όσο υπάρχει μία τουλάχιστον πρόταση του τύπου η οποία δεν ικανοποιείται, τροποποιεί διαδοχικά την τρέχουσα ανάθεση επιλέγοντας μια οποιαδήποτε μη ικανοποιημένη πρόταση και αλλάζοντας τη λογική τιμή ενός (τυχαία και ομοιόμορφα επιλεγόμενου) από τους δύο όρους της πρότασης. Αν η ανάθεση που προκύπτει ικανοποιεί το λογικό τύπο, ο αλγόριθμος τερματίζει αναφέροντας επιτυχία (ικανοποιησιμότητα), διαφορετικά η παραπάνω περιγραφείσα διαδικασία για τη δημιουργία μιας νέας ανάθεσης επαναλαμβάνεται. Στο σημείο αυτό προκύπτει με φυσικό τρόπο το ακόλουθο ερώτημα: δοθείσης της ικανοποιησιμότητας του λογικού τύπου, δηλαδή της ύπαρξης μίας τουλάχιστον ανάθεσης λογικών τιμών στις μεταβλητές του η οποία τον ικανοποιεί, ποιος είναι ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ο αλγόριθμος που περιγράψαμε για να εντοπίσει μια τέτοια ανάθεση και επομένως να απαντήσει καταφατικά στο ερώτημα της ικανοποιησιμότητας του λογικού τύπου; Στην ερώτηση αυτή θα απαντήσουμε μερικά προσομοιώνοντας την εξελικτική πορεία του αλγόριθμου με την κίνηση ενός σωματιδίου κατά τη διάρκεια ενός τυχαίου περίπατου στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Εστω ένας ικανοποιήσιμος λογικός τύπος με n μεταβλητές και έστω A μια συγκεκριμένη ανάθεση που τον ικανοποιεί. Καλούμε τις τιμές που αναθέτει η A στις λογικές μεταβλητές "σωστές", από την άποψη ότι, προκειμένου για τη συγκεκριμένη ανάθεση, είναι οι τιμές που ικανοποιούν το λογικό τύπο. Εστω $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ο αριθμός των λογικών μεταβλητών στις οποίες έχουν ανατεθεί σωστές τιμές. Επειδή σε κάθε επαναληπτικό βήμα του αλγόριθμου αλλάζει η τιμή μιας μεταβλητής, η τιμή του i μπορεί μόνο να γίνει είτε $i + 1$ είτε $i - 1$ αν $0 < i < n$, ενώ αν $i = 0$ μπορεί μόνο να αυξηθεί κατά 1 και αν $i = n$ ο αλγόριθμος τερματίζει αναφέροντας επιτυχία (φυσικά είναι δυνατό να τερματίσει επιτυχώς και σε κάποια άλλη τιμή του i, που αντιστοιχεί στην ικανοποίηση του λογικού τύπου από μια άλλη ανάθεση, διαφορετική από τη συγκεκριμένη ανάθεση A).

Το κρίσιμο σημείο στην ανάλυση της απόδοσης του αλγόριθμου είναι ότι η αύξηση της τιμής του i σε $i + 1$ σε κάθε επαναληπτικό βήμα είναι όχι απλά δυνατή αλλά και αρκετά πιθανή. Πραγματικά, επειδή η μεταβλητή της οποίας αλλάζουμε την τιμή επιλέγεται από κάποια μη ικανοποιημένη πρόταση, τουλάχιστον ένας από τους δύο όρους της πρότασης αυτής έχει μη σωστή τιμή. Επομένως, και ακριβώς επειδή διαλέγουμε κάποιον από τους δύο όρους της πρότασης τυχαία και ομοιόμορφα, ο αριθμός των σωστών τιμών αυξάνεται κατά 1 σε κάθε επαναληπτικό βήμα με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$ (ακριβέστερα, η πιθανότητα είναι $1/2$ αν ένας μόνο από τους δύο όρους της επιλεγμένης πρότασης έχει μη σωστή τιμή και 1 αν και οι δύο όροι έχουν λανθασμένες τιμές).

Η συμπεριφορά του αλγόριθμου (και ειδικότερα η μεταβολή της τιμής i του αριθμού των σωστών μεταβλητών σε $i + 1$ ή $i - 1$ σε κάθε επαναληπτικό βήμα όπου $0 < i < n$) μπορεί να προσομοιωθεί με αφαιρετικό τρόπο από τον τυχαίο περίπατο ενός σωματιδίου που κινείται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ευρισκόμενο στη θέση i επιλέγει να μεταβεί είτε στη θέση $i + 1$ είτε στη θέση $i - 1$, όπου η κίνηση προς τη θέση $i + 1$ γίνεται με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$.

Επομένως, ο υπολογισμός της μέσης πολυπλοκότητας χρόνου που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να εντοπίσει μια ανάθεση που ικανοποιεί το λογικό τύπο ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του μέσου χρόνου που χρειάζεται το σωματίδιο κατά τον τυχαίο περίπατο που περιγράψαμε προηγουμένως για να κινηθεί (στη χειρότερη περίπτωση) από τη θέση 0 στη θέση n, η οποία αντιστοιχεί στην ανάθεση σωστών τιμών σε όλες τις n μεταβλητές του λογικού τύπου και επομένως στην ικανοποιησιμότητά του.

Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει με γλαφυρό τρόπο τη δυνατότητα χρησιμοποίησης της θεωρίας τυχαίων περιπάτων για την ανάλυση της μέσης πολυπλοκότητας χρόνου πιθανοτικών αλγόριθμων. Πιο συγκεκριμένα, θεμελιώνει την ισοδυναμία του υπολογισμού της μέσης πολυπλοκότητας χρόνου ενός πιθανοτικού αλγόριθμου με τον υπολογισμό του μέσου χρόνου που χρειάζεται ένα σωματίδιο κατά τον αντίστοιχο τυχαίο περίπατο για να κινηθεί μεταξύ συγκεκριμένων θέσεων. Επομένως, η ανάπτυξη τεχνικών υπολογισμού τέτοιων μέσων ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη ενός τυχαίου περίπατου έχει ιδιαίτερη σημασία, ιδωμένη από τη σκοπιά της πιθανοτικής μεθόδου. Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται τρεις τέτοιες βασικές τεχνικές:

- Η χρησιμοποίηση στοιχειώδους θεωρίας πιθανοτήτων.
- Η αντιστοιχία με τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων.
- Η μέθοδος των μαρκοβιανών αλυσίδων.

Πραγματικά, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η χρησιμοποίηση απλών πιθανοθεωρητικών γνώσεων επαρκεί για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν έναν τυχαίο περίπατο. Από αυτήν την άποψη, είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα που ακολουθεί:

Θεώρημα 55. Ο μέσος αριθμός χρονικών βημάτων που απαιτείται κατά τη διάρκεια ενός τυχαίου περίπατου σε έναν πλήρη γράφο n κορυφών για τη μετάβαση από μια κορυφή u για πρώτη φορά σε μια άλλη κορυφή v είναι $n-1$.

Απόδειξη: Εστω t ο αριθμός των απαιτούμενων βημάτων (χρόνος). Από τον ορισμό της μέσης τιμής, είναι

$$E(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1}$$

όπου p είναι η πιθανότητα επίσκεψης στην κορυφή v σε οποιοδήποτε βήμα και $x = 1-p$. Λόγω της τυχαίας ομοιόμορφης επιλογής της κάθε φορά επόμενης κορυφής είναι

$$p = \frac{1}{n-1}$$

σε οποιοδήποτε βήμα. Τελικά, και υπολογίζοντας το άθροισμα, είναι

$$E(t) = p\,\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} = n-1$$

Σημειώνουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι ο απαιτούμενος χρόνος του περίπατου ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή (αφού ουσιαστικά πρόκειται για τον αριθμό ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli μέχρι και την πρώτη επιτυχία, δηλαδή την επίσκεψη στην κορυφή v) με παράμετρο (πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή) $p = 1/(n-1)$ και από το γεγονός ότι η μέση τιμή της γεωμετρικής κατανομής είναι ίση με $1/p = n-1$. □

Η χρησιμοποίηση τέτοιων στοιχειωδών μέσων ανάλυσης, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις όπως αυτή που μόλις περιγράψαμε οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα, αποδεικνύεται ανεπαρκής κατά τη μελέτη περισσότερο σύνθετων τυχαίων περιπάτων και, σε κάθε περίπτωση, δε συνιστά μια γενική, συστηματική μέθοδο.

Μια περισσότερο συστηματική προσέγγιση στη μελέτη ενός τυχαίου περίπατου προκύπτει χρησιμοποιώντας ένα ηλεκτρικό κύκλωμα για την αφαιρετική προσομοίωση του υποκείμενου του τυχαίου περίπατου γράφου και αξιοποιώντας την κλασσική θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων για την ανάλυση. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [47] για μια αναλυτική περιγραφή της αντιστοιχίας ανάμεσα στη θεωρία των τυχαίων περιπάτων και τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Στα πλαίσια αυτής της ενότητας, περιοριζόμαστε απλά στην παρουσίαση ορισμένων βασικών χαρακτηριστικών της αντιστοιχίας αυτής.

Το ηλεκτρικό κύκλωμα $N(G)$ που προσομοιώνει το γράφο G κατασκευάζεται αντιστοιχώντας έναν κόμβο σε κάθε κορυφή του γράφου και μια ηλεκτρική αντίσταση 1 ohm σε κάθε ακμή του G. Εστω R_{uv} η ενεργή αντίσταση (effective resistance) μεταξύ των κόμβων του ηλεκτρικού κυκλώματος που αντιστοιχούν στις κορυφές u και v, δηλαδή R_{uv} είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα u και v κατά τη διέλευση ρεύματος 1 ampere από το u στο v.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε (για μια απόδειξη βλέπε το [47]) ένα ιδιαίτερα ισχυρό θεώρημα για τη μελέτη τυχαίων περιπάτων χρησιμοποιώντας τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων, το οποίο συσχετίζει το μέσο χρόνο C_{uv} επιστροφής στην κορυφή u αφού υπάρξει τουλάχιστον μία επίσκεψη στην κορυφή v με την ενεργή αντίσταση R_{uv} μεταξύ των κορυφών u, v. Σημειώνουμε ότι m είναι ο αριθμός των ακμών του γράφου G.

Θεώρημα 56.

$$C_{uv} = 2\, m\, R_{uv}$$

□

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό (και σαν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής του) θα αποδείξουμε ότι η μέση πολυπλοκότητα χρόνου του πιθανοτικού αλγόριθμου για την ειδική περίπτωση ικανοποιησιμότητας τυχαίων λογικών τύπων (2-SAT) που παρουσιάσαμε προηγουμένως σε αυτήν την ενότητα είναι $O(n^2)$. Πραγματικά, ο υποκείμενος γράφος του τυχαίου περίπατου που προσομοιώνει τον αλγόριθμο αυτό έχει σύνολο κορυφών της μορφής $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ και σύνολο ακμών $E = \{(v_i, v_{i+1}), 0 \leq i < n\}$, δηλαδή πρόκειται για έναν γράφο "ευθύγραμμο τμήμα" με $m = n$. Προφανώς, από τη σύνδεση στο αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα των m ηλεκτρικών αντιστάσεων σε σειρά, είναι $R_{v_0 v_n} = m = n$ οπότε $C_{v_0 v_n} = O(n^2)$. Αλλά, εξαιτίας της συμμετρίας του γράφου, ο χρόνος $h_{v_0 v_n}$ για τη μετάβαση από την κορυφή v_0 για πρώτη φορά στην κορυφή v_n ισούται με το χρόνο για την αντίστροφης κατεύθυνσης μετάβαση από την v_n στη v_0 για πρώτη φορά, επομένως $C_{v_0 v_n} = 2h_{v_0 v_n}$, δηλαδή $h_{v_0 v_n} = O(n^2)$ επίσης και η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι ο χρόνος $h_{v_0 v_n}$ αποτελεί ένα άνω φράγμα (αφού η μετάβαση από το ένα άκρο v_0 στο άλλο άκρο v_n αποτελεί χειρότερη περίπτωση) για τη μέση πολυπλοκότητα χρόνου του αλγόριθμου.

Πάντως, περισσότερο γενική και συστηματική μέθοδος μελέτης τυχαίων περιπάτων είναι η μέθοδος των μαρκοβιανών αλυσίδων (αφού οι τυχαίοι περίπατοι που ορίσαμε σε αυτήν την ενότητα είναι ειδικές περιπτώσεις μαρκοβιανών αλυσίδων) και για αυτό το λόγο κρίνουμε σκόπιμο να αφιερώσουμε μερικές ενότητες στην παρουσίασή της.

8.3 Μαρκοβιανές αλυσίδες

Οι μαρκοβιανές αλυσίδες αποτελούν, ανάμεσα στις πολλές εφαρμογές τους, ένα πανίσχυρο μοντέλο για την αφαιρετική προσέγγιση και τη συστηματική μελέτη τυχαίων περιπάτων. Η ευρύτατη χρησιμοποίηση της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων, ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, καθιστά απαραίτητη μια εκτενή αναφορά στη σημαντική αυτή μαθηματική έννοια, όσο αυτό είναι δυνατό στα πλαίσια ενός γενικού, εισαγωγικού βιβλίου για την πιθανοτική μέθοδο στο σύνολό της.

Οι αλυσίδες Markov (και οι αντίστοιχες διαδικασίες συνεχούς χρόνου) είναι κεντρικές έννοιες της Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων. Τα πεδία εφαρμογών τους περιλαμβάνουν τον ηλεκτρομαγνητισμό, τη θεωρία παιγνίων, τα δίκτυα υπολογιστών, τη θεωρία αναμονής (queueing theory) κτλ. Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιάσουμε μια περιγραφή των βασικών ιδιοτήτων τους, που δεν φιλοδοξεί να αποτελέσει πλήρη θεμελίωση της θαυμαστής αυτής έννοιας.

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα M είναι μια διακριτού χρόνου στοχαστική ανέλιξη ορισμένη με βάση ένα σύνολο καταστάσεων (states) S και έναν πίνακα P πιθανοτήτων μετάβασης (transition probabilities) ανάμεσα σε αυτές τις καταστάσεις. Ο αριθμός $|S|$ των καταστάσεων της αλυσίδας είναι είτε πεπερασμένος είτε αριθμήσιμα άπειρος και ο πίνακας P είναι ένας $|S| \times |S|$ τετραγωνικός πίνακας. Η μαρκοβιανή αλυσίδα, ευρισκόμενη σε μια μοναδική κατάσταση κάθε χρονική στιγμή, πραγματοποιεί μεταβάσεις ανάμεσα στις διάφορες καταστάσεις στα διακριτά βήματα $t = 1, 2, \ldots$ που αντιστοιχούν σε διακριτές χρονικές στιγμές. Εστω X_t η κατάσταση στην οποία βρίσκεται η αλυσίδα τη χρονική στιγμή t. Η πιθανότητα μετάβασης της αλυσίδας από την κατάσταση αυτή, έστω i, στην οποία βρίσκεται την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, σε μια άλλη κατάσταση j την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή $t+1$ δίνεται από το στοιχείο P_{ij} του πίνακα μετάβασης P. Επομένως, και από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, τα στοιχεία P_{ij} του πίνακα μετάβασης ικανοποιούν, για όλες τις καταστάσεις $i, j \in S$, τις σχέσεις

$$0 \leq P_{ij} \leq 1 \text{ και } \sum_{j \in S} P_{ij} = 1$$

Η πιθανότητα μετάβασης P_{ij} είναι στην πραγματικότητα η δεσμευμένη πιθανότητα μετάβασης της αλυσίδας τη χρονική στιγμή $t+1$ στην κατάσταση j δοθέντος ότι βρίσκονταν στην κατάσταση i την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, δηλαδή

$$P_{ij} = \Pr\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

Μια σημαντική ιδιότητα των μαρκοβιανών αλυσίδων, η οποία καλείται ιδιότητα αμνησίας (memorylessness property), είναι ότι η κάθε φορά επόμενη κατάσταση μιας αλυσίδας εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και είναι ανεξάρτητη από όλες τις καταστάσεις στις οποίες βρέθηκε η αλυσίδα προηγουμένως. Με άλλα λόγια, η μελλοντική συμπεριφορά της αλυσίδας εξαρτάται μόνο από το παρόν και είναι ανεξάρτητη από τη συμπεριφορά της στο παρελθόν, την οποία και "ξεχνά". Αλλωστε, εάν ως "κατάσταση" θεωρήσουμε την πλήρη περιγραφή της ιστορίας ενός φαινομένου, τότε η οποιαδήποτε ανέλιξη περιγράφεται από μια αλυσίδα (ή ανέλιξη) Markov. Αυτό που ποσοτικά έχει σημασία (για τον αποτελεσματικό χειρισμό της αλυσίδας) είναι το μέγεθος (ο πληθάριθμος) του συνόλου των καταστάσεών της. Μια τεχνική απόδοση της ιδιότητας της αμνησίας είναι η ακόλουθη σχέση:

$$\Pr\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = \Pr\{X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_t = i_t = i\} = P_{ij}$$

Επομένως, ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης P και η κατανομή της αρχικής κατάστασης (initial state distribution) της αλυσίδας (η οποία συμπεριλαμβάνει και τον ντετερμινιστικό ορισμό μιας αρχικής κατάστασης $X_0 = i$) επαρκούν για τον προσδιορισμό της εξέλιξης της αλυσίδας, αφού ορίζουν πλήρως την κατανομή όλης της ακολουθίας $\{X_t\}$ των διαδοχικών καταστάσεων στις οποίες μεταβαίνει η αλυσίδα. Με βάση τα παραπάνω, ορίζουμε σαν πιθανότητες μετάβασης σε t βήματα στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i την πιθανότητα

$$P_{ij}^{(t)} = \Pr\{X_t = j | X_0 = i\}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι οι πιθανότητες υψηλότερης τάξης μετάβασης $P_{ij}^{(t)}$ είναι στοιχεία του πίνακα P^t, που προκύπτει από την ύψωση στην $t-$οστή δύναμη του πίνακα μετάβασης P.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η πιθανότητα $r_{ij}^{(t)}$ η πρώτη μετάβαση της αλυσίδας σε μια κατάσταση j να πραγματοποιηθεί τη χρονική στιγμή t, δοθέντος ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i

$$r_{ij}^{(t)} = \Pr\{X_t = j \ \text{ και } \ X_s \neq j, \ \text{ για } \ 1 \leq s \leq t-1 | X_0 = i\}$$

Αυτή η σχέση προσδιορίζει την κατανομή της πρώτης μετάβασης (first passage distribution) σε μια κατάσταση j.

Επομένως, η πιθανότητα f_{ij} να υπάρξει "κάποτε" (δηλαδή σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο μέλλον) μια μετάβαση στην κατάσταση j δοθέντος ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i, προκύπτει από την άθροιση των πιθανοτήτων μετάβασης για πρώτη φορά στην j (δοθέντος ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i) τη χρονική στιγμή t, για όλα τα t, δηλαδή

$$f_{ij} = \sum_{t>0} r_{ij}^{(t)}$$

Επίσης, ο μέσος αριθμός βημάτων h_{ij} για να φτάσει η αλυσίδα (δοθέντος ότι ξεκινά από την κατάσταση i) σε μια κατάσταση j (mean recurrence time for state j) είναι, από τον ορισμό της μέσης τιμής,

$$h_{ij} = \sum_{t>0} t \, r_{ij}^{(t)}$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, ενώ η σχέση $f_{ij} < 1$ συνεπάγεται ότι $h_{ij} = \infty$ (δηλαδή το γεγονός ότι η μετάβαση στην j δεν είναι πιθανοτικά βέβαιη συνεπάγεται ότι ο αναμενόμενος χρόνος για τη μετάβαση αυτή είναι άπειρος), το αντίστροφο δεν ισχύει (δηλαδή είναι δυνατό να είναι $h_{ij} = \infty$ ενώ $f_{ij} = 1$). Η παρατήρηση αυτή προσφέρει τη δυνατότητα για μια πρώτη, σημαντική κατηγοριοποίηση των καταστάσεων μιας μαρκοβιανής αλυσίδας.

Ορισμός 26. Μια κατάσταση i καλείται παροδική (transient) αν $f_{ii} < 1$ (και επομένως $h_{ii} = \infty$), ενώ καλείται επαναληπτική (persistent) αν $f_{ii} = 1$. Μια επαναληπτική κατάσταση καλείται μηδενικά επαναληπτική (null persistent) αν $h_{ii} = \infty$ και μη μηδενικά επαναληπτική (non-null persistent) αν $h_{ii} < \infty$. □

Μπορεί να αποδειχθεί (βλ. [25, 34]) ότι σε μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων υπάρχουν μόνο παροδικές ή μη μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις ενώ, ακριβώς λόγω του πεπερασμένου αριθμού καταστάσεων που αποκλείει την ταυτόχρονη ικανοποίηση των σχέσεων $f_{ii} = 1$ και $h_{ii} = \infty$, δεν είναι δυνατό να υπάρχουν μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις. Περιοριζόμενοι επομένως στη μελέτη μαρκοβιανών αλυσίδων με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων μπορούμε να καλούμε, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση, τις μη μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις απλά επαναληπτικές.

Ορίζουμε σαν υποκείμενο (underlying) γράφο μιας μαρκοβιανής αλυσίδας τον κατευθυνόμενο (directed) γράφο που έχει μια κορυφή για κάθε κατάσταση της αλυσίδας και μια κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή i στην κορυφή j αν και μόνο αν η πιθανότητα μετάβασης (σε ένα βήμα) από την (αντίστοιχη κατάσταση) i στην j είναι $P_{ij} > 0$. Η χρησιμοποίηση της γνωστής γραφοθεωρητικής έννοιας της ισχυρής συνεκτικής συνιστώσας ενός γράφου προσφέρει, στη συγκεκριμένη περίπτωση, τη δυνατότητα περιγραφής ενός μέγιστου συνόλου καταστάσεων C για οποιοδήποτε ζευγάρι καταστάσεων i, j του οποίου είναι $P_{ij}^{(t)} > 0$ και $P_{ji}^{(t')} > 0$, για κάποια t, t'. Με άλλα λόγια, το σύνολο C είναι το μέγιστο σύνολο καταστάσεων μεταξύ των οποίων είναι δυνατή η μετάβαση και προς τις δύο κατευθύνσεις σε κάποιο αριθμό βημάτων.

Ορισμός 27. Καλούμε ισχυρή συνεκτική συνιστώσα (strongly connected component) C ενός κατευθυνόμενου γράφου G ένα μέγιστο (maximal) υπογράφο του G έτσι ώστε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές i, j στο C να υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι ανάμεσα στις i και j, και προς τις δύο κατευθύνσεις. □

Μια ισχυρή συνεκτική συνιστώσα C ενός γράφου G καλείται κλειστή (ή τελική, final) αν δεν υπάρχουν ακμές οι οποίες να ξεκινούν από κορυφές του C και να καταλήγουν σε κορυφές εκτός C.

Η σημασία των παραπάνω ορισμών συνίσταται στη δυνατότητα που προσφέρουν για έναν γραφοθεωρητικό ορισμό μιας επαναληπτικής κατάστασης, όπως επίσης και άλλων σημαντικών εννοιών που καθορίζουν τη συμπεριφορά μιας μαρκοβιανής αλυσίδας.

Πραγματικά, σε μια πεπερασμένη μαρκοβιανή αλυσίδα η πιθανότητα μετάβασης σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων από μια οποιαδήποτε κορυφή μιας ισχυρής συνεκτικής συνιστώσας C σε μια άλλη κορυφή της συνιστώσας αυτής είναι μη μηδενική. Η πιθανότητα αυτή γίνεται 1 στην περίπτωση όπου η C είναι κλειστή, αφού η ιδιότητα της κλειστότητας αποκλείει οποιαδήποτε διαφυγή από τη C. Επομένως, μια κατάσταση είναι επαναληπτική αν και μόνο αν ανήκει σε μια κλειστή ισχυρή συνεκτική συνιστώσα C του γράφου G που αντιστοιχεί στη μαρκοβιανή αλυσίδα.

Η έννοια της ισχυρής συνεκτικής συνιστώσας χρησιμεύει επίσης κατά τον ορισμό της ακόλουθης σημαντικής ιδιότητας μιας μαρκοβιανής αλυσίδας.

Ορισμός 28. Μια μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται αδιαχώριστη (irreducible) αν και μόνο αν ο υποκείμενος γράφος της είναι ισχυρά συνεκτικός, δηλαδή αποτελείται από μία μοναδική ισχυρή συνεκτική συνιστώσα, η οποία προφανώς είναι και τελική. □

Είναι φανερό, με βάση και τον ορισμό μιας επαναληπτικής κατάστασης, ότι αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα είναι πεπερασμένη και αδιαχώριστη, τότε όλες οι καταστάσεις της είναι επαναληπτικές.

Μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια, η οποία μας επιτρέπει να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας περισσότερο στην πιθανότητα η μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται σε μια κατάσταση παρά στις πιθανότητες μετάβασης ανάμεσα στις διάφορες καταστάσεις, είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων κατάστασης (state probability vector), που συνιστά τη χρονικά μεταβαλλόμενη κατανομή της κατάστασης στην οποία βρίσκεται η αλυσίδα.

Ορισμός 29. Το διάνυσμα γραμμής $q^{(t)} = \left(q_1^{(t)}, \ldots, q_n^{(t)}\right)$ καλείται διάνυσμα πιθανοτήτων κατάστασης αν $q_i^{(t)}$ είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στην κατάσταση i, για οποιοδήποτε $i : 1 \leq i \leq n$. □

Είναι φανερό ότι $q^{(t+1)} = q^{(t)}P$ και επαγωγικά $q^{(t)} = q^{(0)}P^t$. Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα πιθανοτήτων κατάστασης μπορούμε να ορίσουμε με απλό τρόπο την πιο σημαντική ίσως έννοια της θεωρίας των μαρκοβιανών αλυσίδων, την ευσταθή κατανομή (stationary distribution).

Ορισμός 30. Ενα διάνυσμα γραμμής πιθανοτήτων κατάστασης π αποτελεί την ευσταθή κατανομή μιας μαρκοβιανής αλυσίδας, αν

$$\pi = \pi P$$

□

Παρατηρούμε ότι η σχέση $\pi^{(t)} = \pi^{(t)}P$ συνεπάγεται ότι $\pi^{(t)} = \pi^{(t+1)}$, δηλαδή $\pi_i^{(t)} = \pi_i^{(t+1)}$ για όλες τις καταστάσεις i. Επομένως, μια αλυσίδα η οποία βρίσκεται στην ευσταθή κατανομή τη χρονική στιγμή t, παραμένει στην ίδια κατανομή κατά τη χρονική στιγμή $t+1$ και (επαγωγικά) όλες τις μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, μια αλυσίδα στην ευσταθή κατανομή παρουσιάζει μια σταθερή, χρονικά μη μεταβαλλόμενη συμπεριφορά η οποία αποτελεί μια μόνιμη, τελική συμπεριφορά της αλυσίδας που θεωρείται ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Γι αυτό το λόγο η ευσταθής κατανομή καλείται επίσης κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution) ή κατανομή μόνιμης κατάστασης (steady-state distribution).

Μια άλλη σημαντική κατηγοριοποίηση των καταστάσεων μιας μαρκοβιανής αλυσίδας προκύπτει ανάλογα με το αν αυτές εμφανίζουν περιοδική συμπεριφορά ή όχι.

Ορισμός 31. Μια κατάσταση i καλείται περιοδική (periodic) αν και μόνο αν ο μέγιστος ακέραιος T που ικανοποιεί την ιδιότητα

$$q_i^{(t)} > 0 \;\Rightarrow\; t \in \{\alpha + kT | k \geq 0\}$$

είναι μεγαλύτερος του 1 ($\alpha > 0$ είναι ένας ακέραιος), οπότε και ο T καλείται περίοδος (periodicity) της κατάστασης. Στην αντίθετη περίπτωση η κατάσταση καλείται μη περιοδική (non-periodic). □

Με άλλα λόγια, μια κατάσταση είναι περιοδική με περίοδο T αν όλες οι ενδεχόμενες μεταβάσεις σε αυτήν είναι δυνατό να συμβαίνουν μόνο σε χρονικές στιγμές που αποτελούν όρους μιας αριθμητικής προόδου με λόγο T. Χαρακτηριστική περίπτωση αλυσίδων με περιοδικές καταστάσεις αντιστοιχούν σε τυχαίους περίπατους σε διμελείς (bipartite) γράφους. Λόγω των διαδοχικών μεταβάσεων από καταστάσεις ενός μέλους της αλυσίδας σε καταστάσεις του άλλου, όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2.

Η ύπαρξη περιοδικών καταστάσεων σε μια μαρκοβιανή αλυσίδα αποτελεί πηγή περιπλοκών στη συμπεριφορά της αφού, ακριβώς λόγω της περιοδικότητας, μια τέτοια αλυσίδα δεν συγκλίνει σε μια ευσταθή κατανομή. Η επιθυμητή ιδιότητα της γρήγορης σύγκλισης στην ευσταθή κατανομή (την οποία θα μελετήσουμε διεξοδικά στη μεθεπόμενη ενότητα) δικαιολογεί το γεγονός ότι περιοριζόμαστε στη μελέτη μαρκοβιανών αλυσίδων χωρίς περιοδικές καταστάσεις.

Ορισμός 32. Μια μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται απεριοδική (aperiodic) αν όλες οι καταστάσεις της είναι μη περιοδικές. □

Με βάση τα όσα προηγήθηκαν αναδεικνύονται δύο σημαντικές επιθυμητές ιδιότητες για τις καταστάσεις μιας μαρκοβιανής αλυσίδας:

- Η μη μηδενική επαναληπτικότητα.
- Η μη περιοδικότητα.

Μια κατάσταση που συνδυάζει και τις δύο αυτές ιδιότητες διαδραματίζει επομένως ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη μιας μαρκοβιανής αλυσίδας και ιδιαίτερα στην πορεία σύγκλισής της στην ευσταθή κατανομή, αφού πρόκειται για μια κατάσταση στην οποία η αλυσίδα επανέρχεται επαναληπτικά και με μη περιοδικό τρόπο. Αυτή ακριβώς η επαναληπτικότητα που χαρακτηρίζει τις εισόδους της αλυσίδας σε μια τέτοια κατάσταση, δικαιολογούν το χαρακτηρισμό της σαν εργοδικής (ergodic) κατάστασης.

Ορισμός 33. Μια μη περιοδική, μη μηδενικά επαναληπτική κατάσταση καλείται εργοδική. Μια αλυσίδα καλείται εργοδική αν περιλαμβάνει μόνο εργοδικές καταστάσεις. □

Ο εργοδικός χαρακτήρας μιας μαρκοβιανής αλυσίδας προσφέρει τη δυνατότητα εξαγωγής σημαντικών συμπερασμάτων για ορισμένες βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την πορεία της αλυσίδας προς την ευσταθή ισορροπία και τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ποσοτήτων. Τέτοιες ποσότητες είναι ο μέσος χρόνος h_{ii} για την επιστροφή σε μια κατάσταση i και ο αριθμός επισκέψεων $N(i,t)$ της αλυσίδας σε μια κατάσταση i σε ορισμένο χρονικό διάστημα t. Η σχέση αυτών των ποσοτήτων με την πιθανότητα π_i μιας κατάστασης i κατά την ευσταθή κατανομή περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα το οποίο, λόγω της ιδιαίτερης σημασίας του, αποκαλείται Θεμελιώδες Θεώρημα των Μαρκοβιανών Αλυσίδων.

Θεώρημα 57. Μια αδιαχώριστη, απεριοδική, πεπερασμένη μαρκοβιανή αλυσίδα ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ολες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

2. Υπάρχει μια μοναδική ευσταθής κατανομή π, κατά την οποία είναι $\pi_i > 0$ για όλες τις καταστάσεις i της αλυσίδας.

3. Ο μέσος χρόνος επιστροφής h_{ii} σε μια οποιαδήποτε κατάσταση i είναι

$$h_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

4. Ο αριθμός επισκέψεων $N(i,t)$ της αλυσίδας στην κατάσταση i σε χρονικό διάστημα μεγέθους t πληρεί τη σχέση

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(i,t)}{t} = \pi_i$$

□

Στη συνέχεια περιγράφουμε τις προϋποθέσεις ώστε η ευσταθής κατανομή μιας μαρκοβιανής αλυσίδας να είναι η ομοιόμορφη κατανομή. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 34. Μια εργοδική μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται συμμετρική εάν $\forall i, j$ είναι

$$P_{ij} = P_{ji}$$

□

Θεώρημα 58. Η ευσταθής κατανομή μιας εργοδικής, συμμετρικής μαρκοβιανής αλυσίδας με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων N είναι η ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή είναι, για κάθε κατάσταση i

$$\pi_i = \frac{1}{N}$$

□

Ολοκληρώνοντας τη συνοπτική αυτή περιγραφή των βασικότερων εννοιών και ιδιοτήτων μιας μαρκοβιανής αλυσίδας, τονίζουμε την ύπαρξη εκτενέστατης βιβλιογραφίας για αυτήν την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα μαθηματική έννοια (βλέπε π.χ. [25], [34]) και παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα, με περισσότερο ποιοτικό και λιγότερο τεχνικό τρόπο, τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων και τη χρησιμοποίησή της κατά την αποδοτική προσεγγιστική επίλυση δύο ιδιαίτερα σημαντικών κατηγοριών υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων: των προβλημάτων απαρίθμησης και των προβλημάτων τυχαίας κατασκευής επιθυμητών συνδυαστικών δομών.

8.4 Απαρίθμηση και τυχαία κατασκευή συνδυαστικών δομών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στην ιδιαίτερη σημασία που έχουν δύο μεγάλες κατηγορίες υπολογιστικών προβλημάτων: τα προβλήματα απαρίθμησης (counting problems) όπου καλούμαστε να υπολογίσουμε τον αριθμό ορισμένων υπό εξέταση συνδυαστικών δομών (π.χ.

των γεννητικών δέντρων ή των ταιριασμάτων ενός γράφου) και τα προβλήματα τυχαίας κατασκευής (random generation) που συνίστανται στην παραγωγή αυτών των συνδυαστικών δομών με τυχαίο τρόπο και σύμφωνα με μια ορισμένη κατανομή (π.χ. ομοιόμορφα, uniformly).

Η σημασία των προβλημάτων αυτών είναι μεγάλη: πέρα από το μαθηματικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν αυτά καθεαυτά, έχουν πολύπλευρες εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, με χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις αυτές της στατιστικής φυσικής, της βιολογίας και της χημείας. Ιδιαίτερα τα προβλήματα της τυχαίας κατασκευής (τα οποία έχουν μελετηθεί λιγότερο από τα αντίστοιχα προβλήματα απαρίθμησης) αποτελούν αντικείμενο ολοένα και εντονότερης έρευνας τα τελευταία χρόνια. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι οι γεννήτριες (ψευδο)τυχαίων αριθμών αποτελούν σημείο αφετηρίας του ζητήματος αυτού.

Ενας βασικός λόγος για το συνεχώς εντεινόμενο αυτό ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι η τυχαία κατασκευή προσφέρει, ιδιαίτερα στη χαρακτηριστική περίπτωση της κατασκευής με βάση την ομοιόμορφη κατανομή, τη δυνατότητα παραγωγής μελών ενός μεγάλου συνόλου δομών που, ακριβώς λόγω της ομοιόμορφης κατασκευής τους, είναι αντιπροσωπευτικά, από την άποψη της μέσης συμπεριφοράς, του συνόλου αυτού και επομένως ένας μικρός αριθμός από τα τυχαία κατασκευαζόμενα αυτά μέλη επαρκεί για την αρκετά ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων για τις δομές στο σύνολό τους. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη στην εμπειρική ανάλυση ευριστικών αλγόριθμων (heuristics) όπου οι τυχαία και ομοιόμορφα κατασκευαζόμενες αυτές δομές χρησιμοποιούνται σαν αντιπροσωπευτικά δοκιμαστικά δεδομένα (test data).

Αλλά και η τυχαία κατασκευή με βάση μια μη ομοιόμορφη κατανομή βοηθά στη δημιουργία αφαιρετικών μαθηματικών μοντέλων για φυσικά και άλλα συστήματα των οποίων οι καταστάσεις έχουν διαφορετικά "βάρη" (weights), που αντιστοιχούν στις διαφορετικές βαθμίδες της ενέργειάς τους. Η τυχαία κατασκευή διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη μέση συμπεριφορά διαφόρων σημαντικών ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν τα συστήματα αυτά. Από αυτήν την άποψη είναι χαρακτηριστική η συμβολή της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων στην βαθύτερη κατανόηση της επιτυχίας στοχαστικών τεχνικών συνδυαστικής βελτιστοποίησης (combinatorial optimization), όπως για παράδειγμα της τεχνικής του simulated annealing: οι χαμηλού κόστους λύσεις αντιστοιχούν σε μεγάλα βάρη και επομένως τείνουν να ευνοούνται κατά την τυχαία μη ομοιόμορφη κατασκευή.

Δυστυχώς, τα περισσότερα μη τετριμμένα προβλήματα απαρίθμησης και τυχαίας κατασκευής παρουσιάζουν, από την άποψη της θεωρίας της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, αυξημένη υπολογιστική δυσκολία, η οποία οφείλεται βασικά στην ανάγκη εξέτασης ενός εκθετικά μεγάλου αριθμού υποσυνόλων του γράφου. Η υπολογιστική δυσκολία αυτών των προβλημάτων καθιστά την ακριβή επίλυσή τους πρακτικά απαγορευτική. Για παράδειγμα, το πρόβλημα της απαρίθμησης των πλήρων ταιριασμάτων (perfect matchings) ενός γράφου είναι υπολογιστικά δύσκολο.

Η συνεισφορά της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων συνίσταται στη δυνατότητα ικανοποιητικής προσέγγισης τέτοιων υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων: οι αλγόριθμοι απαρίθμησης, αντί να υποχρεώνονται σε εκθετικού χρόνου ακριβείς λύσεις, περιορίζονται σε απαντήσεις που εμπεριέχουν μια ελεγχόμενα μικρή απόκλιση από την ακριβή λύση με μεγάλη πιθανότητα και σε πολυωνυμικό χρόνο, ενώ οι αλγόριθμοι τυχαίας κατασκευής, αντί να παράγουν συνδυαστικές δομές σύμφωνα με την ακριβή (π.χ. ομοιόμορφη) κατανομή, παράγουν "σχεδόν ομοιόμορφα" (almost uniformly) τυχαία κατασκευασμένες συνδυαστικές δομές σε πολυωνυμικό χρόνο.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας σε ένα ιδιαίτερα αξιοσημείωτο γεγονός: για τα περισσότερα προβλήματα η απαρίθμηση και η τυχαία κατασκευή είναι στενά συνδεδεμένες. Πιο συγκεκριμένα, ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για την προσεγγιστική απαρίθμηση (approximate counting), με μεγάλη πιθανότητα, συνδυαστικών δομών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την σχεδόν ομοιόμορφη (almost uniform) τυχαία κατασκευή των δομών αυτών σε πολυωνυμικό χρόνο και αντίστροφα. Η μοναδική προϋπόθεση για την στενή αυτή σχέση μεταξύ των δύο κατηγοριών προβλημάτων είναι η αυτοαναγωγιμότητα (self-reducibility) των υπό εξέταση δομών που, σε γενικές γραμμές, σημαίνει τη δυνατότητα μιας κατασκευής των δομών αυτών επαγωγικά με βάση δομές μικρότερου μεγέθους.

Παραδοσιακά, η αξιοποίηση αυτής της "ισοδυναμίας" των δύο ειδών προβλημάτων και της δυνατότητας μετάβασης από το ένα είδος στο άλλο διατηρώντας την πολυωνυμικότητα σχεδόν βέβαια, υπήρξε μονόπλευρη προς τη μία μόνο κατεύθυνση και πιο συγκεκριμένα από την απαρίθμηση στην τυχαία κατασκευή: στις περισσότερες περιπτώσεις ανιχνεύονταν η δυνατότητα μετατροπής μιας προσεγγιστικής λύσης για το πρόβλημα απαρίθμησης σε έναν αλγόριθμο για το αντίστοιχο πρόβλημα της σχεδόν ομοιόμορφης τυχαίας κατασκευής. Η εντονότερη χρησιμοποίηση της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων, λόγω του εγγενούς "κατασκευαστικού" της χαρακτήρα, σήμανε την αντιστροφή αυτής της τάσης: η μετάβαση γίνεται πια συνήθως από την σχεδόν ομοιόμορφη τυχαία κατασκευή στην προσεγγιστική απαρίθμηση.

Σε γενικές γραμμές, και χωρίς στην ενότητα αυτή να υπεισέλθουμε σε ιδιαίτερες τεχνικές λεπτομέρειες, η μέθοδος των μαρκοβιανών αλυσίδων αναπτύσσεται ως εξής: ορίζεται μια δυναμική στοχαστική διεργασία (dynamic stochastic process) και πιο συγκεκριμένα μια μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας καταστάσεις (states) είναι οι υπό τυχαία κατασκευή συνδυαστικές δομές. Η διεργασία αυτή, εκκινώντας από οποιαδήποτε αυθαίρετη (όχι τυχαία κατασκευασμένη) κατάσταση μεταβαίνει, στη βάση ορισμένων τυχαίων τοπικών διαταραχών (random local perturbations) που τροποποιούν κατάλληλα τη συνδυαστική δομή που αντιστοιχεί στην τρέχουσα κατάσταση, από την τρέχουσα κατάσταση (αντίστοιχα, συνδυαστική δομή) σε κάποια άλλη.

Η βασική επιθυμητή ιδιότητα για τη διεργασία είναι η εργοδικότητα (ergodicity), δηλαδή η σύγκλισή της σε μια τελική κατάσταση η οποία, ανεξάρτητα από την κατάσταση εκκίνησης, τείνει ασυμπτωτικά σε μια μοναδική ευσταθή κατανομή (stationary distribution π) ορισμένη στο σύνολο των συνδυαστικών δομών. Επομένως, η τελική κατάσταση της αλυσίδας, στο βαθμό που επιτρέπεται στη διεργασία να εξελιχθεί για ικανοποιητικό αριθμό βημάτων και να συγκλίνει στην τελική αυτή κατάσταση ισορροπίας, παράγει συνδυαστικές δομές που είναι οσοδήποτε (ανάλογα με το χρόνο που δίνεται στην αλυσίδα για τη σύγκλιση αυτή) κοντά στην επιθυμητή κατανομή π.

Στις περισσότερες περιπτώσεις ο ορισμός των κανόνων (των τοπικών διαταραχών δηλαδή) με βάση τους οποίους εξελίσσεται η αλυσίδα είναι σχετικά απλός και η βασική δυσκολία εφαρμογής της μεθόδου συνίσταται στον αναλυτικό υπολογισμό του αριθμού των βημάτων (δηλαδή του χρόνου) που απαιτείται ώστε η διεργασία να φτάσει σε συγκεκριμένη απόσταση από την επιθυμητή κατανομή π οπότε και να παράγει τυχαία κατασκευασμένες συνδυαστικές δομές με μια συγκεκριμένη ακρίβεια (accuracy) προσέγγισης της κατανομής π. Η ιδιότητα της γρήγορης σύγκλισης, όταν ισχύει, εξασφαλίζει ακριβώς ότι η ικανοποιητική προσέγγιση στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας συμβαίνει με αποδοτικό τρόπο (δηλαδή σε πολυωνυμικό αριθμό βημάτων).

Η ιδιαίτερη δύναμη της ιδιότητας αυτής προκύπτει από το γεγονός ότι, αν η ιδιότητα αυτή ισχύει, τότε μια διεργασία που έχει (συνήθως) εκθετικό αριθμό καταστάσεων συγκλίνει στην κατάσταση ισορροπίας σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή αφού εξετάσει έναν πολυωνυμικά μικρό, δηλαδή ελάχιστο σε σχέση με τον συνολικό εκθετικά μεγάλο, αριθμό καταστάσεών της.

Η μέθοδος επίσης προσφέρει, στη συγκεκριμένη εκδοχή της που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο και που σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στον Alistair Sinclair ([61]), ένα απλό, γραφοθεωρητικό κριτήριο για την ικανοποίηση ή όχι της ιδιότητας της γρήγορης σύγκλισης (και σε αυτό ακριβώς το σημείο εντοπίζεται η πρωτοποριακή συνεισφορά της σε σχέση με κλασσικότερες εκδοχές της θεωρίας των μαρκοβιανών αλυσίδων): το κριτήριο αυτό είναι ο βαθμός της επέκτασης (expansion) του υποκείμενου γράφου της αλυσίδας.

Η επέκταση είναι μια ιδιαίτερα σημαντική δομική ιδιότητα που αποτελεί μέτρο της συνεκτικότητας (connectedness) του γράφου που αντιστοιχεί στη μαρκοβιανή αλυσίδα. Η ύπαρξη ικανοποιητικά μεγάλης επέκτασης στον υποκείμενο της μαρκοβιανής αλυσίδας γράφο, αποτελεί ικανή συνθήκη για την γρήγορη σύγκλιση της αλυσίδας στην ευσταθή κατανομή και μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο για την ικανοποίηση της ιδιότητας της γρήγορης σύγκλισης.

Το γραφοθεωρητικό αυτό κριτήριο για τη γρήγορη σύγκλιση μιας μαρκοβιανής αλυσίδας, θεμελιώνεται αναλυτικά και με τεχνικό τρόπο στην ενότητα που ακολουθεί.

8.5 Η ιδιότητα της γρήγορης σύγκλισης

Οπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, μια ιδιαίτερα επιθυμητή ιδιότητα της εξελικτικής συμπεριφοράς μιας μαρκοβιανής αλυσίδας (που εξασφαλίζει αποδοτική πολυπλοκότητα χρόνου για τους αλγόριθμους που προσομοιώνονται από αυτήν) είναι η γρήγορη σύγκλισή της (rapid mixing) σε μια ευσταθή κατανομή, εφόσον μια τέτοια κατανομή υπάρχει.

Αυτό το ενδιαφέρον για το ρυθμό της σύγκλισης (rate of convergence) στην ισορροπία αναπτύχθηκε βασικά τα τελευταία χρόνια και ακριβώς λόγω της ιδιαίτερης σημασίας της ιδιότητας της γρήγορης σύγκλισης για το σχεδιασμό και την ανάλυση αποδοτικών αλγόριθμων στα πλαίσια της Επιστήμης του Υπολογισμού. Η κλασσική θεωρία των μαρκοβιανών αλυσίδων, προσεγγίζοντας το θέμα της σύγκλισης περισσότερο από μια αυστηρή μαθηματική σκοπιά, περιορίζονταν βασικά στην απόδειξη της ύπαρξης μιας ευσταθούς κατανομής στην οποία συγκλίνει η αλυσίδα χωρίς να δίνει ιδιαίτερη σημασία στην έννοια του ρυθμού με τον οποίο συμβαίνει η σύγκλιση αυτή. Ετσι, τα όποια διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία για την ανάλυση του ρυθμού αυτού οδηγούσαν σε μάλλον πρωτόλεια αποτελέσματα που δεν εξασφάλιζαν ικανοποιητικές εγγυήσεις απόδοσης (performance guarantees) για τους αντίστοιχους αλγόριθμους.

Αλλά και οι πιο πρόσφατα αναπτυχθείσες τεχνικές για τη μελέτη του ρυθμού σύγκλισης από την αυστηρή μαθηματική αυτή σκοπιά, που χρησιμοποιούν ανάλυση Fourier και αναπαραστάσεις συνόλων ([15]), στοχαστικές προσεγγίσεις σε finite groups ([2]) και ανάλυση με βάση χρόνους τερματισμού (stopping times, [3]), παρά την κομψότητα και τη δυνατότητά τους να παρέχουν ισχυρά αποτελέσματα σε περιπτώσεις απλών αλυσίδων με σχετικά συμμετρική δομή, καθίστανται εξαιρετικά δύσκολες και τεχνικά δύσχρηστες κατά την ανάλυση των περισσότερο σύνθετων αλυσίδων που αντιστοιχούν σε προβλήματα με πραγματικό ενδιαφέρον.

Αντίθετα, η αλγοριθμική εκδοχή της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων, την οποία περιγράψαμε με συνοπτικό τρόπο στην προηγούμενη ενότητα, προσφέρει ένα απλό, γραφοθεωρητικό κριτήριο για την ιδιότητα της γρήγορης σύγκλισης μιας αλυσίδας που συσχετίζει τη γρήγορη σύγκλιση με μια δομική ιδιότητα του υποκείμενου γράφου (την επέκταση, expansion) και υπολογίζει το ρυθμό της σύγκλισης σε σχέση με τις ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα μετάβασης P.

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη (δες επίσης την ενότητα 8.3 για μια αναλυτική παρουσίαση βασικών εννοιών, συμβολισμών και ιδιοτήτων μαρκοβιανών αλυσίδων) ότι μια αλυσίδα είναι εργοδική αν είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και πεπερασμένη και πως η εργοδικότητα της αλυσίδας εξασφαλίζει τη σύγκλισή της σε μια μοναδική ευσταθή κατανομή π, δηλαδή

$$\lim_{t\to\infty} q_i^{(t)} = \pi_i$$

για όλες τις καταστάσεις $i \in S$.

Η σχέση αυτή, αν και αποδεικνύει την ασυμπτωτική σύγκλιση στην ευσταθή κατανομή, δεν προσφέρει ικανοποιητικές πληροφορίες για την ταχύτητα με την οποία συμβαίνει αυτή η σύγκλιση. Προκειμένου να μελετήσουμε την ποσοτική εξέλιξη της πορείας σύγκλισης, ορίζουμε την ακόλουθη χρονικά μεταβαλλόμενη ποσότητα

$$\Delta(t) = \max_{i\in S} \frac{|q_i^{(t)} - \pi_i|}{\pi_i}$$

η οποία μετράει σε κάθε χρονική στιγμή t τη μέγιστη (ως προς όλες τις καταστάσεις i) απόσταση από την ισορροπία σε σχέση με την πιθανότητα των καταστάσεων κατά την ευσταθή κατανομή (γι αυτό ονομάζεται σχετική απόσταση, relative pointwise distance) και επομένως αποτελεί μέτρο της χρονικής εξέλιξης της πορείας σύγκλισης.

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε ακριβώς τις προϋποθέσεις ώστε η σχετική απόσταση $\Delta(t)$ από την ισορροπία να γίνεται ικανοποιητικά μικρή σε πολυωνυμικό αριθμό βημάτων (και επομένως να υπάρχει γρήγορη, δηλαδή υπολογιστικά αποδοτική, σύγκλιση σε μια ικανοποιητική προσέγγιση της ευσταθούς κατανομής, γεγονός που στην περίπτωση της τυχαίας κατασκευής επιθυμητών συνδυαστικών δομών με βάση την ιδιαίτερα δημοφιλή ομοιόμορφη κατανομή σημαίνει αποδοτική σχεδόν ομοιόμορφη τυχαία κατασκευή των δομών αυτών).

Μια άλλη, πέραν της εργοδικότητας, σημαντική προϋπόθεση για την εξασφάλιση ικανοποιητικού ρυθμού σύγκλισης είναι η χρονική αντιστρεψιμότητα (time reversibility) μιας εργοδικής μαρκοβιανής αλυσίδας.

Ορισμός 35. Μια εργοδική μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται χρονικά αντιστρέψιμη αν και μόνο αν

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

για όλες τις καταστάσεις $i, j \in S$. □

Διαισθητικά, μια αλυσίδα είναι χρονικά αντιστρέψιμη αν ο μέσος αριθμός μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου κατά την ευσταθή κατανομή από μια κατάσταση i σε μια άλλη κατάσταση j (μέτρο του οποίου είναι η πιθανότητα $\pi_i P_{ij}$) είναι ίσος με το μέσο αριθμό μεταβάσεων ανάμεσα σε αυτές τις καταστάσεις στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή από την κατάσταση j στην κατάσταση i (μέτρο αυτού του αριθμού μεταβάσεων είναι η πιθανότητα $\pi_j P_{ji}$).

Με βάση τις ιδιότητες της εργοδικότητας και της χρονικής αντιστρεψιμότητας μιας αλυσίδας μπορούμε να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα που προσδιορίζει ποσοτικά το ρυθμό σύγκλισης στην ισορροπία σε σχέση με τις ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης P και ειδικότερα σε σχέση με το μέγεθος της δεύτερης μεγαλύτερης ιδιοτιμής λ_2.

Θεώρημα 59. Εστω P ο $n \times n$ πίνακας μετάβασης μιας εργοδικής, χρονικά αντιστρέψιμης μαρκοβιανής αλυσίδας με n καταστάσεις και έστω οι (υποχρεωτικά πραγματικές, ακριβώς λόγω της αντιστρεψιμότητας) ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ του πίνακα P. Η σχετική απόσταση $\Delta(t)$ της αλυσίδας από την ευσταθή της κατανομή φράσσεται εκ των άνω από τις ιδιοτιμές αυτές σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta(t) \leq \frac{\lambda_{\max}^t}{\min_{i \in S} \pi_i} = \frac{\lambda_2^t}{\min_{i \in S} \pi_i}$$

αφού παίρνουμε $\lambda_{\max} = \max\{|\lambda_i| : 2 \leq i \leq n\}$ (είναι $\lambda_1 = 1$ υποχρεωτικά). □

Διαισθητικά, το θεώρημα αυτό υπαινίσσεται ότι το μικρό μέγεθος της δεύτερης ιδιοτιμής του πίνακα μετάβασης (και ειδικότερα η ιδιότητα $\lambda_2 < 1 = \lambda_1$) εξασφαλίζει τη γρήγορη σύγκλιση μιας εργοδικής, χρονικά αντιστρέψιμης μαρκοβιανής αλυσίδας αφού, στην περίπτωση αυτή, η σχετική απόσταση της αλυσίδας από την ευσταθή κατανομή μειώνεται εκθετικά γρήγορα.

Τέλος, το θεώρημα αυτό επιτρέπει έναν αρκετά ακριβή χαρακτηρισμό της ιδιότητας της γρήγορης σύγκλισης.

Ορισμός 36 (Γρήγορη σύγκλιση)**.** Εστω μια εργοδική, χρονικά αντιστρέψιμη αλυσίδα και έστω $x = O(\log n)$ το μέγεθος της περιγραφής της (δηλαδή x είναι ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την αναπαράσταση των n καταστάσεων της αλυσίδας, οι οποίες στην περίπτωση δύσκολων υπολογιστικών προβλημάτων είναι εκθετικά πολλές). Καλούμε $\tau(\epsilon)$ τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να πλησιάσει η αλυσίδα σε απόσταση το πολύ ϵ από την ευσταθή κατανομή, δηλαδή

$$\tau(\epsilon) = \min\{t_0 : \Delta(t) \leq \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad t \geq t_0\}$$

Η αλυσίδα καλείται γρήγορα συγκλίνουσα αν και μόνο αν ο χρόνος αυτός φράσσεται εκ των άνω από μια πολυωνυμική συνάρτηση q του μεγέθους x περιγραφής της αλυσίδας και του λογάριθμου του $1/\epsilon$, δηλαδή

$$\tau(\epsilon) \leq q(x, \log(1/\epsilon))$$

□

Ο χαρακτηρισμός αυτός της γρήγορης σύγκλισης συνεπάγεται (ακριβώς λόγω του λογαρίθμου) έναν πολυωνυμικά μεγάλο απαιτούμενο χρόνο για να βρεθεί η αλυσίδα σε εκθετικά μικρή απόσταση από την ισορροπία.

Στην επόμενη ενότητα θα στοιχειοθετήσουμε τη στενή σχέση της ιδιότητας της γρήγορης σύγκλισης με τη γνωστή γραφοθεωρητική ιδιότητα της επέκτασης (expansion).

8.6 Γρήγορη σύγκλιση και η ιδιότητα της επέκτασης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της γρήγορης σύγκλισης σε μια ειδική κατηγορία γράφων, τους γράφους επεκτατές (expander graphs). Οι γράφοι αυτοί, πέρα από τη γενικότερη σημασία τους και την ευρύτατη χρησιμοποίησή τους τόσο σε θεωρητικά όσο και σε πρακτικά ζητήματα της Επιστήμης του Υπολογισμού, έχουν μια σημαντική ιδιότητα: οι μαρκοβιανές αλυσίδες που αντιστοιχούν σε τυχαίους περίπατους στους γράφους αυτούς συγκλίνουν γρήγορα στην ευσταθή κατανομή.

Για να διευκολύνουμε τη μελέτη τυχαίων περιπάτων σε γράφους επεκτατές, θα χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη εκδοχή της έννοιας ενός γράφου που περιλαμβάνει τη δυνατότητα ύπαρξης πολλαπλών ακμών (multiple edges) μεταξύ κορυφών, όπως επίσης και ακμών- βρόγχων (self-loops, δηλαδή ακμών που ξεκινούν και καταλήγουν στην ίδια κορυφή).

Σε γενικές γραμμές, ένας γράφος καλείται γράφος επεκτατής αν οποιοδήποτε σύνολο κορυφών του έχει έναν “αρκετά μεγάλο” αριθμό γειτονικών κορυφών. Επομένως, η ιδιότητα της επέκτασης συνεπάγεται, ακριβώς εξαιτίας αυτού του μεγάλου αριθμού γειτονικών κορυφών, την υψηλή συνεκτικότητα ενός γράφου επεκτατή.

Ορισμός 37. Ενας γράφος $G(V, E)$ καλείται γραμμικός $c-$επεκτατής αν υπάρχει σταθερό $c > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $X \subseteq V$ που ικανοποιεί τη σχέση $|X| \leq n/2$ να είναι

$$|N(X) - X| \geq c|X|$$

όπου $N(X) = \{y : (x, y) \in E \text{ και } x \in X\}$. Ο αριθμός c καλείται σταθερά της επέκτασης. □

Το πρόβλημα της διαπίστωσης του αν ένας γράφος είναι επεκτατής ή όχι (όπως επίσης και το πρόβλημα της κατασκευής ενός συγκεκριμένου γράφου επεκτατή) είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (μια διαισθητική ερμηνεία αυτής της αυξημένης υπολογιστικής δυσκολίας συνίσταται στο γεγονός ότι χρειάζεται να εξετασθεί ως προς το πλήθος των γειτονικών κορυφών τους ένας εκθετικά μεγάλος αριθμός υποσυνόλων κορυφών του γράφου).

Παρόλα αυτά, υπάρχει ένας μερικός χαρακτηρισμός (partial characterization) της ιδιότητας της επέκτασης, που στηρίζεται σε ορισμένα αναλυτικά εργαλεία της αλγεβρικής γραφοθεωρίας (algebraic graph theory), ο οποίος επιτρέπει σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις να διαπιστώνεται με αποδοτικό τρόπο αν ένας γράφος είναι επεκτατής ή όχι. Το ακόλουθο θεώρημα, που αποτελεί τμήμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αλγεβρικής Γραφοθεωρίας, προσφέρει τα εργαλεία και τη διαίσθηση για αυτόν το μερικό χαρακτηρισμό.

Θεώρημα 60. Εστω G ένας μη κατευθυνόμενος γράφος n κορυφών με δυνατότητα πολλαπλών ακμών και ακμών-βρόγχων. Εστω d ο μέγιστος βαθμός του γράφου αυτού και έστω $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ οι n ιδιοτιμές του πίνακα γειτονικότητάς του (adjacency matrix). Είναι:

1. $|\lambda_i| \leq d$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.
2. Η τιμή d αποτελεί ιδιοτιμή του γράφου αν και μόνο αν ο γράφος είναι $d-$κανονικός ($d-$regular).

3. Αν ο G είναι συνεκτικός, τότε $\lambda_2 < \lambda_1$.

□

Για να διευκολύνουμε την τεχνική ανάλυση περιοριζόμαστε σε $d-$κανονικούς γράφους, επομένως είναι $\lambda_1 = d$, από το παραπάνω θεώρημα.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το τρίτο αποτέλεσμα αυτού του θεωρήματος, που συνδέει τη συνεκτικότητα του γράφου με τη διαφορετικότητα ανάμεσα στη δεύτερη και την πρώτη ιδιοτιμή. Το γεγονός ότι η ιδιότητα της επέκτασης συνιστά μια ισχυρή περίπτωση αυξημένης συνεκτικότητας, παραπέμπει με φυσικό τρόπο στην αναζήτηση ενός κριτηρίου για την ιδιότητα αυτή στην απόσταση που χωρίζει τις δύο πρώτες ιδιοτιμές. Πραγματικά, μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο βασικό θεώρημα που συνιστά και το μερικό χαρακτηρισμό της ιδιότητας της επέκτασης στον οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως σε αυτήν την ενότητα.

Θεώρημα 61. Η σταθερά επέκτασης $d-$κανονικών γράφων ικανοποιεί τη σχέση

$$c \geq \alpha \left(1 - \frac{\lambda_2}{d}\right)$$

όπου $\alpha > 0$ μια σταθερά, οπότε η συνθήκη

$$\lambda_2 < \lambda_1 = d$$

συνεπάγεται ότι ο γράφος είναι $c-$επεκτατής, αφού στην περίπτωση αυτή είναι $c > 0$. □

Επομένως, η διαφορετικότητα της δεύτερης από την πρώτη ιδιοτιμή αποτελεί ένα απλό κριτήριο για την ιδιότητα της επέκτασης σε κανονικούς γράφους. Επιπλέον, η σταθερά της επέκτασης είναι ανάλογη του μεγέθους αυτής της απόστασης, από την άποψη ότι όσο μικρότερη είναι η δεύτερη ιδιοτιμή τόσο μεγαλύτερη γίνεται η σταθερά αυτή.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με μια αναφορά στα ζητήματα σύγκλισης μαρκοβιανών αλυσίδων που αντιστοιχούν σε τυχαίους περίπατους σε γράφους επεκτατές.

Θεώρημα 62. Αν ο υποκείμενος γράφος μιας μαρκοβιανής αλυσίδας αποτελεί γράφο επεκτατή, τότε η αλυσίδα αυτή είναι γρήγορα συγκλίνουσα. □

Με βάση το θεώρημα αυτό, συμπεραίνουμε πως το γεγονός (στο οποίο αναφερθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα) ότι μια μικρή δεύτερη ιδιοτιμή (και ειδικότερα η συνθήκη $\lambda_2 < 1$) συνεπάγεται τη γρήγορη σύγκλιση της αντίστοιχης μαρκοβιανής αλυσίδας δεν είναι καθόλου τυχαίο. Αντίθετα, συνδέεται εγγενώς με την ιδιότητα της επέκτασης και της γρήγορης σύγκλισης που η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει. Σημειώνουμε επίσης ότι η απαιτούμενη συνθήκη $\lambda_2 < d$ για τον πίνακα γειτονικότητας του υποκείμενου γράφου είναι ισοδύναμη με την απαιτούμενη συνθήκη $\lambda_2 < 1$ για τον πίνακα μετάβασης του αντίστοιχου τυχαίου περίπατου, αφού είναι προφανώς $P_{ij} = d_{ij}/d$ (όπου d_{ij} είναι ο αριθμός των ακμών μεταξύ δυο κορυφών i και j) και επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης προκύπτουν από τη διαίρεση με d των ιδιοτιμών του αντίστοιχου πίνακα γειτονικότητας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα ισχυρό θεώρημα που προσδιορίζει τη χρονική μεταβολή (σε σχέση με το μέγεθος της δεύτερης ιδιοτιμής) της σχετικής απόστασης $\Delta(t)$ από την ισορροπία μιας μαρκοβιανής αλυσίδας που αντιστοιχεί στον τυχαίο περίπατο σε έναν $d-$κανονικό γράφο που είναι $c-$επεκτατής.

Θεώρημα 63. Εστω ένας τυχαίος περίπατος σε έναν $d-$κανονικό γράφο n κορυφών που είναι $c-$επεκτατής και έστω ότι η δεύτερη ιδιοτιμή του αντίστοιχου πίνακα γειτονικότητας είναι $\lambda_2 \leq d - \epsilon$, όπου $\epsilon > 0$ μια σταθερά. Η σχετική απόσταση $\Delta(t)$ της αντίστοιχης μαρκοβιανής αλυσίδας από την ευσταθή κατανομή είναι

$$\Delta(t) \leq n^{1.5}\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right)^t$$

□

Το θεώρημα αυτό οδηγεί σε δύο βασικά ποιοτικά συμπεράσματα:

- Οσο μικρότερη είναι η δεύτερη ιδιοτιμή (όσο δηλαδή μεγαλύτερο είναι το ϵ) τόσο μικρότερο γίνεται το $\Delta(t)$, δηλαδή τόσο γρηγορότερα οδεύει η αλυσίδα προς την ισορροπία.

- Με την απαραίτητη προϋπόθεση ότι η δεύτερη ιδιοτιμή είναι μικρότερη από d, η σχετική απόσταση $\Delta(t)$ από την ισορροπία τείνει εκθετικά (με το χρόνο) στο 0, επομένως ο ρυθμός σύγκλισης στην ευσταθή κατανομή είναι εκθετικά γρήγορος.

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί μια τεχνική, ποσοτική εκδοχή του δεύτερου από αυτά τα συμπεράσματα.

Θεώρημα 64. Εστω $T(\delta)$ ο απαιτούμενος χρόνος ώστε η σχετική απόσταση $\Delta(t)$ από την ισορροπία να γίνει για πρώτη φορά μικρότερη από δ, για οποιοδήποτε $0 < \delta < 1$. Είναι

$$T(\delta) \leq \frac{\log(n^{1.5}/\delta)}{-\log\left(\frac{1+\lambda_2/d}{2}\right)}$$

□

Με βάση το θεώρημα αυτό, ένας λογαριθμικά μικρός (σε σχέση όμως με τον αριθμό των καταστάσεων) αριθμός βημάτων αρκεί για να φτάσει η αλυσίδα σε πολυωνυμικά μικρή απόσταση ($\delta = n^{-k}, k > 0$) από την ισορροπία. Χρειάζεται πάντως να τονίσουμε το γεγονός ότι η λογαριθμικότητα αφορά στον αριθμό n των κορυφών του γράφου επεκτατή που, στις περιπτώσεις όπου ο γράφος αυτός αποτελεί τον υποκείμενο γράφο μιας μαρκοβιανής αλυσίδας που αντιστοιχεί σε έναν αλγόριθμο επίλυσης κάποιου υπολογιστικά δύσκολου προβλήματος, είναι εκθετικά μεγάλος, οπότε ο απαιτούμενος χρόνος σύγκλισης καθίσταται πολυωνυμικός.

Στην επόμενη ενότητα, μελετάμε το πρόβλημα της ανοχής σε λάθη στις ακμές μιας συγκεκριμένης κλάσης γράφων επεκτατών (των κανονικών τυχαίων γράφων με σταθερό βαθμό) και υπολογίζουμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη πιθανότητα λάθους στις ακμές τέτοιων γράφων ώστε να διατηρείται η ιδιότητα της επέκτασης. Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη "λάθους" σε μια ακμή θεωρείται ότι συνεπάγεται την απουσία της ακμής αυτής.

8.7 Γράφοι επεκτατές με λάθη στις ακμές

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε με έμφαση στην ιδιαίτερη σημασία, τόσο από πρακτική όσο και από θεωρητική άποψη, των γράφων επεκτατών. Η χρησιμοποίησή τους σε εφαρμογές υλικού αλλά και λογισμικού στα πλαίσια του αποδοτικού σχεδιασμού σύγχρονων υπολογιστικών συστημάτων είναι ευρύτατη. Επίσης, σημαντική είναι η γενικότερη συνεισφορά της έννοιας της επέκτασης γράφων σε θεωρητικά ζητήματα της επιστήμης του υπολογισμού.

Πραγματικά, η οφειλόμενη στην ιδιότητα της επέκτασης αυξημένη συνεκτικότητα των γράφων επεκτατών, τους καθιστά βασικά δομικά στοιχεία για τη βέλτιστη κατασκευή δικτύων διασύνδεσης (interconnection networks) που χρησιμοποιούνται για την αποδοτική και αξιόπιστη επικοινωνία σε σύγχρονες πολυεπεξεργαστικές αρχιτεκτονικές (multiprocessor architectures, [55]). Επίσης, τα δομικά τους χαρακτηριστικά διευκολύνουν το σχεδιασμό και την ανάλυση αποδοτικών (και σε αρκετές περιπτώσεις βέλτιστων) αλγόριθμων για ορισμένα κεντρικά υπολογιστικά προβλήματα, με χαρακτηριστικότερες τις περιπτώσεις των προβλημάτων της ταξινόμησης (sorting) και της δρομολόγησης (routing).

Από την άλλη, το γεγονός ότι οι μαρκοβιανές αλυσίδες που αντιστοιχούν σε τυχαίους περίπατους σε γράφους επεκτατές συγκλίνουν γρήγορα (όπως αναλυτικά δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα) καθιστά την ιδιότητα της επέκτασης ιδιαίτερα επιθυμητή κατά το σχεδιασμό αποδοτικών πιθανοτικών αλγόριθμων για την προσεγγιστική επίλυση υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων και ιδιαίτερα προβλημάτων απαρίθμησης και τυχαίας κατασκευής επιθυμητών συνδυαστικών δομών, τα οποία μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Σε αυτήν την ενότητα, θα εξετάσουμε μια ειδική κατηγορία γράφων επεκτατών, τους κανονικούς τυχαίους γράφους (random regular graphs) με σταθερό βαθμό (το θεώρημα "ένας κανονικός τυχαίος γράφος σταθερού βαθμού είναι επεκτατής σχεδόν βέβαια" έχει σχετικά απλή απόδειξη, την οποία αφήνουμε σαν άσκηση για τον αναγνώστη). Το ενδιαφέρον μας για αυτήν την ειδική περίπτωση γράφων που ικανοποιούν την ιδιότητα της επέκτασης δεν είναι τυχαίο: πολλά σύγχρονα πολυεπεξεργαστικά συστήματα (και τα αντίστοιχα δίκτυα διασύνδεσης των παράλληλων επεξεργαστών που αυτά χρησιμοποιούν) εμφανίζουν συνήθως μια χαρακτηριστικά συμμετρική, κανονική δομή η οποία αφαιρετικοποιείται θεωρητικά με την ιδιότητα της κανονικότητας (regularity) στους βαθμούς των κορυφών των υποκείμενων γράφων των συστημάτων αυτών.

Στα 1987 οι Broder και Shamir ([10]) συνεισέφεραν αποφασιστικά στην αντιμετώπιση της αυξημένης υπολογιστικής δυσκολίας της αναγνώρισης της ιδιότητας της επέκτασης σε έναν γράφο, δείχνοντας ότι οι κανονικοί τυχαίοι γράφοι αποτελούν αποδοτικά αποδείξιμους (efficient certifiable) γράφους επεκτατές σχεδόν βέβαια, ακόμα και στην περίπτωση όπου ο βαθμός της κανονικότητάς τους είναι μόλις σταθερός. Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε το κατά πόσο διατηρείται ή όχι η ιδιότητα της επέκτασης σε τέτοιους κανονικούς τυχαίους γράφους σταθερού βαθμού, όταν αυτοί εμφανίζουν λάθη (faults) στις ακμές τους. Το ζήτημα της ανοχής σε λάθη (fault tolerance) είναι ιδιαίτερα σημαντικό και προκύπτει φυσιολογικά στην πράξη από το γεγονός ότι οι σύνδεσμοι (links) που συνδέουν τους υπολογιστές ενός πολυεπεξεργαστικού συστήματος είναι δυνατό να υποστούν βλάβες υλικού ή να θεωρούνται πρακτικά μη διαθέσιμοι εξαιτίας της αποκλειστικής, αμοιβαία αποκλειόμενης διάθεσής τους (από το λειτουργικό σύστημα που συντονίζει τη διαχείριση των πόρων του συστήματος) σε κάποιον υπολογιστή.

Πιο συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε (σε γενικές γραμμές και χωρίς να υπεισέλθουμε σε ιδιαίτερες τεχνικές λεπτομέρειες) τη μέθοδο υπολογισμού της μέγιστης επιτρεπόμενης πιθανότητας λάθους στις ακμές κανονικών τυχαίων γράφων, ώστε η διατηρούμενη γιγαντιαία συνεκτική συνιστώσα τους να παραμένει ένας αποδείξιμα αποδοτικός γράφος επεκτατής.

Εστω $G_{n,p}^d$ το μοντέλο κανονικών τυχαίων γράφων n κορυφών με βαθμό d, οι ακμές των οποίων υπάρχουν με πιθανότητα p (αντίστοιχα, "χαλάνε" με πιθανότητα $f = 1 - p$) ισοπίθανα για όλες τις ακμές και στοχαστικά ανεξάρτητα. Οι Νικολετσέας, Palem, Σπυράκης και Yung ([48]) απέδειξαν ότι:

Θεώρημα 65. Οι τυχαίοι γράφοι του μοντέλου $G_{n,p}^d$ παραμένουν σχεδόν βέβαια $d-$συνεκτικοί (εκτός από ένα μικρό τμήμα τους με το πολύ $O(1)$ κορυφές) για όλες τις πιθανότητες λάθους $f \leq n^{-\epsilon}$, όπου $\epsilon > 0$ είναι μια σταθερά. □

Θεώρημα 66. Ακόμα και στην (χειρότερη) περίπτωση μεγαλύτερων (π.χ. σταθερά μεγάλων) πιθανοτήτων λάθους όπου οι $G_{n,p}^d$ γράφοι καθίστανται μη συνεκτικοί, περιέχουν μια γιγαντιαία συνεκτική συνιστώσα για οποιοδήποτε $f < 1 - \frac{32}{d}$ ακόμα και όταν $d = O(1)$ σχεδόν βέβαια. □

Θα περιγράψουμε την τεχνική υπολογισμού της ζητούμενης μέγιστης επιτρεπόμενης πιθανότητας λάθους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων για την ανάλυση ενός τυχαίου περίπατου σε $G_{n,p}^d$ γράφους. Πιο συγκεκριμένα, θα στηριχτούμε στο θεώρημα 61 και στις παρατηρήσεις που το ακολουθούν (βλέπε ενότητα 8.6) εξετάζοντας τις προϋποθέσεις ώστε η δεύτερη ιδιοτιμή του πίνακα μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας να είναι μικρότερη από τη μονάδα.

Εστω A ο πίνακας γειτονικότητας της γιγαντιαίας συνεκτικής συνιστώσας C ενός $G_{n,p}^d$ γράφου ο οποίος, όπως και στην προηγούμενη ενότητα και για να διευκολύνουμε την ανάλυση του τυχαίου περίπατου, είναι δυνατό να έχει πολλαπλές ακμές και ακμές βρόγχους. Εστω P ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης για τη μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει τον τυχαίο περίπατο στη συνιστώσα C. Τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης P προκύπτουν από τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα γειτονικότητας A από τη σχέση $P_{ij} = a_{ij}/d_i$.

Εστω $|C| = n' = \Theta(n)$ και έστω $\rho_1 = 1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_{n'}$ οι ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης P και $\rho = \max\{\rho_2, |\rho_{n'}|\}$. Για το ίχνος (trace) του τετραγωνικού πίνακα P είναι

$$trace\left(P^{2k}\right) = \sum_i \rho_i^{2k}$$

και επειδή, από τη χρονική αντιστρεψιμότητα της μαρκοβιανής αλυσίδας (δες [52]), ο P έχει πραγματικές ιδιοτιμές, είναι

$$\rho^{2k} \leq trace\left(P^{2k}\right) - 1$$

για $k \geq 1$. Παίρνοντας μέσες τιμές, είναι

$$E(\rho) \leq \left[E\left(trace\left(P^{2k}\right)\right) - 1\right]^{1/2k} \tag{8.1}$$

από την ανισότητα του Jensen (βλέπε π.χ. [41]).

Εχοντας επιτύχει τη συσχέτιση της μέσης τιμής της δεύτερης ιδιοτιμής με τη μέση τιμή του ίχνους του υψωμένου στην $2k-$οστή δύναμη πίνακα μετάβασης, θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να συνδέσουμε τη μέση τιμή του ίχνους αυτού του πίνακα με τη μέση τιμή της πιθανότητας επιστροφής ενός σωματιδίου που πραγματοποιεί έναν τυχαίο περίπατο στη συνιστώσα C στο σημείο εκκίνησής του σε $2k$ χρονικά βήματα (η πιθανότητα αυτή, ακριβώς επειδή αφορά σε έναν τυχαίο γράφο, είναι στην πραγματικότητα μια τυχαία μεταβλητή και επομένως η μέση της τιμή έχει νόημα).

Από τον ορισμό του ίχνους ενός τετραγωνικού πίνακα είναι

$$E\left(trace\left(P^{2k}\right)\right) = n'E\left(P_{11}^{2k}\right) = \Theta(n)\,E\left(P_{11}^{2k}\right) \tag{8.2}$$

όπου P_{11}^{2k} είναι η πιθανότητα το σωματίδιο, ξεκινώντας από την κορυφή 1 (η επιλογή της συγκεκριμένης κορυφής δε βλάπτει τη γενικότητα της ανάλυσης) της συνιστώσας C και κατά τη διάρκεια του τυχαίου περίπατου που ορίζει ο πίνακας μετάβασης P να επιστρέψει στην κορυφή 1 μετά από ακριβώς $2k$ χρονικά βήματα.

Στο σχετικό άρθρο ([52]) υπολογίζονται αναλυτικά οι επιμέρους πιθανότητες των βασικότερων διαφορετικών τρόπων επιστροφής στην κορυφή εκκίνησης. Οι τρόποι αυτοί είναι:

- η επιστροφή μέσω μιας "συμμετρικής" τροχιάς: αν σε κάθε κίνηση του σωματιδίου κατά μήκος μιας ακμής την οποία το σωματίδιο διατρέχει για πρώτη φορά ("κίνηση προς τα εμπρός") αντιστοιχίσουμε μια αριστερή παρένθεση και σε κάθε κίνηση κατά μήκος μιας ακμής που έχει ήδη διαπεραστεί προς την αντίθετη κατεύθυνση ("κίνηση προς τα πίσω") αντιστοιχίσουμε μια δεξιά παρένθεση, το σύνολο των παρενθέσεων αυτών που αντιστοιχούν σε μια τέτοια συμμετρική τροχιά κίνησης του σωματιδίου είναι ισορροπημένο (balanced).

- η επιστροφή μετά από μια τροχιά που περιλαμβάνει περισσότερους του ενός κύκλους.

- η επιστροφή μετά από μια τροχιά που διατρέχει έναν μοναδικό κύκλο μία μόνο φορά.

- η επιστροφή μετά από μια τροχιά που διατρέχει έναν μοναδικό κύκλο περισσότερες από μία φορές.

Αθροίζοντας τις αντίστοιχες πιθανότητες για κάθε έναν από τους παραπάνω τρόπους επιστροφής στην κορυφή εκκίνησης, είναι

$$E\left(P_{11}^{2k}\right) \leq 2\left(\frac{256}{dp}\right)^{k/4}$$

και από τις σχέσεις 8.1, 8.2 είναι

$$E(\rho) \leq \left[2n\left(\frac{256}{dp}\right)^{k/4}(1+o(1))\right]^{1/2k}$$

οπότε, επιλέγοντας μια κατάλληλη τιμή για το k, προκύπτει το ακόλουθο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 67. Η δεύτερη ιδιοτιμή ρ του πίνακα μετάβασης P μιας μαρκοβιανής αλυσίδας που αντιστοιχεί σε έναν τυχαίο περίπατο σε έναν $G^d_{n,p}$ γράφο ικανοποιεί τη σχέση

$$E(\rho) \leq \left(\frac{256}{dp}\right)^{1/4} (1 + o(1))$$

□

Στη σχετική δημοσίευση, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ακολουθιών διατήρησης (martingales), αποδεικνύουμε επίσης την υψηλή συγκέντρωση της δεύτερης ιδιοτιμής γύρω από τη μέση της τιμή που μόλις υπολογίσαμε. Επομένως, η συνθήκη $dp > 256$ αρκεί για να εξασφαλιστεί ότι η δεύτερη ιδιοτιμή είναι μικρότερη από τη μονάδα.

Θεώρημα 68. Η γιγαντιαία συνεκτική συνιστώσα τυχαίων κανονικών γράφων με λάθη στις ακμές (μοντέλο $G^d_{n,p}$) παραμένει ένας αποδείξιμα αποδοτικός επεκτατής, αρκεί

$$p > \frac{256}{d}$$

□

Ο υπολογισμός αυτής της μέγιστης επιτρεπόμενης πιθανότητας για τη διατήρηση της ιδιότητας της επέκτασης σε κανονικούς τυχαίους γράφους παρά τα λάθη στις ακμές τους, οφείλεται στους Νικολετσέα και Σπυράκη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική δημοσίευση ([52]) για μια αναλυτική, τεχνική παρουσίαση του αποτελέσματος αυτού.

Κεφάλαιο 9

Φράγματα Chernoff

9.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Μετά τη συνοπτική περιγραφή της μεθόδου των μαρκοβιανών αλυσίδων στο κεφάλαιο που προηγήθηκε, ολοκληρώνουμε την ενδεικτική παρουσίαση ορισμένων βασικών, χαρακτηριστικών τεχνικών σχεδιασμού και ανάλυσης πιθανοτικών αλγόριθμων περιγράφοντας ένα εξαιρετικά χρήσιμο αναλυτικό εργαλείο με ευρύτατες εφαρμογές κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς τέτοιων αλγόριθμων. Πρόκειται για ένα σύνολο ανισοτήτων που συνοπτικά καλούνται φράγματα Chernoff (Chernoff bounds) και οι οποίες φράσσουν εκ των άνω την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή αθροισμάτων στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών και προσφέρουν τη δυνατότητα απόδειξης της ισχυρής συγκέντρωσης των τιμών των αθροισμάτων αυτών γύρω από τη μέση τους τιμή με μεγάλη πιθανότητα (σχεδόν βέβαια).

Η ευρύτατη χρησιμοποίηση των φραγμάτων Chernoff κατά την ανάλυση πιθανοτικών αλγόριθμων οφείλεται ουσιαστικά στο γεγονός ότι η πορεία εξέλιξης των αλγόριθμων αυτών στηρίζεται ακριβώς σε τυχαίες επιλογές (random choices), τα ποσοτικά αποτελέσματα των οποίων μπορούν να αφαιρετικοποιηθούν από τις τιμές αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών. Σε πολλές περιπτώσεις οι τυχαίες αυτές επιλογές είναι δυνατό να πραγματοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματά τους να είναι ανεξάρτητα από επιλογή σε επιλογή και οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές που τα περιγράφουν να θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες. Η υπόθεση της στοχαστικής ανεξαρτησίας εξηγεί την ιδιαίτερη χρησιμότητα των φραγμάτων Chernoff κατά την ανάλυση πιθανοτικών αλγόριθμων των οποίων οι είσοδοι είναι τυχαίοι γράφοι (και ιδιαίτερα γράφοι του μοντέλου $G_{n,p}$ που προκύπτουν από την στοχαστικά ανεξάρτητη επιλογή με ίση πιθανότητα p όλων των $\binom{n}{2}$ δυνατών ακμών ενός γράφου n κορυφών).

Το τεχνικό στοιχείο που καθιστά τα φράγματα Chernoff ιδιαίτερα ισχυρά και αποτελεσματικά κατά την ανάλυση, συνίσταται στο ότι η πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που επιτυγχάνουν είναι εκθετικά μικρή. Πιο συγκεκριμένα (και όπως θα φανεί λεπτομερέστερα και περισσότερο τεχνικά στην επόμενη ενότητα) η πιθανότητα αυτή είναι εκθετικά μικρή στη μέση τιμή του αθροίσματος των τυχαίων μεταβλητών (ουσιαστικά, στον αριθμό των τυχαίων μεταβλητών, αντίστοιχα των τυχαίων επιλογών, που συναποτελούν το άθροισμα). Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό αφού συνεπάγεται πως μια λογαριθμικά μεγάλη μέση τιμή (αντίστοιχα, ένας λογαριθμικός αριθμός τυχαίων επιλογών) αρκούν, σε γενικές γραμμές, για να αποδειχτεί ότι η πιθανότητα συγκέντρωσης γύρω από τη μέση τιμή τείνει στο 1 πολυωνυμικά γρήγορα.

Από την άλλη, το ίδιο γεγονός αναδεικνύει τα όρια των δυνατοτήτων και τους εγγενείς περιορισμούς των φραγμάτων Chernoff, αφού είναι φανερό πως τα φράγματα αυτά παύουν να αποδεικνύουν τη σχεδόν βέβαιη ισχυρή συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή στην περίπτωση όπου αυτή η μέση τιμή είναι μικρή (για παράδειγμα σταθερά μικρή, οπότε η πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή που αποδεικνύουν τα φράγματα Chernoff είναι σταθερή και δεν τείνει στο μηδέν).

9.2 Τα φράγματα Chernoff

Τα φράγματα Chernoff αποτελούν (από την καθαρά μαθηματική, πιθανοθεωρητική σκοπιά) ισχυρές ανισότητες που φράσσουν εκ των άνω την πιθανότητα μεγάλων αποκλίσεων από τη μέση τιμή αθροισμάτων στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Στις περισσότερες εφαρμογές των φραγμάτων Chernoff κατά την ανάλυση πιθανοτικών αλγόριθμων, οι επιμέρους τυχαίες μεταβλητές των αθροισμάτων αυτών είναι δεικνύουσες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δοκιμές Bernoulli (Bernoulli trials), από την άποψη ότι περιγράφουν την επαναληπτική εκτέλεση στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων πειραμάτων με μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα (τα οποία συνήθως καλούνται επιτυχία, αποτυχία) και όπου η πιθανότητα των αποτελεσμάτων αυτών δεν αλλάζει από πείραμα σε πείραμα. Η ύπαρξη, σε κάθε εκτέλεση του τυχαίου πειράματος που καθορίζει την πορεία εξέλιξης του αλγόριθμου, μόνο δύο δυνατών αποτελεσμάτων από τα οποία το ένα καλείται επιτυχία, αντιστοιχεί ακριβώς στην πραγματοποίηση ή όχι κάποιου γεγονότος κατά τις τυχαίες επιλογές στις οποίες επαναληπτικά προβαίνει ο αλγόριθμος. Επομένως, οι τυχαίες μεταβλητές X των οποίων τις ακραίες πιθανότητες (tail probabilities) προσδιορίζουν τα φράγματα Chernoff, έχουν συνήθως τη μορφή

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

όπου

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ (επιτυχία)}, & \text{με πιθανότητα } p \\ 0 \text{ (αποτυχία)}, & \text{με πιθανότητα } q = 1 - p \end{cases}$$

για $1 \leq i \leq n$. Προφανώς, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (binomial distribution).

Παρά το γεγονός ότι η ανάλυση οδηγεί στις περισσότερες περιπτώσεις σε δοκιμές Bernoulli (και ακριβώς για να αναδείξουμε τη γενικότητα των φραγμάτων Chernoff), θα παρουσιάσουμε μια γενικότερη εκδοχή των φραγμάτων αυτών για την περίπτωση αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών όπου οι πιθανότητες επιτυχίας μπορεί να είναι διαφορετικές για τις διάφορες μεταβλητές. Τέτοιες τυχαίες μεταβλητές έχουν επομένως τη μορφή

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

όπου, για $1 \leq i \leq n$, είναι

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ (επιτυχία)}, & \text{με πιθανότητα } p_i \\ 0 \text{ (αποτυχία)}, & \text{με πιθανότητα } q_i = 1 - p_i \end{cases}$$

και αντιστοιχούν σε επαναλαμβανόμενες ανεξάρτητες δοκιμές με μεταβαλλόμενη πιθανότητα επιτυχίας που στη σχετική βιβλιογραφία καλούνται δοκιμές Poisson (Poisson trials).

Εστω μ η μέση τιμή της μεταβλητής X που αποτελεί άθροισμα n δοκιμών Poisson. Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής είναι

$$\mu = E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Τα φράγματα Chernoff δίνουν τη δυνατότητα απόδειξης της ισχυρής συγκέντρωσης των τιμών της μεταβλητής X γύρω από τη μέση της τιμή μ, φράσσοντας εκ των άνω τις ακραίες πιθανότητες της κατανομής X, δηλαδή τις πιθανότητες

- η τυχαία μεταβλητή X να υπερβαίνει τη μέση της τιμή μ κατά έναν $\beta\mu$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα, δηλαδή

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu\}$$

- η τυχαία μεταβλητή X να υπολείπεται της μέσης της τιμής μ κατά έναν $\beta\mu$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ πολλαπλασιαστικό παράγοντα, δηλαδή

$$\Pr\{X \leq (1-\beta)\mu\}$$

Η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των φραγμάτων Chernoff είναι σε γενικές γραμμές ίδια και για τις δύο αυτές ακραίες πιθανότητες, και συνίσταται σε τρία βασικά βήματα:

- τη μελέτη των τιμών της μεταβλητής e^{tX} αντί της μεταβλητής X (η προσφυγή αυτή στη ροπογεννήτρια $E(e^{tX})$ μιας μεταβλητής X εφαρμόζεται ευρύτατα στην πιθανοθεωρία και έχει σε πολλές περιπτώσεις θεαματικά αποτελέσματα).
- τη χρησιμοποίηση της ανισότητας Markov για τις τυχαίες μεταβλητές e^{tX_i}, $1 \leq i \leq n$ και την αξιοποίηση της στοχαστικής ανεξαρτησίας για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του γινομένου των μεταβλητών αυτών.
- τη βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) του άνω φράγματος για την πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή που δίνει η ανισότητα Markov, με την επιλογή της κατάλληλης τιμής για το t.

Το φράγμα Chernoff για την ακραία πιθανότητα υπέρβασης της μέσης τιμής δίνεται, στη γενική του μορφή, από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 69. Εστω $X_1, \ldots, X_n$ στοχαστικά ανεξάρτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δοκιμές Poisson με πιθανότητες επιτυχίας $\Pr\{X_i\} = p_i$, $1 \leq i \leq n$. Η πιθανότητα το άθροισμα τους $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ να υπερβαίνει τη μέση του τιμή $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i$ φράσσεται εκ των άνω σύμφωνα με την ανισότητα

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu\} \leq \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right)^{\mu}$$

όπου $\beta > 0$ μια οποιαδήποτε σταθερά.

Απόδειξη: Προετοιμάζουμε το έδαφος για τη χρησιμοποίηση της ροπογεννήτριας, περνώντας στη μεταβλητή e^{tX} με τη σχέση

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu\} = \Pr\left\{e^{tX} \geq e^{t(1+\beta)\mu}\right\}$$

για οποιοδήποτε $t > 0$. Από την ανισότητα Markov είναι

$$\Pr\left\{e^{tX} \geq e^{t(1+\beta)\mu}\right\} \leq \frac{E\left(e^{tX}\right)}{e^{t(1+\beta)\mu}} \tag{9.1}$$

Αλλά, από τη στοχαστική ανεξαρτησία των δεικνυουσών τυχαίων μεταβλητών X_i και επομένως και των e^{tX_i}, είναι

$$E\left(e^{tX}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right)$$

Από τον ορισμό της μέσης τιμής, είναι

$$E\left(e^{tX_i}\right) = e^t p_i + 1 - p_i = 1 + p_i(e^t - 1) \leq e^{p_i(e^t-1)}$$

από τη σχέση $1 + x \leq e^x$ και για $x = p_i(e^t - 1)$. Επομένως,

$$E\left(e^{tX}\right) < \prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^t-1)} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t - 1)\right) = \exp\left(\left(e^t - 1\right)\mu\right)$$

οπότε η σχέση 9.1 γίνεται

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu\} \leq \exp\left(\left(e^t - 1\right)\mu - t(1+\beta)\mu\right)$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω ανισότητας ελαχιστοποιείται όταν $t = \ln(1+\beta)$, τιμή η οποία γίνεται αποδεκτή αφού $\beta > 0 \Rightarrow t > 0$, οπότε και η ανισότητα οδηγεί στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Η μορφή αυτή του φράγματος Chernoff για τις ακραίες πιθανότητες υπέρβασης της μέσης τιμής είναι, αν και η περισσότερο γενική, αρκετά δύσχρηστη, εξαιτίας της σύνθετης δομής του δεξιού μέρους της ανισότητας. Στην περίπτωση όπου $\beta \in (0, 1)$ το προηγούμενο θεώρημα οδηγεί στην ακόλουθη, λιγότερο γενική αλλά περισσότερο διαδεδομένη και δημοφιλή, μορφή του φράγματος Chernoff:

Θεώρημα 70. Για οποιοδήποτε $\beta \in [0,1]$ είναι

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu\} \leq e^{-\beta^2\mu/3}$$

Απόδειξη: Με βάση την ανάλυση του προσήμου των παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(\beta) = \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + \frac{\beta^2}{3}$$

αποδεικνύεται (δες [31]) ότι

$$\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) \leq -\frac{\beta^2}{3}$$

για $\beta \in [0,1]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} e^{\beta-(1+\beta)\ln(1+\beta)} &\leq e^{-\beta^2/3} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{e^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right)^{\mu} &\leq e^{-\beta^2\mu/3} \end{aligned}$$

που, σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα, ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Με παραπλήσιο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο φράγμα Chernoff για τις ακραίες πιθανότητες υστέρησης μιας τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή μ.

Θεώρημα 71. Εστω $X_1,\ldots,X_n$ στοχαστικά ανεξάρτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δοκιμές Poisson με πιθανότητες επιτυχίας $\Pr\{X_i\} = p_i$, $1 \leq i \leq n$. Η πιθανότητα το άθροισμά τους $X = \sum_{i=1}^n X_i$ να υπολείπεται της μέσης του τιμής $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$ φράσσεται εκ των άνω σύμφωνα με την ανισότητα

$$\Pr\{X \leq (1-\beta)\mu\} \leq e^{-\beta^2\mu/2}$$

όπου $\beta \in [0,1]$ μια οποιαδήποτε σταθερά. □

Συνδυάζοντας τα θεωρήματα 70, 71 προκύπτει ότι η συνολική (προς τα πάνω ή προς τα κάτω) πιθανότητα απόκλισης της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή μ είναι το πολύ

$$\Pr\{X \geq (1+\beta)\mu \ \cup \ X \leq (1-\beta)\mu\} \leq e^{-\beta^2\mu/3} + e^{-\beta^2\mu/2} \leq 2e^{-\beta^2\mu/3}$$

όπου $\beta \in [0,1]$ μια οποιαδήποτε σταθερά. Η ανισότητα αυτή οδηγεί εύκολα στο ακόλουθο τελικό θεώρημα που συνοψίζει τα δύο επιμέρους φράγματα για τις ακραίες πιθανότητες απόκλισης από τη μέση τιμή σε ένα ενιαίο φράγμα:

Θεώρημα 72 (Φράγμα Chernoff)**.** Εστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ στοχαστικά ανεξάρτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δοκιμές Poisson με πιθανότητες επιτυχίας $\Pr\{X_i\} = p_i$, $1 \leq i \leq n$. Η πιθανότητα συγκέντρωσης των τιμών του αθροίσματος $X = \sum_{i=1}^n X_i$ γύρω από τη μέση του τιμή $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$ είναι τουλάχιστον

$$\Pr\{X \in (1 \pm \beta)\mu\} \geq 1 - 2e^{-\beta^2\mu/3}$$

όπου $\beta \in [0,1]$ μια οποιαδήποτε σταθερά. □

Πραγματικά, το παραπάνω θεώρημα προσφέρει τη δυνατότητα απόδειξης της ισχυρής συγκέντρωσης των τιμών της μεταβλητής X γύρω από τη μέση της τιμή μ. Σε γενικές γραμμές, μια μέση τιμή μ που τείνει στο άπειρο οσοδήποτε αργά αρκεί για να εξασφαλιστεί ισχυρή συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή με μεγάλη πιθανότητα, αφού είναι φανερό ότι

$$\mu \to \infty \;\Rightarrow\; \Pr\{X \in (1 \pm \beta)\mu\} \to 1$$

Από την άλλη, αυτή η ισχυρή συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή αρχίζει να γίνεται πραγματικά ικανοποιητική όταν η πιθανότητα της ισχυρής συγκέντρωσης συγκλίνει στο 1 πολυωνυμικά γρήγορα. Απαραίτητη προϋπόθεση για μια τέτοια πιθανότητα ισχυρής συγκέντρωσης είναι, σε γενικές γραμμές, μια λογαριθμικά μεγάλη μέση τιμή. Πραγματικά, έστω $\mu = \alpha \log n$, όπου $\alpha > 0$ μια σταθερά. Επιλέγοντας τη σταθερά β με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\gamma = \frac{\beta^2 \alpha}{3} > 1$$

προκύπτει ότι

$$\Pr\{X \in (1 \pm \beta)\mu\} \geq 1 - 2n^{-\gamma}$$

και εξασφαλίζεται η πολυωνυμικά γρήγορη σύγκλιση στο 1.

Αντίθετα, είναι φανερό ότι μια μέση τιμή που δεν είναι λογαριθμικά μεγάλη (και πολύ περισσότερο μια μέση τιμή που δεν τείνει, έστω και αργά, στο άπειρο) δεν εξασφαλίζει ικανοποιητικά μεγάλη πιθανότητα ισχυρής συγκέντρωσης γύρω από τη μέση τιμή. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση μιας σταθερά μεγάλης μέσης τιμής, οπότε τα φράγματα Chernoff οδηγούν σε μόλις σταθερή πιθανότητα συγκέντρωσης, γεγονός που αποδεικνύει τους εγγενείς περιορισμούς και τα όρια των δυνατοτήτων της μεθόδου.

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι τα φράγματα Chernoff δεν εξαντλούνται στις βασικές εκδοχές τους τις οποίες παρουσιάσαμε σε αυτήν την ενότητα. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [31] όπου παρατίθενται και άλλες, ισχυρότερες αλλά περισσότερο πολύπλοκες και μάλλον δύσχρηστες, ανισότητες Chernoff και στο [12] για την πρωτότυπη δημοσίευση ορισμένων από τα φράγματα αυτά.

Εχοντας ολοκληρώσει την τεχνική περιγραφή των φραγμάτων Chernoff, παρουσιάζουμε στις επόμενες ενότητες δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις εφαρμογής τους: η πρώτη αφορά στην απόδειξη μιας ισχυρής ειδικής περίπτωσης πολυσυνδεσιμότητας των κορυφών των τυχαίων γράφων του μοντέλου $G_{n,p}$, όπου δύο οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με μεγάλο πλήθος εξαιρετικά σύντομων (μήκους το πολύ 3) ξένων μεταξύ τους μονοπατιών. Η εφαρμογή αυτή είναι χαρακτηριστική από την άποψη ότι αναδεικνύει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης των φραγμάτων Chernoff όχι μόνο στην ανάλυση της συμπεριφοράς πιθανοτικών αλγόριθμων αλλά και σε αποδείξεις ύπαρξης επιθυμητών συνδυαστικών δομών.

9.3 Ισχυρή πολυσυνδεσιμότητα των κορυφών τυχαίων γράφων

Στο [48] οι Νικολετσέας, Palem, Σπυράκης και Yung εξετάζουν διάφορα προβλήματα συνεκτικότητας (connectivity) των κορυφών δύο θεμελιωδών τύπων τυχαίων γράφων:

- των τυχαίων γράφων του ευρύτατα χρησιμοποιούμενου και ιδιαίτερα δημοφιλούς μοντέλου $G_{n,p}$ που προκύπτουν επιλέγοντας κάθε μία από τις $\binom{n}{2}$ δυνατές ακμές ενός γράφου n κορυφών, ισοπίθανα (με πιθανότητα p) και στοχαστικά ανεξάρτητα.

- των κανονικών τυχαίων γράφων με λάθη στις ακμές (μοντέλο $G^r_{n,p}$) που προκύπτουν από τους κανονικούς τυχαίους γράφους n κορυφών και βαθμού r του μοντέλου G^r_n, όπου κάθε μία από τις $nr/2$ ακμές "επιβιώνει" με πιθανότητα p (ή "χαλάει" με πιθανότητα $f = 1 - p$), ισοπίθανα και στοχαστικά ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές.

Σε γενικές γραμμές, εξετάζονται τρεις βασικές περιπτώσεις του προβλήματος της συνεκτικότητας:

- η ύπαρξη πολλών, σύντομων, χωρίς κοινές κορυφές μονοπατιών μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών των τυχαίων γράφων του μοντέλου $G_{n,p}$, σχεδόν βέβαια.

- η διατήρηση ή όχι της $r-$συνεκτικότητας των κανονικών τυχαίων γράφων G^r_n (οι γράφοι αυτοί είναι $r-$συνεκτικοί ακόμα και για $r = O(1)$) μετά την εφαρμογή μιας μεγάλης ποικιλίας πιθανοτήτων λάθους στις ακμές τους, σχεδόν βέβαια.

- η σχεδόν βέβαιη ύπαρξη μιας γιγαντιαίας συνεκτικής συνιστώσας (giant connected component) στους γράφους του $G^r_{n,p}$, όταν οι γράφοι αυτοί καθίστανται, εξαιτίας της μεγάλης πιθανότητας λάθους f ή/και του μικρού βαθμού r, μη συνεκτικοί.

Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας μια ευρύτατη ποικιλία πιθανοτικών μεθόδων, το ακόλουθο σύνολο αποτελεσμάτων:

1. Αν $p \geq max(p_1, p_2)$, όπου $p_1 = \Omega(\frac{x}{n-xl})$ και p_2 είναι η συνάρτηση κατωφλίου της $x-$συνεκτικότητας και $l \geq 2$, τότε το $G_{n,p}$ έχει για κάθε ζεύγος κορυφών u, v τουλάχιστον x ξένα (χωρίς κοινές κορυφές) μεταξύ τους μονοπάτια μήκους το πολύ $2l$ το καθένα, που συνδέουν τις κορυφές u, v και το γεγονός αυτό ισχύει με πιθανότητα που τείνει στο 1 όταν το n τείνει στο άπειρο.

2. Το $G^r_{n,p}$ είναι σχεδόν βέβαια $r-$συνεκτικό (εκτός από ένα μικρό τμήμα του με $O(1)$ κορυφές) για μία ευρεία περιοχή πιθανοτήτων λάθους που φτάνουν μέχρι την $f = 1-p \leq n^{-\epsilon}$ (όπου $\epsilon > 0$ είναι μια σταθερά).

3. Το $G^r_{n,p}$ είναι με μεγάλη πιθανότητα ισχυρά μη συνεκτικό για σταθερή f και οποιοδήποτε $r < \frac{1}{2}\sqrt{\log n}$, ενώ είναι με μεγάλη πιθανότητα $r-$συνεκτικό όταν $r \geq \alpha \log n$, όπου $\alpha \geq 2$ μια σταθερά.

4. Ακόμα και όταν το $G^r_{n,p}$ καθίσταται μη συνεκτικό, έχει μια γιγαντιαία συνεκτική συνιστώσα λογαριθμικής μάλιστα διαμέτρου, ακόμα και για μικρούς βαθμούς $r = O(1)$.

Επίσης, παρουσιάζεται ένας πιθανοτικός αλγόριθμος με μέση πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log n)$ για την κατασκευή αυτής της γιγαντιαίας συνεκτικής συνιστώσας.

Αξίζει στο σημείο αυτό να τονίσουμε την ιδιαίτερη πρακτική σημασία της συνδεσιμότητας των κορυφών τυχαίων γράφων με πολλά, σύντομα, ξένα μεταξύ τους μονοπάτια, αφού μια τέτοια συνδεσιμότητα συνεπάγεται αφαιρετικά τον αξιόπιστο (λόγω της ύπαρξης πολλών, ξένων μεταξύ τους μονοπατιών) και αποδοτικό (λόγω του μικρού μήκους των μονοπατιών αυτών) υπολογισμό σε δίκτυα υπολογιστών με λάθη (βλάβες, μη διαθεσιμότητα λόγω αμοιβαία αποκλειόμενης χρήσης κτλ.) στις συνδέσεις.

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε μια ειδική, ισχυρή περίπτωση πολυσυνδεσιμότητας, στην απόδειξη της οποίας χρησιμοποιούνται φράγματα Chernoff. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε την σχεδόν βέβαιη ύπαρξη ενός μεγάλου αριθμού ($\Theta(n^{1-\epsilon})$) ξένων (χωρίς κοινές κορυφές), εξαιρετικά σύντομων (μήκους 3) μονοπατιών μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών ενός $G_{n,p}$ γράφου όταν $p \geq n^{-\epsilon}$, για οποιοδήποτε $\epsilon \leq 1/2$.

Εστω $G = (V, E)$ ένας τυχαίος γράφος του μοντέλου $G_{n,p}$ με $p \geq n^{-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) και έστω u, v δύο οποιεσδήποτε συγκεκριμένες κορυφές του. Χωρίζουμε το σύνολο $V - \{u, v\}$ σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = |B| = (n-2)/2$ (έστω n άρτιο, χωρίς βλάβη της γενικότητας).

Εστω $X_u = |(u, y) : y \in A|$ και $X_v = |(v, y) : y \in B|$. Με άλλα λόγια, οι X_u και X_v είναι τυχαίες μεταβλητές για τα σύνολα των γειτονικών με τις u (αντίστοιχα, v) κορυφές. Θα δείξουμε ότι τα σύνολα αυτά είναι "αρκετά μεγάλα". Χρησιμοποιώντας φράγματα Chernoff, μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε σταθερά $\beta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\Pr\{X_u \in (1 \pm \beta)p|A|\} &\geq 1 - 2\exp\left(-\frac{\beta^2}{3}p|A|\right) \Leftrightarrow \\
\Pr\left\{X_u \in (1 \pm \beta)\frac{(n-2)n^{-\epsilon}}{2}\right\} &\geq 1 - 2\exp\left(-\frac{\beta^2}{6}(n-2)n^{-\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

αφού πρόκειται, από τον ορισμό του $G_{n,p}$, για την πραγματοποίηση $|A|$ δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, οπότε η X_u έχει μέση τιμή $p|A|$.

Με παρόμοια επιχειρήματα, ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα αποδεικνύεται και για την X_v. Συνολικά:

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X_u \notin (1 \pm \beta)p|A| \vee X_v \notin (1 \pm \beta)p|B|\} \\
&\leq 4\exp\left(-\frac{\beta^2}{6}(n-2)n^{-\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

που τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Θεωρούμε τα σύνολα $A_u = \{(u, y)|y \in A\}$ ($|A_u| = X_u$) και $A_v = \{(v, y)|y \in B\}$ ($|A_v| = X_v$). Εστω $B_{c,p}$ ο τυχαίος διμελής (bipartite) γράφος με τον ίδιο αριθμό κορυφών $|c|$ σε κάθε μέλος του, όπου:

$$c = \begin{cases} A_u & \text{αν } X_u \leq X_v \\ A_v & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς, τα δύο μέλη A_u, A_v είναι συνδεδεμένα με τις u, v αντίστοιχα, και ο $B_{c,p}$ είναι ο κεντρικός υπογράφος.

Εφαρμόζοντας ένα σχετικό αποτέλεσμα των Angluin και Valiant ([5]), ο $B_{c,p}$ έχει ένα πλήρες ταίριασμα (perfect matching) με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - |c|^{-\alpha}$ (όπου $\alpha > 0$ είναι μια σταθερά), όταν $p \geq (2\log|c|)/|c|$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $|c| = \Theta(n^{1-\epsilon})$ και $(2\log|c|)/|c| = \Theta(\frac{\log n}{n^{1-\epsilon}})$, σχεδόν βέβαια. Αλλά $p = 1/n^{\epsilon}$. Επομένως, για να εφαρμόζεται το αποτέλεσμα των Angluin και Valiant, πρέπει να είναι:

$$\frac{1}{n^{\epsilon}} \geq \lambda \frac{\log n}{n^{1-\epsilon}}$$

(όπου λ μια κατάλληλη θετική σταθερά), ισοδύναμα $n^{1-\epsilon} \geq \lambda n^{\epsilon}\log n$, επομένως $(1-\epsilon)\log n \geq \epsilon\log n + \log\log n + \log\lambda$ που συνεπάγεται ότι $2\epsilon\log n \leq \log n - \log\log n - \log\lambda$ και τελικά:

$$\epsilon \leq \frac{1}{2} - \frac{\log\log n + \log\lambda}{2\log n}$$

οπότε προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 73. Στο $G_{n,p}$, με $p \geq n^{-\epsilon}$, για όλα τα $\alpha > 2$ με $\epsilon \leq 1/2 - (\log\log n + \log\lambda)/(2\log n)$ (για κάποιο κατάλληλο $\lambda > 1$, που εξαρτάται από το α), αν u, v είναι δύο οποιεσδήποτε κορυφές του $G_{n,p}$ γράφου, τότε υπάρχουν $\Theta(n^{1-\epsilon})$ ξένα (χωρίς κοινές κορυφές) μεταξύ τους μονοπάτια μήκους 3 ανάμεσα στα u και v, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - n^{-\alpha}$. $\square$

Εξετάζοντας όλα τα $\binom{n}{2} \leq n^2$ ζεύγη κορυφών, είναι $\Pr\{\exists(u,v)$ που παραβιάζει το θεώρημα$\}$ $\leq n^2\, n^{-\alpha}$, επομένως:

Θεώρημα 74. Στο $G_{n,p}$, για $p \geq n^{-\epsilon}$, για όλα τα $\alpha > 0$ με $\epsilon \leq 1/2 - (\log\log n + \log\lambda)/(2\log n)$ (για $\lambda(\alpha) > 1$), $\forall u, v \in V$ υπάρχουν $\Theta(n^{1-\epsilon})$ ξένα (χωρίς κοινές κορυφές) μεταξύ τους μονοπάτια μήκους 3 ανάμεσα στα u και v, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - n^{-\alpha}$. $\square$

Η εφαρμογή αυτή, όπως αναφέρθηκε και στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, αναδεικνύει ακριβώς τη δυνατότητα χρησιμοποίησης των φραγμάτων Chernoff και κατά την απόδειξη ύπαρξης συνδυαστικών δομών. Ωστόσο, τα περισσότερα παραδείγματα εφαρμογής των φραγμάτων αυτών αφορούν στην ανάλυση πιθανοτικών αλγόριθμων. Μια τέτοια, αρκετά χαρακτηριστική περίπτωση ανάλυσης περιγράφεται στην ενότητα που ακολουθεί.

9.4 Ο αλγόριθμος απληστίας για κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης

Το πρόβλημα της ύπαρξης κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με κατά το δυνατόν μικρό μέγεθος σε πυκνούς τυχαίους γράφους του μοντέλου $G_{n,p}$ όπου η p είναι σταθερά μεγάλη, μας έχει απασχολήσει επανειλημμένα στα πλαίσια αυτού του βιβλίου. Πιο συγκεκριμένα:

- υπολογίσαμε ένα λογαριθμικό (στον αριθμό των κορυφών του γράφου) κάτω φράγμα για το μέγεθος κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης (βλέπε ενότητα 2.6).

- επίσης, είναι εύκολο να δειχθεί η αφθονία (με μεγάλη πιθανότητα) κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με μέγεθος μεγαλύτερο του λογαριθμικού (βλέπε [51]).

- τέλος, αποδείξαμε την σχεδόν βέβαιη ύπαρξη κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με λογαριθμικό μέγεθος τα οποία, σύμφωνα και με το αποτέλεσμα για το λογαριθμικό κάτω φράγμα, είναι βέλτιστα (optimal) (βλέπε ενότητα 4.4).

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί την τεχνική θεμελίωση του τελευταίου από τα τρία αυτά αποτελέσματα.

Θεώρημα 75. Οι τυχαίοι γράφοι του μοντέλου $G_{n,1/2}$ περιέχουν κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης μεγέθους $\lceil \log n \rceil$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 18\,\frac{(\log n)^2}{n}$, δηλαδή σχεδόν βέβαια. □

Αξίζει πάντως να σημειώσουμε ότι το θεώρημα αυτό (εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσεται η απόδειξή του) δείχνει την ύπαρξη λογαριθμικών κέντρων γειτνίασης με μη κατασκευαστικό τρόπο. Είναι, επομένως, ενδιαφέρον να βρεθούν αποδοτικοί (μικρού πολυωνυμικού χρόνου) αλγόριθμοι οι οποίοι να κατασκευάζουν κυρίαρχα κέντρα γειτνίασης με μέγεθος όσο το δυνατό κοντά στο $\log n$. Το δεύτερο από τα τρία αποτελέσματα που παραθέσαμε προηγουμένως υπαινίσσεται ότι επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε σύνολο κορυφών μεγέθους $(1+\epsilon)\log n$ (όπου $\epsilon > 0$ είναι μια σταθερά) επιτυγχάνουμε να κατασκευάσουμε ένα κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης, σχεδόν βέβαια. Ωστόσο, οι ενδεχόμενες διαδοχικές επαναλήψεις αυτής της τυχαίας επιλογής δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, αφού ορισμένες ακμές που συνδέουν τα δοκιμασμένα στο παρελθόν σύνολα με το κάθε φορά εξεταζόμενο σύνολο έχουν ήδη εξεταστεί και δεν μπορούν να θεωρούνται πια τυχαίες. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο η ανάλυση του οποίου ξεπερνά τα διάφορα προβλήματα στοχαστικής εξάρτησης και όπου η σχέση της πιθανότητας επιτυχούς κατασκευής μικρών κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με το μέγεθος των κέντρων αυτών ελέγχεται από το χρήστη του αλγόριθμου.

Ο αλγόριθμος αυτός επιλέγει σε κάθε επαναληπτικό του βήμα μία κορυφή και την τοποθετεί στο υπό κατασκευή κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης, διαγράφοντας στη συνέχεια από το γράφο όλες τις γειτονικές με αυτήν κορυφές (και τις αντίστοιχες ακμές), αφού αυτές οι κορυφές προφανώς γειτνιάζουν με το υπό κατασκευή κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης. Σημειώνουμε ότι ο κάθε φορά εναπομένων γράφος παραμένει τυχαίος, αφού οι ακμές του δεν έχουν εξετασθεί στο παρελθόν (οι κορυφές που γειτνιάζουν με την κάθε φορά επιλεγείσα κορυφή διαγράφονται, αφού εξεταστούν). Η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει την κατασκευή κυρίαρχων κέντρων γειτνίασης με μέγεθος $(1+\epsilon)\log n$ (όπου $\epsilon > 0$ μια οσοδήποτε μικρή σταθερά) σχεδόν βέβαια και απαιτεί χρόνο $O(n \log n)$ με μεγάλη πιθανότητα και κατά μέση τιμή.

Ο αλγόριθμος αυτός χαρακτηρίζεται άπληστος (greedy) ακριβώς επειδή σε κάθε βήμα του αξιοποιεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό τις σχέσεις γειτονικότητας της κάθε φορά επιλεγείσας κορυφής, προσθέτοντας στο υπό κατασκευή κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης αυτήν μόνο την κορυφή (η οποία προφανώς "καλύπτει" με βέλτιστο τρόπο όλες τις γειτονικές της κορυφές). Η αποτελεσματικότητα αυτής της "άπληστης" συμπεριφοράς (του να παίρνει δηλαδή κανείς σε κάθε βήμα το μέγιστο δυνατό) στηρίζεται ακριβώς στη χρησιμοποίηση φραγμάτων Chernoff και στη δυνατότητα απόδειξης της ισχυρής συγκέντρωσης του αριθμού των γειτονικών κορυφών της κάθε φορά επιλεγόμενης κορυφής γύρω από τη (μεγάλη) μέση τιμή του αριθμού αυτού.

Ακολουθεί μια τεχνική περιγραφή του αλγόριθμου αυτού. Σημειώνουμε ότι D είναι το υπό κατασκευή κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης ενώ V_i, E_i είναι τα κάθε φορά εναπομένοντα τυχαία σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Επίσης, συμβολίζουμε με N_i το σύνολο των γειτονικών κορυφών της κάθε φορά επιλεγείσας κορυφής u_i στο γράφο G_{V_i,E_i} και χρησιμοποιούμε το σύνολο V' για την προσωρινή φύλαξη του εναπομείναντος συνόλου $V_i - N_i$. Τέλος, $\epsilon > 0$ είναι μια σταθερά, επιλεγόμενη αυθαίρετα από το χρήστη του αλγόριθμου.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ "GREEDY"
Είσοδος: Ενας τυχαίος γράφος $G(V, E)$ του $G_{n,1/2}$
(1) $i \leftarrow 0$; $V_i \leftarrow V$; $D \leftarrow \emptyset$
(2) **until** $|V_i| \leq \epsilon \log n$ **do**
begin
Επέλεξε μια κορυφή $u_i \in V_i$
$V' \leftarrow V_i - N_i$
$D \leftarrow D \cup \{u_i\}$
$i \leftarrow i + 1$
$V_i \leftarrow V'$
end
(3) $D \leftarrow D \cup V_i$
(4) **return** D

Η βασική ιδέα στην οποία στηρίζεται, σε γενικές γραμμές, ο αλγόριθμος αυτός είναι η ακόλουθη: όσο ο αριθμός $|V_i|$ των κορυφών στον εναπομένοντα γράφο παραμένει τουλάχιστον λογαριθμικός, τα φράγματα Chernoff αποδεικνύουν με μεγάλη πιθανότητα ότι η κάθε φορά επιλεγείσα κορυφή γειτνιάζει με σχεδόν τις μισές (λόγω της πιθανότητας $p = 1/2$ για την ύπαρξη μιας οποιασδήποτε ακμής) από τις εναπομένουσες κορυφές, οπότε ο αριθμός των κορυφών στον εναπομένοντα γράφο σχεδόν υποδιπλασιάζεται σε κάθε επαναληπτικό βήμα και επομένως η διαδικασία εξελίσσεται ικανοποιητικά για έναν λογαριθμικό μόνο αριθμό επαναλήψεων. Μετά από αυτόν το λογαριθμικό αριθμό επαναλήψεων, αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $|V_i|$ των κορυφών που απομένουν πέφτει κάτω από $\epsilon \log n$ και τα φράγματα Chernoff αρχίζουν να μην εξασφαλίζουν ικανοποιητικά μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας, οπότε και το τελικό σύνολο V_i με τις $\epsilon \log n$ εναπομένουσες κορυφές ενσωματώνεται στο υπό κατασκευή κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης D η κατασκευή του οποίου ολοκληρώνεται.

Ακολουθεί ένα σύνολο αποτελεσμάτων και ορισμών που περιγράφουν αυτήν τη βασική ιδέα με τεχνικό τρόπο.

Λήμμα 11. Εστω μια συγκεκριμένη σταθερά $\beta \in [0, 1]$. Επιλέγοντας μια οσοδήποτε μικρή σταθερά $\epsilon > 0$ και δοθέντος ότι $|V_i| \geq \epsilon \log n$ είναι

$$\Pr\left\{|N_i| \geq (1 - \beta)\frac{|V_i|}{2}\right\} \geq 1 - n^{-\frac{\beta^2}{4}\epsilon}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία των $|V_i|$ δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $1/2$ (μια οποιαδήποτε κορυφή στο εναπομένον σύνολο V_i γειτνιάζει με την κάθε φορά επιλεγείσα u_i με πιθανότητα $1/2$, από τον ορισμό του $G_{n,1/2}$). Χρησιμοποιώντας φράγματα Chernoff (θεώρημα 71) για $\mu = \frac{|V_i|}{2}$, είναι:

$$\Pr\left\{|N_i| \geq (1-\beta)\frac{|V_i|}{2}\right\} \geq 1 - e^{-\frac{\beta^2}{2}\frac{|V_i|}{2}} \geq 1 - e^{-\frac{\beta^2}{4}\epsilon \log n} \geq 1 - n^{-\frac{\beta^2}{4}\epsilon}$$

□

Ορισμός 38. Εστω το γεγονός $\varepsilon_i =$ "κατά την i-οστή εκτέλεση του βρόγχου του αλγόριθμου είναι $|N_i| \geq (1-\beta)\frac{|V_i|}{2}$" □

Ορισμός 39. Εστω $\varepsilon = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \cdots \cap \varepsilon_t$ μέχρι $|V_t| < \epsilon \log n$ □

Λήμμα 12. Προϋποθέτοντας στοχαστικά το γεγονός ε, ο αριθμός των επαναλήψεων t του βρόγχου του αλγόριθμου είναι το πολύ $(1+\epsilon')\log n$, όπου $\epsilon' > 0$ μια σταθερά.

Απόδειξη: Προφανώς είναι $|V_{i+1}| \leq (1-\gamma)|V_i|$ μετά από κάθε επανάληψη, όπου $\gamma = \frac{1}{1-\beta}$, οπότε συσσωρευτικά είναι $|V_t| \leq (1-\gamma)^t n$. Επειδή πρέπει να είναι $(1-\gamma)^t n \leq \epsilon \log n$ συνεπάγεται $t \geq \frac{\log n}{\log(\frac{1}{1-\gamma})} + \Theta(\log\log n)$. Σημειώνουμε ότι $\frac{1}{1-\gamma} = \frac{2}{1+\beta}$. Επιλέγοντας (για οποιοδήποτε $\epsilon' > 0$)

$$\beta = 2^{\frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}} - 1$$

παίρνουμε τελικά $t \leq (1+\epsilon')\log n$. □

Λήμμα 13. Εστω οποιεσδήποτε σταθερές $\beta \in [0,1], \epsilon > 0$. Είναι

$$\Pr\{\varepsilon\} \geq 1 - n^{-\frac{\beta^2}{8}\epsilon}$$

Απόδειξη: Από τα λήμματα 11, 12 είναι $\Pr\{\overline{\varepsilon}\} \leq \sum_j \Pr\{\overline{\varepsilon_j}\} \leq t\, n^{-\frac{\beta^2}{4}\epsilon}$ οπότε $\Pr\{\overline{\varepsilon}\} \leq (1+\epsilon')(\log n)\, n^{-\frac{\beta^2}{4}\epsilon} \leq n^{-\frac{\beta^2}{8}\epsilon}$, για οποιεσδήποτε σταθερές $\beta \in [0,1], \epsilon > 0, \epsilon' > 0$. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει το ακόλουθο τελικό θεώρημα:

Θεώρημα 76. Ο αλγόριθμος "GREEDY" κατασκευάζει ένα κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης μεγέθους $(1+\epsilon'+\epsilon)\log n$ σε χρόνο $O((1+\epsilon')n\log n)$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - n^{-\frac{\beta^2}{8}\epsilon}$.
□

Συμπερασματικά, ο αλγόριθμος GREEDY κατασκευάζει ένα σχεδόν βέλτιστο (near-optimal) κυρίαρχο κέντρο γειτνίασης, αφού επιτυγχάνει έναν το πολύ $1+\epsilon$ λόγο προσέγγισης του λογαριθμικού βέλτιστου μεγέθους, για οποιαδήποτε σταθερά $\epsilon > 0$, σε πολυωνυμικό χρόνο σχεδόν βέβαια και κατά μέση τιμή.

Ωστόσο, η πιθανότητα επιτυχίας του αλγόριθμου απληστίας, αν και τείνει στο 1, δεν είναι πολυωνυμικά "μεγάλη" αφού στην πιθανότητα αυτή $\left(1 - n^{-\frac{\beta^2}{8}\epsilon}\right)$ η σταθερά $\frac{\beta^2}{8}\epsilon$ είναι απλά θετική. Πάντως, στο άρθρο των Νικολετσέα και Σπυράκη ([51]) όπου δημοσιεύτηκε ο αλγόριθμος απληστίας, παρουσιάζεται και ένας άλλος, ισχυρότερος αλγόριθμος για το ίδιο πρόβλημα (ο αλγόριθμος των επαναλαμβανόμενων δοκιμών) που έχει πολυωνυμικά μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας ($1 - n^{-\alpha}$, όπου $\alpha > 1$ μια σταθερά).

Παράρτημα Α′

Θεωρία Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό παρατίθενται με συνοπτικό τρόπο ορισμένες βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, όπως η έννοια του δειγματοχώρου και των γεγονότων ενός τυχαίου πειράματος, η έννοια της πιθανότητας και ο αξιωματικός ορισμός της κατά Kolmogorov, η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού και οι ανισότητες Boole-Bonferroni για την πιθανότητα ένωσης γεγονότων, οι έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και της στοχαστικής ανεξαρτησίας. Επίσης, παρουσιάζονται η έννοια της τυχαίας μεταβλητής, που διευκολύνει μια περισσότερο μαθηματική προσέγγιση ενός τυχαίου πειράματος, η έννοια της κατανομής πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής και ορισμένες βασικές παράμετροι μιας κατανομής πιθανότητας όπως είναι η μέση τιμή, η διασπορά και γενικότερα η έννοια των ροπών, όπως επίσης και οι πιθανογεννήτριες και ροπογεννήτριες μιας τυχαίας μεταβλητής. Τέλος, περιγράφονται ορισμένες βασικές κατανομές, όπως η κατανομή Bernoulli, η διωνυμική κατανομή, η γεωμετρική κατανομή, η κατανομή Poisson και η κανονική κατανομή.

Σκοπός αυτού του παραρτήματος είναι να προσφέρει τη δυνατότητα άμεσων, σύντομων και περιεκτικών παραπομπών στον αναγνώστη του βασικού μέρους του βιβλίου. Ο χαρακτήρας αυτός του παραρτήματος μας οδήγησε στο να περιοριστούμε σε μια απλή παράθεση των σχετικών αποτελεσμάτων, παραλείποντας τις αποδείξεις των θεωρημάτων που παρουσιάζονται. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [25], [41] για μια εκτενή εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Α′.1 Δειγματοχώροι και Γεγονότα

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος καλείται δειγματοχώρος (sample space) του πειράματος και συνήθως συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, ο δειγματοχώρος που περιγράφει το ρίξιμο ενός ζαριού είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Κάθε επιμέρους δυνατό αποτέλεσμα καλείται σημείο του δειγματοχώρου (sample point). Για παράδειγμα, ο παραπάνω δειγματοχώρος αποτελείται από 6 σημεία, τους ακέραιους αριθμούς από 1 έως 6.

Ενας δειγματοχώρος με πεπερασμένο πλήθος σημείων καλείται πεπερασμένος. Αν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των σημείων ενός δειγματοχώρου στους φυσικούς αριθμούς $1, 2, \ldots$ ο δειγματοχώρος καλείται αριθμήσιμα άπειρος. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου τα σημεία του δειγματοχώρου είναι δυνατό να αντιστοιχιστούν ένα προς ένα στα σημεία ενός διαστήματος της μορφής (x, y), όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, ο δειγματοχώρος καλείται μη αριθμήσιμα άπειρος. Ενας δειγματοχώρος που είναι είτε πεπερασμένος είτε αριθμήσιμα άπειρος καλείται διακριτός (discrete). Ενας μη αριθμήσιμα άπειρος δειγματοχώρος καλείται επίσης συνεχής.

Ενα υποσύνολο ενός δειγματοχώρου Ω (δηλαδή ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων) καλείται γεγονός (event) και συμβολίζεται συνήθως με ϵ. Για παράδειγμα, το γεγονός $\epsilon =$"ο αριθμός που προκύπτει κατά το ρίξιμο ενός ζαριού είναι άρτιος" περιγράφεται από το σύνολο $\{2, 4, 6\}$. Λέμε πως ένα γεγονός ϵ πραγματοποιείται, όταν το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος είναι σημείο του γεγονότος αυτού. Ενα γεγονός που περιλαμβάνει ένα μοναδικό σημείο του δειγματοχώρου καλείται απλό ή στοιχειώδες γεγονός. Το ίδιο το σύνολο Ω αποτελεί γεγονός και καλείται βέβαιο, αφού πραγματοποιείται οπωσδήποτε. Επίσης, το κενό σύνολο $\emptyset$ αποτελεί γεγονός και καλείται αδύνατο.

Εχοντας ορίσει τα γεγονότα ως σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία συνόλων για να περιγράφουμε τις σχέσεις μεταξύ διάφορων γεγονότων. Εστω ϵ_1, ϵ_2 δυο γεγονότα ενός δειγματοχώρου. Μπορούμε να συσχετίζουμε τα γεγονότα αυτά μεταξύ τους και να παράγουμε νέα γεγονότα, χρησιμοποιώντας τις συνολοθεωρητικές έννοιες της ένωσης (union), της τομής (intersection) και του συμπληρώματος (complement). Πιο συγκεκριμένα:

- το γεγονός "πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα γεγονότα ϵ_1, ϵ_2" περιγράφεται σαν $\epsilon_1 \cup \epsilon_2$.
- το γεγονός "πραγματοποιείται τόσο το ϵ_1 όσο και το ϵ_2" περιγράφεται σαν $\epsilon_1 \cap \epsilon_2$.
- το γεγονός "δεν πραγματοποιείται το ϵ_1" περιγράφεται από το $\overline{\epsilon_1}$.

Τέλος, δυο γεγονότα ϵ_1, ϵ_2 καλούνται αμοιβαία αποκλειόμενα (mutually exclusive) ή ξένα, αν δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα, δηλαδή αν $\epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \emptyset$. Για παράδειγμα, τα γεγονότα $\epsilon_1 =$"ο αριθμός που προκύπτει κατά το ρίξιμο ενός ζαριού είναι άρτιος" και $\epsilon_2 =$"ο αριθμός που προκύπτει κατά το ρίξιμο ενός ζαριού είναι περιττός" είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, αφού $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$.

Α΄.2 Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Η πιθανότητα, σα μαθηματική και φιλοσοφική έννοια, συνεχίζει να απασχολεί έντονα την επιστημονική κοινότητα, σε μια προσπάθεια προσδιορισμού της βαθύτερης ουσίας της και διατύπωσης ενός ικανοποιητικού, τόσο από θεωρητική όσο και από πρακτική άποψη, ορισμού της. Από το σύνολο των ορισμών που έχουν προταθεί, προκύπτουν δύο βασικές μέθοδοι για την εκτίμηση πιθανοτήτων:

- ο εκ των προτέρων (a priori) ορισμός της πιθανότητας: αν ένα τυχαίο πείραμα έχει n διαφορετικά και ισοπίθανα αποτελέσματα και η πραγματοποίηση του γεγονότος ϵ αντιστοιχεί σε k από αυτά, τότε $\Pr\{\epsilon\} = k/n$.

- η μέθοδος της σχετικής συχνότητας (ή εκ των υστέρων ορισμός): αν σε n επαναλήψεις ενός τυχαίου πειράματος (όπου το n πρέπει να είναι "αρκετά μεγάλο") το γεγονός ϵ πραγματοποιείται k φορές, τότε η πιθανότητά του είναι $\Pr\{\epsilon\} = k/n$.

Οι μέθοδοι αυτές, αν και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην πράξη, εμφανίζουν σοβαρές αδυναμίες: η πρώτη υποθέτει (και επομένως έχει περιορισμένη γενικότητα) ότι τα σημεία του δειγματοχώρου είναι εξίσου πιθανά, ενώ η δεύτερη στηρίζεται στην ασαφή προϋπόθεση ενός "αρκετά μεγάλου" n. Γι αυτούς τους λόγους, έχει επικρατήσει ένας τρίτος ορισμός της έννοιας της πιθανότητας, που προτάθηκε από τον Kolmogorov και καλείται αξιωματικός ορισμός, από την άποψη ότι αποφεύγει να δώσει ένα άμεσο νοηματικό περιεχόμενο στην πιθανότητα και απλά την ορίζει σα μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει στα γεγονότα ενός δειγματοχώρου πραγματικούς αριθμούς (τις πιθανότητες των γεγονότων αυτών) και που πληρεί ορισμένες ιδιότητες (αξιώματα).

Με άλλα λόγια, σε οποιοδήποτε γεγονός ϵ ενός δειγματοχώρου Ω αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός $\Pr\{\epsilon\}$ που καλείται πιθανότητα του γεγονότος ϵ και πληρεί (σε μια συγκεκριμένη εκδοχή του αξιωματικού αυτού ορισμού) τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $\forall\epsilon,\ 0 \leq \Pr\{\epsilon\} \leq 1$
2. $\Pr\{\Omega\} = 1$
3. Αν τα γεγονότα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ είναι ανά δύο αμοιβαία αποκλειόμενα (ξένα), τότε

$$\Pr\{\epsilon_1 \cup \cdots \cup \epsilon_k\} = \Pr\{\epsilon_1\} + \cdots + \Pr\{\epsilon_k\}$$

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα αυτά, αποδεικνύονται ορισμένα βασικά θεωρήματα που χαρακτηρίζουν την πιθανότητα:

1. $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2. $\Pr\{\bar{\epsilon}\} = 1 - \Pr\{\epsilon\}$
3. $\epsilon_1 \subset \epsilon_2 \Rightarrow \Pr\{\epsilon_1\} \leq \Pr\{\epsilon_2\}$
4. $\Pr\{\epsilon_1 \cup \epsilon_2\} = \Pr\{\epsilon_1\} + \Pr\{\epsilon_2\} - \Pr\{\epsilon_1 \cap \epsilon_2\}$
5. $\Pr\{\cup_{i=1}^{n} \epsilon_i\} \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr\{\epsilon_i\}$

Α΄.3 Η πιθανότητα της ένωσης γεγονότων

Ο υπολογισμός της ένωσης γεγονότων είναι ιδιαίτερα σημαντικός, από την άποψη ότι η πραγματοποίησή της σημαίνει ότι πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα αυτά. Στην περίπτωση που τα γεγονότα της ένωσης είναι ανά δύο αμοιβαία αποκλειόμενα, η πιθανότητα της ένωσης ισούται, σύμφωνα με το τρίτο από τα αξιώματα του ορισμού της πιθανότητας κατά Kolmogorov, με το άθροισμα των πιθανοτήτων των επιμέρους γεγονότων και επομένως ο υπολογισμός της είναι αρκετά εύκολος. Αντίθετα, στη γενική περίπτωση όπου δεν κάνουμε καμία υπόθεση για το αν τα γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ή όχι, ο υπολογισμός της πιθανότητας της ένωσης γεγονότων είναι περισσότερο σύνθετος. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής χρησιμοποιούνται συνήθως οι ακόλουθες τρεις βασικές σχέσεις:

- η σχέση
$$\Pr\{\epsilon_1 \cup \cdots \cup \epsilon_n\} \leq \Pr\{\epsilon_1\} + \cdots + \Pr\{\epsilon_n\}$$
που φράσσει εκ των άνω την πιθανότητα της ένωσης γεγονότων.

- η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού (principle of inclusion- exclusion), που συνιστά ένα σύνθετο αλλά ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας της ένωσης σύμφωνα με τη σχέση:
$$\begin{aligned}\Pr\left\{\cup_{i=1}^{n}\epsilon_i\right\} &= \sum_{i_1=1}^{n}\Pr\{\epsilon_{i_1}\} - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\Pr\{\epsilon_{i_1}\cap\epsilon_{i_2}\} \\ &+ \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n}\Pr\{\epsilon_{i_1}\cap\epsilon_{i_2}\cap\epsilon_{i_3}\} - \cdots \\ &+ (-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\Pr\{\epsilon_{i_1}\cap\cdots\cap\epsilon_{i_k}\} + \cdots\end{aligned}$$

- οι ανισότητες Boole-Bonferroni, που αποδεικνύουν ότι τα μερικά αθροίσματα του τύπου της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι διαδοχικά μεγαλύτερα και μικρότερα από την ακριβή πιθανότητα της ένωσης: Αν $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ είναι οποιαδήποτε γεγονότα, τότε είναι, για άρτια k από 1 έως n,
$$\Pr\left\{\cup_{i=1}^{n}\epsilon_i\right\} \geq \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k}\Pr\{\cap_{l=1}^{j}\epsilon_{i_l}\}$$
ενώ, για περιττά k από 1 έως n, είναι
$$\Pr\left\{\cup_{i=1}^{n}\epsilon_i\right\} \leq \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq k}\Pr\{\cap_{l=1}^{j}\epsilon_{i_l}\}$$

Α΄.4 Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία

Η δεσμευμένη (conditional) πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος ϵ_1 δοθείσης της πραγματοποίησης ενός άλλου γεγονότος ϵ_2 συμβολίζεται με $\Pr\{\epsilon_1|\epsilon_2\}$ και δίνεται από τη σχέση
$$\Pr\{\epsilon_1|\epsilon_2\} = \frac{\Pr\{\epsilon_1\cap\epsilon_2\}}{\Pr\{\epsilon_2\}}$$
με την προϋπόθεση ότι $\Pr\{\epsilon_2\} > 0$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα που συσχετίζει την πιθανότητα ενός γεγονότος ϵ με την πραγματοποίηση επιμέρους ξένων μεταξύ τους γεγονότων που συναποτελούν το δειγματοχώρο.

Θεώρημα 77. Εστω ένας διαμερισμός (partition) του δειγματοχώρου Ω στα γεγονότα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ (με άλλα λόγια, τα ϵ_i είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι Ω). Είναι

$$\Pr\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^{k} \Pr\{\epsilon|\epsilon_i\} \Pr\{\epsilon_i\}$$

□

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα που έχει αρκετές εφαρμογές στην πιθανοθεωρία και τη στατιστική.

Θεώρημα 78 (Bayes)**.** Εστω ένας διαμερισμός του δειγματοχώρου Ω στα γεγονότα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$. Είναι, για οποιοδήποτε γεγονός ϵ,

$$\Pr\{\epsilon_i|\epsilon\} = \frac{\Pr\{\epsilon|\epsilon_i\} \Pr\{\epsilon_i\}}{\sum_{i=1}^{k} \Pr\{\epsilon|\epsilon_i\} \Pr\{\epsilon_i\}}$$

□

Η ιδιαίτερη σημασία του θεωρήματος αυτού οφείλεται στο ότι συσχετίζει τις (εκ των προτέρων και ανεξάρτητες της πραγματοποίησης του γεγονότος ϵ) πιθανότητες $\Pr\{\epsilon_i\}$ με τις υπό συνθήκη (εκ των υστέρων) πιθανότητες $\Pr\{\epsilon_i|\epsilon\}$ πραγματοποίησης των γεγονότων ϵ_i δοθείσης της πραγματοποίησης του γεγονότος ϵ.

Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας προσφέρει τη δυνατότητα ποιοτικής ερμηνείας του ορισμού μιας ιδιαίτερα σημαντικής για την πιθανοθεωρία γενικά και την πιθανοτική μέθοδο ειδικότερα έννοιας. Πρόκειται για τη στοχαστική ανεξαρτησία γεγονότων (independence).

Ορισμός 40 (στοχαστική ανεξαρτησία)**.** Τα γεγονότα ϵ_1, ϵ_2 καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\Pr\{\epsilon_1 \cap \epsilon_2\} = \Pr\{\epsilon_1\} \Pr\{\epsilon_2\}$$

□

Η ποιοτική ερμηνεία της έννοιας της στοχαστικής ανεξαρτησίας προκύπτει από το γεγονός ότι, αν τα γεγονότα ϵ_1, ϵ_2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε

$$\Pr\{\epsilon_1|\epsilon_2\} = \frac{\Pr\{\epsilon_1 \cap \epsilon_2\}}{\Pr\{\epsilon_2\}} = \frac{\Pr\{\epsilon_1\} \Pr\{\epsilon_2\}}{\Pr\{\epsilon_2\}} = \Pr\{\epsilon_1\}$$

και επίσης

$$\Pr\{\epsilon_2|\epsilon_1\} = \Pr\{\epsilon_2\}$$

με άλλα λόγια, η πραγματοποίηση οποιουδήποτε από τα δυο γεγονότα δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου, αφού η δεσμευμένη πιθανότητα ισούται με την εκ των προτέρων πιθανότητα. Ακολουθεί ο γενικευμένος ορισμός της στοχαστικής ανεξαρτησίας γεγονότων.

Ορισμός 41. Τα γεγονότα ϵ_i $(i \in I)$ καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν, για οποιοδήποτε $S \subseteq I$, είναι

$$\Pr\{\cap_{i \in S} \epsilon_i\} = \prod_{i \in S} \Pr\{\epsilon_i\}$$

□

Μια αρκετά χρήσιμη περίπτωση "μερικής" στοχαστικής ανεξαρτησίας είναι η "ανά$-k$" ανεξαρτησία ($k-$wise independence), κατά την οποία οποιαδήποτε k το πλήθος γεγονότα είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, δηλαδή

$$\Pr\{\cap_{i \in S, |S|=k} \epsilon_i\} = \prod_{i \in S, |S|=k} \Pr\{\epsilon_i\}$$

Τέλος, μια ιδιαίτερα σημαντική ειδική περίπτωση στοχαστικής ανεξαρτησίας είναι η ανεξαρτησία γεγονότων ανά δύο (pairwise independence).

Α΄.5 Τυχαίες μεταβλητές

Μια ιδιαίτερα σημαντική πιθανοθεωρητική έννοια είναι η έννοια της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο πείραμα. Η χρησιμότητά της οφείλεται βασικά στη δυνατότητα που προσφέρει για μια μαθηματική αντιμετώπιση του τυχαίου πειράματος και για τον υπολογισμό σημαντικών ποσοτικών παραμέτρων που το χαρακτηρίζουν.

Μια τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο δειγματοχώρο ενός τυχαίου πειράματος, που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο του δειγματοχώρου έναν αριθμό. Για παράδειγμα, κατά το ρίξιμο ενός νομίσματος 2 φορές (ο αντίστοιχος δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{$ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ$\}$, όπου το Κ συμβολίζει το αποτέλεσμα "κεφάλι" και το Γ συμβολίζει το αποτέλεσμα "γράμματα"), η τυχαία μεταβλητή X που μετράει τον αριθμό των φορών όπου το αποτέλεσμα είναι κεφάλι παίρνει τις τιμές 2,1,1 και 0 αντίστοιχα.

Μια τυχαία μεταβλητή καλείται διακριτή όταν παίρνει πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο πλήθος τιμών, ενώ λέγεται συνεχής όταν το πλήθος των τιμών της είναι μη αριθμήσιμα άπειρο. Στη συνέχεια, και εξαιτίας της εγγενούς διακριτής φύσης της πιθανοτικής μεθόδου και της Επιστήμης του Υπολογισμού γενικότερα, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας σε διακριτές τυχαίες μεταβλητές (σημειώνουμε πάντως ότι η γενίκευση των εννοιών και αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι αρκετά εύκολη).

Δυο σημαντικές έννοιες που χαρακτηρίζουν μια τυχαία μεταβλητή είναι η κατανομή πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή απλά συνάρτηση κατανομής (distribution function).

Ορισμός 42 (πυκνότητα πιθανότητας)**.** Η πυκνότητα πιθανότητας f μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μια συνάρτηση $f : R \to [0, 1]$ ορισμένη στο πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής σύμφωνα με τη σχέση

$$f(x) = \Pr\{X = x\}$$

□

Με άλλα λόγια, η πυκνότητα πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει την τιμή αυτή.

Ορισμός 43 (συνάρτηση κατανομής)**.** Η συνάρτηση κατανομής F μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$F(x) = \Pr\{X \leq x\}$$

και προκύπτει από την πυκνότητα πιθανότητας από τη σχέση

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \Pr\{X = k\} = \sum_{k \leq x} f(k)$$

□

Οι ορισμοί αυτοί επεκτείνονται εύκολα σε πολυδιάστατες κατανομές δύο ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών. Ακολουθούν οι αντίστοιχοι ορισμοί για την περίπτωση δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 44. Η από κοινού (joint) πυκνότητα πιθανότητας f των διακριτών τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από τη σχέση

$$f(x, y) = \Pr\{X = x \cap Y = y\}$$

□

Ορισμός 45. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής F των διακριτών τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από τη σχέση

$$F(x, y) = \Pr\{X \leq x \cap Y \leq y\} = \sum_{k \leq x} \sum_{l \leq y} f(k, l)$$

□

Οι έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και της στοχαστικής ανεξαρτησίας γεγονότων επεκτείνονται εύκολα σε τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 46. Η υπό συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Y ορίζεται από τη σχέση

$$f(x|y) = \Pr\{X = x|Y = y\} = \frac{\Pr\{X = x \cap Y = y\}}{\Pr\{Y = y\}} = \frac{f(x, y)}{\Pr\{Y = y\}}$$

□

Ορισμός 47. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν είναι, για όλα τα δυνατά x, y

$$f(x, y) = \Pr\{X = x\} \Pr\{Y = y\}$$

ή ισοδύναμα

$$\Pr\{X = x|Y = y\} = \Pr\{X = x\}$$

□

Α′.6 Ποσοτικοί παράμετροι κατανομών

Η ενότητα αυτή αναδεικνύει τη δυνατότητα αξιοποίησης της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής για τον ορισμό σημαντικών ποσοτικών παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τα αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος και διευκολύνουν τη συστηματική μελέτη του.

Μια τέτοια ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος είναι η μέση (mean) ή αναμενόμενη (expected) τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 48 (μέση τιμή)**.** Η μέση τιμή $E(X)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα πιθανότητας f είναι

$$E(X) = \sum_x x \Pr\{X = x\} = \sum_x x f(x)$$

□

Η σημασία της μέσης τιμής προκύπτει από το γεγονός ότι αντιπροσωπεύει το σύνολο των τιμών που παίρνει η τυχαία μεταβλητή και επομένως δίνει μια καταρχήν εικόνα για την "κεντρική τάση" των τιμών αυτών.

Ορισμένες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής είναι:

1. Αν c είναι μια οποιαδήποτε σταθερά, τότε $E(cX) = c\,E(X)$.

2. Για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές X, Y και οποιεσδήποτε σταθερές a, b είναι

   $$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

   Η ιδιαίτερα σημαντική (ακριβώς επειδή ισχύει γενικά και δεν κάνει υποθέσεις για τη στοχαστική ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών) αυτή ιδιότητα καλείται γραμμικότητα (linearity) της μέσης τιμής.

3. Αν X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

   $$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Τέλος, ορίζουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Y που αποτελεί συνάρτηση g μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 49. Εστω $Y = g(X)$. Είναι

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_x g(x) \Pr\{X = x\} = \sum_x g(x) f(x)$$

όπου f είναι η πυκνότητα πιθανότητας της X. □

Μια άλλη αξιοσημείωτη ποσότητα που χαρακτηρίζει τη διακύμανση των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση της τιμή είναι η διασπορά (variance).

Ορισμός 50 (διασπορά)**.** Η διασπορά $Var(X)$ ή σ^2 μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

□

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς καλείται τυπική απόκλιση (standard deviation) και συμβολίζεται με σ.

Ορισμένες βασικές ιδιότητες της διασποράς είναι:

1. $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
2. Για οποιαδήποτε σταθερά c, είναι $Var(c\,X) = c^2\,Var(X)$
3. Αν οι X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, τότε

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Ιδιαίτερη σημασία έχει η τυπική ή ανηγμένη τυχαία μεταβλητή X^* μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 51 (ανηγμένη τυχαία μεταβλητή)**.** Εστω η τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Η αντίστοιχη ανηγμένη τυχαία μεταβλητή X^* δίνεται από τη σχέση

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

□

Με άλλα λόγια, η ανηγμένη τυχαία μεταβλητή χαρακτηρίζει την απόκλιση των τιμών της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής από τη μέση της τιμή, μετρημένη με βάση την τυπική της απόκλιση.

Δύο σημαντικές ιδιότητες μιας οποιασδήποτε ανηγμένης τυχαίας μεταβλητής είναι ότι

$$E(X^*) = 0 \text{ και } Var(X^*) = 1$$

Η μέση τιμή και η διασπορά αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας των ροπών μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 52 (ροπές)**.** Εστω X μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ. Καλούμε ροπή τάξης r περί την αρχή ($r-$th moment) και συμβολίζουμε με m^r την ποσότητα

$$m^r = E(X^r)$$

ενώ καλούμε κεντρική ροπή ή ροπή περί τη μέση τιμή τάξης r ($r-$th central moment) και συμβολίζουμε με μ^r την ποσότητα

$$\mu^r = E((X - E(X))^r)$$

όπου $r = 1, 2, \ldots$ □

Είναι φανερό ότι η μέση τιμή αποτελεί τη ροπή 1ης τάξης περί την αρχή, ενώ η διασπορά είναι η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης.

Δύο ιδιαίτερα ισχυρές παράμετροι μιας τυχαίας μεταβλητής που διευκολύνουν σημαντικά τη μελέτη της (και ειδικότερα τον υπολογισμό των ροπών της) είναι η πιθανογεννήτρια και η ροπογεννήτρια.

Ορισμός 53 (πιθανογεννήτρια)**.** Εστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και πυκνότητα πιθανότητας f. Καλούμε πιθανογεννήτρια (probability generating function) της X την ποσότητα

$$G(z) = E\left(z^X\right) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x f(x)$$

□

Η σημασία της πιθανογεννήτριας για τον υπολογισμό των ροπών μιας τυχαίας μεταβλητής προκύπτει (μερικά) από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 79. Εστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και έστω $G(z)$ η πιθανογεννήτριά της. Είναι

1. $G'(1) = E(X)$
2. $G"(1) + G'(1) = E(X^2)$
3. $G"(1) + G'(1) - G'(1)^2 = Var(X)$

όπου με $G', G"$ συμβολίζουμε τις παραγώγους 1ης και 2ης τάξης της G, αντίστοιχα. □

Μια σημαντική ιδιότητα της ποσότητας αυτής είναι ότι η πιθανογεννήτρια ενός αθροίσματος στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των πιθανογεννητριών αυτών των επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 80. Εστω $X_1, \ldots, X_k$ στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έστω $G_1(z), \ldots, G_k(z)$ οι πιθανογεννήτριές τους, αντίστοιχα. Η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $Y = X_1 + \cdots + X_k$ είναι

$$G(z) = \prod_{i=1}^{k} G_i(z)$$

□

Ιδιαίτερα χρήσιμη (και περισσότερο γενική, ακριβώς επειδή δεν υποθέτει ακέραιες τιμές για τη μεταβλητή) είναι επίσης η έννοια της ροπογεννήτριας μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 54 (ροπογεννήτρια)**.** Εστω X μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας f. Καλούμε ροπογεννήτρια (moment generating function) της X την ποσότητα

$$M(z) = E\left(e^{zX}\right) = \sum_{x} e^{zx} f(x)$$

□

Το ακόλουθο θεώρημα προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού των ροπών περί την αρχή μιας τυχαίας μεταβλητής με βάση τις τιμές των παραγώγων της ροπογεννήτριάς της στο 0.

Θεώρημα 81. Εστω $M(z)$ η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X. Είναι

$$E\left(X^k\right) = M^{(k)}(z)|_{z=0}$$

όπου $M^{(k)}$ είναι η $k-$οστή παράγωγος της M. □

Τέλος, το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι η ροπογεννήτρια ενός αθροίσματος στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των ροπογεννητριών αυτών των επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 82. Εστω $X_1, \ldots, X_k$ στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έστω $M_1(z), \ldots, M_k(z)$ οι ροπογεννήτριές τους, αντίστοιχα. Η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $Y = X_1 + \cdots + X_k$ είναι

$$M(z) = \prod_{i=1}^{k} M_i(z)$$

□

Α΄.7 Ορισμένες βασικές κατανομές

Στην τελευταία ενότητα αυτού του παραρτήματος παρουσιάζουμε ορισμένες βασικές κατανομές που εμφανίζονται στις περισσότερες από τις εφαρμογές τις οποίες μελετήσαμε στα πλαίσια αυτού του βιβλίου. Επίσης, παραθέτουμε για κάθε κατανομή τη μέση της τιμή, τη διασπορά και την πιθανογεννήτριά της.

Η κατανομή Bernoulli: Πρόκειται για την κατανομή που περιγράφει το ρίξιμο ενός νομίσματος, όπου το αποτέλεσμα "κεφάλι" έχει πιθανότητα p και το αποτέλεσμα "γράμματα" έχει πιθανότητα $q = 1 - p$. Εστω X μια (δεικνύουσα) τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 (0) αν το αποτέλεσμα είναι κεφάλι (γράμματα). Λέμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p και πυκνότητα πιθανότητας f, έτσι ώστε $f(1) = p$ και $f(0) = q = 1 - p$. Είναι $E(X) = p, Var(X) = pq$ και $G(z) = q + pz$.

Η διωνυμική κατανομή: Εστω $X_1, \ldots, X_n$ στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που όλες ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p. Η τυχαία μεταβλητή $X = X_1 + \cdots + X_n$ προφανώς μετράει τον αριθμό των αποτελεσμάτων που ήταν κεφάλι σε n ρίψεις ενός νομίσματος και λέμε ότι ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (binomial distribution) με παραμέτρους n και p. Η πυκνότητα πιθανότητας $b(k; n, p)$ δίνεται (για οποιονδήποτε ακέραιο k από 1 έως n από τη σχέση

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Επίσης, είναι $E(X) = np, Var(X) = npq$ και $G(z) = (q + pz)^n$.

Η γεωμετρική κατανομή: Εστω X μια τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των ρίψεων ενός νομίσματος (που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p) μέχρι να εμφανιστεί ένα αποτέλεσμα που είναι κεφάλι για πρώτη φορά. Λέμε ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p ενώ έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = q^{x-1}p$$

για $x = 1, 2, \ldots$ και $f(x) = 0$ διαφορετικά. Η X έχει μέση τιμή $1/p$, διασπορά q/p^2 και και πιθανογεννήτρια $pz/(1 - qz)$.

Η κατανομή Poisson: Μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

για $x = 0, 1, 2, \ldots$ και $f(x) = 0$ διαφορετικά, ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Μια σημαντική ιδιότητα της κατανομής αυτής είναι το ότι η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται (στην περίπτωση όπου το n είναι μεγάλο και η p είναι μικρή) από την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np$. Επίσης, είναι $E(X) = Var(X) = \lambda$ και $G(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

Η κανονική κατανομή: Η κανονική κατανομή (normal distribution) ή κατανομή Gauss αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές κατανομές πιθανότητας. Πρόκειται για μια συνεχή κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 και πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Εξίσου σημαντική είναι η αντίστοιχη ανηγμένη κατανομή που περιγράφεται από τη μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

όπου η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2. Η ιδιαίτερη σημασία της ανηγμένης κανονικής κατανομής οφείλεται στο ότι η κατανομή αυτή αποτελεί ικανοποιητική ασυμπτωτική προσέγγιση αρκετών άλλων κατανομών:

- της διωνυμικής, όταν το n είναι μεγάλο και η p είναι μακριά τόσο από το 0 όσο και από το 1.
- της κατανομής Poisson, όταν $\lambda \to \infty$.
- οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής που αποτελεί άθροισμα στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδια μέση τιμή και διασπορά, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (βλέπε ενότητα 4.5, Θεώρημα 35).

Η ομοιόμορφη κατανομή: Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X καλείται ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a, b]$, αν η πυκνότητα πιθανότητά της είναι

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

για $a \leq x \leq b$ και $f(x) = 0$ διαφορετικά. Είναι $E(X) = (a+b)/2$ και $Var(X) = (b-a)^2/12$.

Παράρτημα Β΄

Θεωρία Γράφων

Β΄.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Στα 1736 ο μεγάλος μαθηματικός L. Euler πέτυχε την επίλυση ενός από τα γνωστότερα ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα της εποχής του: του προβλήματος των γεφυρών του Königsberg. Το πρόβλημα αυτό αφορούσε σε δύο νησίδες του ποταμού Pregel σε ένα πάρκο της πόλης Königsberg, οι οποίες ήταν συνδεδεμένες μεταξύ τους και με τις δύο όχθες του ποταμού με επτά γέφυρες συνολικά, ενώ το ερώτημα είχε ως εξής: μπορεί κανείς, ξεκινώντας από οποιοδήποτε από τα τέσσερα τμήματα εδάφους (τις δύο νησίδες και τις δύο όχθες) να επιστρέψει στο τμήμα από το οποίο ξεκίνησε, περνώντας από όλες τις γέφυρες μία μοναδική φορά από την καθεμιά;

Ολες οι προσπάθειες εξαντλητικής επίλυσης του προβλήματος (μέσω πολυάριθμων δοκιμών δυνατών διαδρομών) οδηγούνταν σε αποτυχία εύρεσης μιας επιθυμητής διαδρομής. Το γεγονός αυτό, αν και προσέφερε μια καταρχήν ένδειξη για τη μη ύπαρξη μιας τέτοιας διαδρομής, δεν αποτελούσε ακόμα επίλυση του προβλήματος.

Ο Euler, παρακάμπτοντας αυτήν την ατέρμονη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος με εξαντλητικό τρόπο, το αντιμετώπισε στην κατεύθυνση μιας αυστηρότερης, μαθηματικής διατύπωσής του και επινόησε για αυτό το λόγο ένα νέο αφαιρετικό μοντέλο αναπαράστασης: αντιστοίχισε σε κάθε ένα από τα τέσσερα τμήματα εδάφους ένα σημείο και σε κάθε μία από τις επτά γέφυρες μία γραμμή μεταξύ των σημείων που αντιστοιχούν στα τμήματα εδάφους που συνδέει η γέφυρα.

Με αυτόν τον τρόπο, ο Euler όρισε για πρώτη φορά στην ιστορία έναν γράφο (graph) και παρατηρώντας πως το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg ισοδυναμεί με τη δυνατότητα ή όχι διαπέρασης όλων των γραμμών του γράφου αυτού με έναν συγκεκριμένο τρόπο, απέδειξε τη μη ύπαρξη μιας τέτοιας διαδρομής και έλυσε το πρόβλημα παρέχοντας μια αρνητική απάντηση σε αυτό. Επίσης, απέδειξε ένα γενικό κριτήριο για το πρόβλημα της διαπέρασης όλων των γραμμών ενός οποιουδήποτε γράφου περνώντας μία μοναδική φορά από κάθε γραμμή του και επιστρέφοντας στην κορυφή εκκίνησης: αρκεί ο γράφος να είναι συνεκτικός (να μπορεί δηλαδή κανείς να κινηθεί, ακολουθώντας τις γραμμές του γράφου, ανάμεσα σε δυο οποιαδήποτε σημεία του) και ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από οποιοδήποτε σημείο να είναι άρτιος.

Μετά από αυτήν την πρωτοποριακή ιδέα θεμελίωσης της έννοιας του γράφου από τον Euler, η θεωρία γράφων αναπτύχθηκε πολύπλευρα. Σημαντική σε αυτήν την κατεύθυνση υπήρξε η συνεισφορά του G. Kirchhoff ([38]) που στα 1847 ανέπτυξε παραπέρα τη θεωρία αυτή χρησιμοποιώντας την κατά την επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Επίσης, στα 1857 ο A. Cayley ([11]) ανακάλυψε μια ειδική σημαντική κατηγορία γράφων που καλούνται δέντρα, τα οποία και χρησιμοποίησε κατά την αναπαράσταση και απαρίθμηση των ισομερών κορεσμένων υδρογονανθράκων και άλλων οργανικών ενώσεων.

Στις μέρες μας, η θεωρία γράφων αποτελεί ήδη μια καθιερωμένη, σημαντική περιοχή της Επιστήμης των Μαθηματικών, με πολυάριθμες εφαρμογές στη φυσική και τη χημεία, την αρχιτεκτονική, στην ψυχολογία και την κοινωνιολογία, στην οικονομία και τη γλωσσολογία. Ιδιαίτερη ώθηση σε αυτήν την πραγματικά αλματώδη ανάπτυξη της γραφοθεωρίας έδωσε η εκτεταμένη χρησιμοποίησή της στην Επιστήμη του Υπολογισμού που οφείλεται βασικά στη δυνατότητα της έννοιας του γράφου να αναπαριστά αφαιρετικά τους κόμβους και τις συνδέσεις υπολογιστικών συστημάτων (και ιδιαίτερα δικτύων υπολογιστών) από σημεία και γραμμές μεταξύ των σημείων, αντίστοιχα.

Τέλος, χρειάζεται να σταθούμε με έμφαση στην περισσότερο πρόσφατη αν και ιδιαίτερα πλούσια θεωρία τυχαίων γράφων: σε έναν τυχαίο γράφο, κάθε γραμμή υπάρχει όχι ντετερμινιστικά, όπως στους απλούς γράφους, αλλά με ορισμένη πιθανότητα. Η ιδιαίτερη πρακτική σημασία της θεωρίας τυχαίων γράφων οφείλεται βασικά στη δυνατότητα χρησιμοποίησής τους κατά την ανάλυση ζητημάτων αξιοπιστίας και ανοχής σε λάθη δικτύων υπολογιστών, που προσφέρει αυτή ακριβώς η πιθανοτική τους φύση. Η μελέτη των τυχαίων γράφων, τόσο από τη σκοπιά αποδείξεων ύπαρξης συγκεκριμένων ιδιοτήτων όσο και από τη σκοπιά του σχεδιασμού και της ανάλυσης πιθανοτικών αλγόριθμων, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα της πιθανοτικής μεθόδου.

Β′.2 Βασικοί ορισμοί

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε μερικούς θεμελιώδεις ορισμούς βασικών γραφοθεωρητικών εννοιών, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των περισσότερο σύνθετων εννοιών που παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες του παραρτήματος αυτού. Ακολουθεί ο ορισμός της έννοιας του γράφου.

Ορισμός 55. Ενας γράφος G αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών $V = V(G)$ με n κορυφές ή σημεία (vertices, points) και ένα σύνολο $E = E(G)$ με m μη διατεταγμένα ζεύγη διακεκριμένων κορυφών του V. □

Κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος $e = \{u, v\}$ καλείται ακμή ή γραμμή (edge, line) και λέμε ότι συνδέει (connects) τις κορυφές u, v. Επίσης, καλούμε την ακμή e γειτονική (adjacent) με τις u και v.

Δύο γενικότερες, παραλλαγμένες εκδοχές του παραπάνω ορισμού ενός απλού γράφου επιτρέπουν την ύπαρξη βρόγχων (loops), δηλαδή ακμών που συνδέουν μια κορυφή με τον εαυτό της, όπως επίσης την ύπαρξη περισσότερων της μίας (δηλαδή πολλαπλών) ακμών μεταξύ δυο συγκεκριμένων κορυφών. Ακολουθεί ο ορισμός ενός πολυγράφου.

Ορισμός 56 (πολυγράφος)**.** Ενας γράφος με δυνατότητα πολλαπλών ακμών αλλά χωρίς βρόγχους καλείται πολυγράφος (multigraph). □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια δεύτερη παραλλαγή του βασικού ορισμού ενός γράφου, τον ψευδογράφο.

Ορισμός 57 (ψευδογράφος)**.** Ενας γράφος στον οποίο επιτρέπεται η ύπαρξη πολλαπλών ακμών και βρόγχων καλείται ψευδογράφος (pseudograph). □

Ιδιαίτερα σημαντική είναι επίσης η έννοια του κατευθυνόμενου (ή διευθυνόμενου) γράφου, του οποίου ο ορισμός ακολουθεί.

Ορισμός 58 (κατευθυνόμενος γράφος)**.** Αν οι δυο κορυφές που συναποτελούν κάθε μια ακμή ενός γράφου θεωρούνται διατεταγμένες (ordered), ο γράφος καλείται κατευθυνόμενος (directed). □

Ο επόμενος ορισμός αφορά στην έννοια του βαθμού (degree) μιας κορυφής σε έναν γράφο.

Ορισμός 59 (βαθμός κορυφής)**.** Ο αριθμός των ακμών που γειτνιάζουν με μια κορυφή u καλείται βαθμός της κορυφής αυτής και συμβολίζεται με $d(u)$. □

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (στην πραγματικότητα, πρόκειται για το πρώτο, ιστορικά, θεώρημα της γραφοθεωρίας και οφείλεται στον Euler, [24]) το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 83. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γράφου ισούται με $2m$, όπου m είναι ο αριθμός των ακμών του γράφου. □

Συνήθως συμβολίζουμε με $\delta(G)$ το μικρότερο βαθμό σε έναν γράφο και με $\Delta(G)$ το μεγαλύτερο.

Ο ορισμός του βαθμού των κορυφών ενός γράφου προσφέρει τη δυνατότητα ορισμού της ιδιαίτερα σημαντικής έννοιας της κανονικότητας (regularity).

Ορισμός 60 (κανονικότητα)**.** Ενας γράφος όπου οι βαθμοί όλων των κορυφών είναι ίσοι (έστω r) καλείται κανονικός (regular) βαθμού r ή $r-$κανονικός. □

Ακολουθεί επίσης ο ορισμός ενός πλήρους γράφου, που καλείται συχνά κλίκα (clique).

Ορισμός 61 (πλήρης γράφος)**.** Ενας γράφος n κορυφών που περιέχει όλες τις $\binom{n}{2}$ δυνατές ακμές καλείται πλήρης (complete) και συμβολίζεται με K_n. □

Προφανώς, ο πλήρης γράφος K_n είναι κανονικός με βαθμό $n-1$.

Ενας γράφος $G'(V', E')$ καλείται υπογράφος (subgraph) ενός γράφου $G(V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο G καλείται υπεργράφος (supergraph) του G'. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η έννοια ενός γεννητικού υπογράφου, ο ορισμός του οποίου ακολουθεί.

Ορισμός 62 (γεννητικός υπογράφος)**.** Ενας υπογράφος του G που περιέχει όλες τις κορυφές του καλείται γεννητικός υπογράφος (spanning subgraph). □

Επίσης, ένας μέγιστος πλήρης υπογράφος καλείται κλίκα (clique).

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες της γραφοθεωρίας είναι ο ισομορφισμός (isomorphism), μια σχέση ανάμεσα σε γράφους η οποία προσδιορίζει το αν δυο γράφοι είναι βασικά (και ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη μορφή με την οποία σχεδιάζονται στο επίπεδο) ίδιοι.

Ορισμός 63 (ισομορφισμός). Καλούμε δυο γράφους G_1, G_2 ισόμορφους (isomorphic) και συμβολίζουμε με $G_1 \cong G_2$, αν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών των δυο γράφων, η οποία να διατηρεί τις σχέσεις γειτονικότητάς τους. $\square$

Προφανώς, ο ισομορφισμός γράφων αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation).

Τέλος, μια έννοια που συναντήσαμε αρκετά συχνά σε αυτό το βιβλίο είναι η συμπληρωματικότητα γράφων.

Ορισμός 64 (συμπληρωματικός γράφος). Ενας γράφος $\overline{G}$ καλείται συμπληρωματικός (complementary graph) ενός γράφου G αν έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με τον G και περιέχει μια ακμή μεταξύ δυο οποιωνδήποτε κορυφών του αν και μόνο αν η ακμή αυτή δεν περιέχεται στον G. $\square$

Β΄.3 Συνεκτικότητα, κύκλοι, δέντρα

Οπλισμένοι με τους βασικούς ορισμούς που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να προχωρήσουμε σε περισσότερο σύνθετες γραφοθεωρητικές έννοιες. Ξεκινάμε με μια σειρά από ορισμούς που σχετίζονται με την έννοια της συνεκτικότητας (connectivity).

Ορισμός 65 (μονοπάτι). Καλούμε μονοπάτι (path) ενός γράφου μια οποιαδήποτε ακολουθία διακεκριμένων κορυφών του (προφανώς, οι ακμές που ορίζονται από τις διαδοχικές διακεκριμένες κορυφές ενός μονοπατιού είναι διακεκριμένες επίσης). $\square$

Ο αριθμός των ακμών σε ένα μονοπάτι καλείται μήκος (length) του μονοπατιού. Με βάση τους ορισμούς ενός μονοπατιού και του μήκους του, ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δυο κορυφών, όπως επίσης και τη διάμετρο ενός γράφου.

Ορισμός 66 (απόσταση κορυφών). Καλούμε απόσταση (distance) $d(u, v)$ δυο κορυφών u, v το μήκος ενός οποιουδήποτε συντομότερου μονοπατιού που συνδέει τις κορυφές αυτές. $\square$

Ορισμός 67 (διάμετρος γράφου). Καλούμε διάμετρο (diameter) $diam(G)$ ενός γράφου G το μήκος ενός μεγαλύτερου από όλα τα συντομότερα μονοπάτια (shortest paths) που συνδέουν κορυφές του G, με άλλα λόγια είναι

$$diam(G) = \max_{u,v \in G} d(u, v)$$

$\square$

Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός της σημαντικότερης ίσως (τόσο από πρακτική όσο και από θεωρητική άποψη) έννοιας της γραφοθεωρίας: της συνεκτικότητας.

Ορισμός 68 (συνεκτικότητα)**.** Ενας γράφος που περιέχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι μεταξύ δυο οποιωνδήποτε κορυφών του καλείται συνεκτικός (connected). □

Ενας γράφος ο οποίος δεν είναι συνεκτικός στο σύνολό του, είναι δυνατό να περιέχει επιμέρους συνεκτικά τμήματα, η ύπαρξη των οποίων έχει επίσης μεγάλη σημασία.

Ορισμός 69 (συνεκτική συνιστώσα)**.** Ενας μέγιστος συνεκτικός υπογράφος ενός γράφου καλείται συνεκτική συνιστώσα (connected component) του γράφου. □

Επίσης, καλούμε μια κορυφή ενός γράφου κορυφή αποκοπής (cutpoint), αν η αφαίρεσή της (δηλαδή η διαγραφή από το γράφο τόσο της ίδιας της κορυφής όσο και των γειτονικών της ακμών) αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γράφου. Επομένως, η αφαίρεση μιας κορυφής αποκοπής από έναν συνεκτικό γράφο καθιστά το γράφο μη συνεκτικό. Αντίστοιχα, μια ακμή αποτελεί ακμή αποκοπής (ή "γέφυρα", bridge) ενός γράφου, αν η αφαίρεσή της συνεπάγεται την αύξηση των συνεκτικών συνιστωσών του γράφου.

Δυο έννοιες που δίνουν τη δυνατότητα προσδιορισμού του "βαθμού" συνεκτικότητας ενός γράφου είναι η συνεκτικότητα κορυφών (vertex connectivity) και η συνεκτικότητα ακμών (edge connectivity).

Ορισμός 70 (βαθμοί συνεκτικότητας)**.** Ενας γράφος έχει συνεκτικότητα κορυφών κ (ή αλλιώς είναι, ως προς τις κορυφές, $\kappa-$συνεκτικός) αν ο ελάχιστος αριθμός κορυφών των οποίων η αφαίρεση απαιτείται για να καταστεί ο γράφος μη συνεκτικός είναι κ. Αντίστοιχα, καλούμε έναν γράφο $\lambda-$συνεκτικό ως προς τις ακμές, αν λ είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών των οποίων η αφαίρεση είναι αναγκαία για την άρση της συνεκτικότητάς του. □

Μια άλλη έννοια με μεγάλη σημασία για τη θεωρία γράφων είναι η έννοια του κύκλου.

Ορισμός 71 (κύκλος)**.** Καλούμε κύκλο (cycle) μια ακολουθία τεσσάρων τουλάχιστον κορυφών $u_1, \ldots, u_l, u_1$ που είναι διακεκριμένες, εκτός από την πρώτη και την τελευταία. □

Επίσης, καλούμε μήκος του κύκλου τον αριθμό l των διακεκριμένων κορυφών (και επομένως τον αριθμό των ακμών) που περιέχει. Ενας κύκλος μήκους 3 καλείται τρίγωνο (triangle).

Μια αρκετά σημαντική (ιδιαίτερα για την Επιστήμη του Υπολογισμού) ειδική περίπτωση γράφου είναι το δέντρο (tree).

Ορισμός 72 (δέντρο)**.** Καλούμε δέντρο έναν γράφο που είναι συνεκτικός και δεν περιέχει κύκλους. □

Επίσης καλούμε δάσος (forest) έναν οποιοδήποτε γράφο χωρίς κύκλους. Είναι φανερό πως οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους αποτελούν δέντρα. Μια σημαντική ιδιότητα ενός δέντρου (που αποτελεί ταυτόχρονα ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας γράφος δέντρο) δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 84. Ενας γράφος είναι δέντρο αν και μόνο αν οποιεσδήποτε δυο κορυφές του συνδέονται με ένα μοναδικό μονοπάτι. □

Επίσης, αποδεικνύεται εύκολα ότι ένα οποιοδήποτε δέντρο με τουλάχιστον δυο κορυφές έχει τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού 1. Τέτοιες κορυφές με βαθμό 1 καλούνται φύλλα (leaves) του δέντρου.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα με τον ορισμό και ένα θεώρημα για διμελείς γράφους.

Ορισμός 73 (διμελής γράφος)**.** Καλούμε έναν γράφο διμελή (bipartite) αν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμοιραστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα V_1, V_2 έτσι ώστε οποιαδήποτε ακμή του γράφου να συνδέει υποχρεωτικά μια κορυφή του V_1 με μια κορυφή του V_2. □

Η ακόλουθη συνθήκη είναι ταυτόχρονα ικανή και αναγκαία για να είναι ένας γράφος διμελής.

Θεώρημα 85. Ενας γράφος είναι διμελής αν και μόνο αν οι όποιοι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος. □

Β′.4 Διαπερασιμότητα γράφων

Οι ιδιότητες διαπερασιμότητας (traversability) ενός γράφου, που αφορούν στην ύπαρξη ή όχι ενός (συγκεκριμένου) τρόπου για να διατρέξει κανείς όλες τις ακμές ή όλες τις κορυφές του γράφου, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και σημαντικές, με πολλές θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές.

Ορισμός 74 (διαπερασιμότητα κατά Euler)**.** Καλούμε έναν γράφο διαπερατό κατά Euler (eulerian) αν υπάρχει τρόπος να διατρέξει κανείς το γράφο περνώντας από όλες τις ακμές του μία μοναδική φορά από κάθε ακμή και επιστρέφοντας τελικά στην κορυφή εκκίνησης της ακολουθούμενης διαδρομής. Μια τέτοια διαδρομή καλείται περίπατος Euler (eulerian walk). □

Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, στο οποίο αναφερθήκαμε στην εισαγωγική ενότητα αυτού του παραρτήματος, συνίσταται στην εύρεση ενός περίπατου Euler στο συγκεκριμένο (πολυ)γράφο τεσσάρων κορυφών και επτά ακμών. Οπως ήδη αναφέραμε, αποδεικνύεται ότι ο γράφος των γεφυρών του Königsberg δεν είναι διαπερατός κατά Euler. Πραγματικά, μπορεί να αποδειχτεί η ακόλουθη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη περιπάτων Euler σε έναν γράφο:

Θεώρημα 86. Ενας γράφος είναι διαπερατός κατά Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό. □

Η μη διαπερασιμότητα κατά Euler του γράφου των γεφυρών του Königsberg οφείλεται ακριβώς στην ύπαρξη κορυφών με περιττό βαθμό.

Αντίθετα, δεν υπάρχουν εξίσου απλές συνθήκες που να είναι (ταυτόχρονα) ικανές και αναγκαίες για το άλλο πρόβλημα διαπερασιμότητας ενός γράφου: τη διαπερασιμότητα κατά Hamilton.

Ορισμός 75 (διαπερασιμότητα κατά Hamilton)**.** Καλούμε έναν γράφο διαπερατό κατά Hamilton (ή Hamiltonian) αν και μόνο αν υπάρχει διαδρομή που περνάει από όλες τις κορυφές του γράφου μία μοναδική φορά από κάθε κορυφή και επιστρέφει τελικά στην κορυφή από την οποία ξεκίνησε. □

Μια τέτοια διαδρομή αποτελεί προφανώς έναν γεννητικό κύκλο (spanning cycle) και καλείται κύκλος Hamilton. Επίσης, είναι χαρακτηριστικό ότι τα προβλήματα της αναγνώρισης της ιδιότητας της διαπερασιμότητας κατά Hamilton ενός γράφου και της εύρεσης ενός κύκλου Hamilton (στην περίπτωση όπου ένας τέτοιος κύκλος υπάρχει) είναι, από τη σκοπιά της θεωρίας της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, δύσκολα ("hard") προβλήματα. Το γεγονός αυτό σχετίζεται άμεσα με την προαναφερθείσα μη ύπαρξη απλών ικανών και αναγκαίων συνθηκών για τη διαπερασιμότητα κατά Hamilton.

B′.5 Ανεξαρτησία, ταιριάσματα και χρωματισμοί

Στην τελευταία ενότητα του παραρτήματος αυτού παρουσιάζουμε τρεις ιδιαίτερα σημαντικές γραφοθεωρητικές έννοιες, οι οποίες μάλιστα είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους: τις έννοιες της ανεξαρτησίας, του χρωματισμού και των ταιριασμάτων των κορυφών ενός γράφου.

Ορισμός 76 (ανεξαρτησία κορυφών)**.** Ενα υποσύνολο από κορυφές ενός γράφου αποτελεί σύνολο ανεξαρτησίας (independent set) του γράφου αν οι κορυφές που περιέχονται σε αυτό είναι ανά δύο μη γειτονικές (non-adjacent), οπότε και καλούνται ανεξάρτητες. □

Ο πληθικός αριθμός ενός μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας ενός γράφου καλείται βαθμός ανεξαρτησίας του γράφου και συνήθως συμβολίζεται με β_0.

Αντίστοιχα, καλούμε ορισμένες ακμές ανεξάρτητες αν είναι ανά δύο μη γειτονικές, αν δηλαδή δεν συνδέουν κοινές κορυφές. Η ανεξαρτησία ακμών προσφέρει τη δυνατότητα ορισμού της έννοιας του ταιριάσματος κορυφών ενός γράφου.

Ορισμός 77. Ενα σύνολο από ανεξάρτητες ακμές ενός γράφου καλείται ταίριασμα (matching). □

Ο σχετικός όρος εξηγείται από την άποψη ότι ένα ταίριασμα αποτελεί "ζευγάρωμα" των δύο κορυφών κάθε μιας ακμής που περιέχεται σε αυτό, όπου κάθε κορυφή συνδέεται (ακριβώς λόγω της ανεξαρτησίας) με μία μοναδική άλλη κορυφή. Ειδικότερα, ένα ταίριασμα καλείται πλήρες ή τέλειο (perfect), αν συμπεριλαμβάνει όλες τις κορυφές του γράφου.

Μια ιδιαίτερα σημαντική γραφοθεωρητική έννοια είναι ο χρωματικός αριθμός (chromatic number) ενός γράφου.

Ορισμός 78. Καλούμε χρωματισμό (coloring) ενός γράφου την ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του έτσι ώστε δυο οποιεσδήποτε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται διαφορετικά. Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό ενός γράφου καλείται χρωματικός αριθμός του γράφου και συμβολίζεται με $\chi(G)$. □

Προφανώς, υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στις έννοιες της ανεξαρτησίας κορυφών και του χρωματικού αριθμού, αφού οι κορυφές ενός συνόλου ανεξαρτησίας είναι δυνατό να χρωματιστούν με τον πλέον "οικονομικό" τρόπο χρησιμοποιώντας ένα μόνο χρώμα. Η στενή αυτή αλληλεξάρτηση ανάμεσα στις δύο αυτές έννοιες συμπυκνώνεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{n}{\beta_0} \leq \chi \leq n - \beta_0 + 1$$

όπου n, β_0 και χ είναι αντίστοιχα ο αριθμός των κορυφών, ο βαθμός ανεξαρτησίας και ο χρωματικός αριθμός ενός οποιουδήποτε γράφου.

Παράρτημα Γ′

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Γ′.1 Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί

Οπως αναφέραμε επανειλημμένα, η ασυμπτωτική συμπεριφορά ορισμένων συναρτήσεων (π.χ. της πολυπλοκότητας χρόνου ενός αλγόριθμου, της συνάρτησης κατωφλίου για την εμφάνιση μιας ιδιότητας σε τυχαίους γράφους) έχει ιδιαίτερη σημασία για την Επιστήμη του Υπολογισμού και ειδικότερα για την πιθανοτική μέθοδο.

Η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς τέτοιων συναρτήσεων έχει βασικά διπλό χαρακτήρα:

- προσδιορίζεται η συμπεριφορά της συνάρτησης για μεγάλες τιμές της ελεύθερης μεταβλητής ή και όταν η μεταβλητή τείνει στο άπειρο. Με αυτήν την έννοια, διερευνάται η "οριακή" συμπεριφορά της συνάρτησης.

- σε περιπτώσεις όπου είτε δεν υπάρχει (π.χ. όταν η συνάρτηση δεν οδηγεί σε κλειστή μορφή, closed form) είτε δεν είναι απαραίτητος ένας ακριβής υπολογισμός της συνάρτησης, η μελέτη της ασυμπτωτικής της συμπεριφοράς προσφέρει ικανοποιητικές εκτιμήσεις (ειδικότερα ως προς την τάξη μεγέθους, order of magnitude) για τις ακριβείς τιμές της συνάρτησης.

Ενα σημαντικό μέσο για την περιγραφή αυτής της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης είναι οι ασυμπτωτικοί συμβολισμοί (asymptotic notations).

Ο πρώτος από αυτούς τους συμβολισμούς προτάθηκε στα 1894 από τον Paul Bachmann ([6]), ωστόσο η ευρύτατη χρησιμοποίησή του στις μέρες μας οφείλεται βασικά στον Edmund Landau ([42]). Πρόκειται για τον $O-$συμβολισμό (στην αγγλική διαβάζεται Big Oh notation).

Ορισμός 79 ($O-$συμβολισμός)**.** Εστω $f(n), g(n)$ συναρτήσεις μεταξύ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Είναι

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, N : \forall n \geq N,\ f(n) \leq c\, g(n)$$

όπου c, N είναι θετικές σταθερές. □

Με άλλα λόγια, ο συμβολισμός $f(n) = O(g(n))$ σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι, ως προς την τάξη μεγέθους, το πολύ ίση με $g(n)$. Για παράδειγμα, είναι

$$f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{5}n^2 + \frac{1}{4}n \leq \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{5}n^3 + \frac{1}{4}n^3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)n^3$$

οπότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό και για $c = (1/3)+(1/5)+(1/4)$, είναι $f(n) = O(n^3)$.

Η, κατά κάποιον τρόπο, αντίστροφη σχέση περιγράφεται με τον $\Omega-$συμβολισμό (Big Omega notation).

Ορισμός 80 ($\Omega-$συμβολισμός)**.** Εστω $f(n), g(n)$ συναρτήσεις μεταξύ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Είναι

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, N : \forall n \geq N,\ f(n) \geq c\, g(n)$$

όπου c, N είναι θετικές σταθερές. □

Ο αντίστροφος χαρακτήρας του συμβολισμού αυτού σε σχέση με τον προηγούμενό του, προκύπτει από το ότι ο συμβολισμός $f(n) = \Omega(g(n))$ σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι, ως προς την τάξη μεγέθους, τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο και η $g(n)$. Είναι φανερό επίσης, ότι $f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n) = \Omega(f(n))$.

Συνδυάζοντας τους δυο αυτούς συμβολισμούς (που φράσσουν εκ των άνω και από τα κάτω, αντίστοιχα, μια συνάρτηση) προκύπτει ένας τρίτος συμβολισμός που καλείται $\Theta-$συμβολισμός (Big Theta notation) και προσδιορίζει την ακριβή τάξη μεγέθους μιας συνάρτησης.

Ορισμός 81 ($\Theta-$συμβολισμός)**.** Εστω $f(n), g(n)$ συναρτήσεις μεταξύ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Είναι

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \text{ και } g(n) = O(f(n))$$

□

Μια άλλη σημαντική σχέση μεταξύ συναρτήσεων, κατά την οποία η πρώτη συνάρτηση είναι ασυμπτωτικά μικρότερη από τη δεύτερη, δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 82 ($o-$συμβολισμός)**.** Εστω $f(n), g(n)$ συναρτήσεις μεταξύ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Είναι

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

□

Τέλος, η σχέση $\sim$ συνδέει συναρτήσεις που είναι, από τη σκοπιά της ασυμπτωτικής ανάλυσης, ίσες.

Ορισμός 83. Εστω $f(n), g(n)$ συναρτήσεις μεταξύ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Είναι

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

□

Στην περίπτωση αυτή είναι επίσης $f(n) = g(n) + o(g(n))$.

Γ΄.2 Βασικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή (και έχοντας προηγουμένως συζητήσει την έννοια των ασυμπτωτικών συμβολισμών) παρουσιάζουμε ορισμένες βασικές σχέσεις που αποδεικνύονται εξαιρετικά χρήσιμες κατά την ασυμπτωτική προσέγγιση και τον υπολογισμό άνω και κάτω φραγμάτων για τις εξεταζόμενες συναρτήσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Επιστήμη του Υπολογισμού γενικά και την πιθανοτική μέθοδο ειδικότερα, έχει η εφαρμογή τέτοιων σχέσεων σε διωνυμικούς συντελεστές (binomial coefficients). Η συνδυαστική (combinatorial) φύση των εξεταζόμενων προβλημάτων οδηγεί πολύ συχνά κατά την ανάλυση στην εμφάνιση των αριθμών αυτών, γεγονός που εξηγεί την ιδιαίτερη σημασία της δυνατότητας ικανοποιητικού χειρισμού σχέσεων που περιλαμβάνουν διωνυμικούς συντελεστές. Κρίνουμε επομένως σκόπιμο να ξεκινήσουμε αυτήν την ενότητα ορίζοντας τους αριθμούς αυτούς με βάση το διωνυμικό θεώρημα (binomial theorem), το οποίο άλλωστε συμπυκνώνει το συνδυαστικό χαρακτήρα και εξηγεί την ονομασία των διωνυμικών συντελεστών.

Θεώρημα 87 (Διωνυμικό Θεώρημα)**.** Καλούμε διωνυμικούς συντελεστές και συμβολίζουμε με $\binom{n}{k}$ τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος (binomial expansion), το οποίο περιγράφεται από τη σχέση

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και n είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. □

Ο συνήθης τρόπος υπολογισμού ενός διωνυμικού συντελεστή δίνεται από τον τύπο

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

αλλά είναι αρκετά περιοριστικός, αφού προϋποθέτει ότι οι n, k είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n \geq k \geq 0$. Αντίθετα, ο ορισμός

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

είναι περισσότερο γενικός, αφού ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό n και οποιονδήποτε ακέραιο $k \geq 0$.

Το ακόλουθο θεώρημα περιγράφει ορισμένες βασικές ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών.

Θεώρημα 88 (Ιδιότητες διωνυμικών συντελεστών)**.**

1. Εστω οποιοιδήποτε ακέραιοι $n \geq 0, k$. Είναι

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Εστω n οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και έστω $k \neq 0$ ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Είναι
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

3. Εστω n οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και έστω k ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Είναι
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

4. Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό r και οποιονδήποτε ακέραιο n είναι
$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

5. Για οποιουσδήποτε ακέραιους $m, n \geq 0$ είναι
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

6. Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό n και οποιονδήποτε ακέραιο k είναι
$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

7. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς r, s και οποιουσδήποτε ακέραιους m, n είναι
$$\sum_{k} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$$

□

Ιδιαίτερα χρήσιμος κατά την ασυμπτωτική προσέγγιση διωνυμικών συντελεστών είναι ο τύπος του Stirling.

Θεώρημα 89 (Τύπος του Stirling)**.** Είναι
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
όπου e είναι η βάση των φυσικών λογάριθμων. □

Η ασυμπτωτική αυτή προσέγγιση, σε συνδυασμό με τον ορισμό των διωνυμικών συντελεστών, οδηγεί σε μια σειρά από χρήσιμες σχέσεις για τους αριθμούς αυτούς.

Θεώρημα 90 (Προσεγγίσεις διωνυμικών συντελεστών)**.** Εστω οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί $n \geq k \geq 0$. Είναι

1.
$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$$

2.
$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

3.
$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

4.
$$\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

□

Ιδιαίτερα χρήσιμες (ειδικά κατά τον υπολογισμό άνω και κάτω φραγμάτων) είναι επίσης οι επόμενες δύο ανισότητες.

Θεώρημα 91 (Βασικές ανισότητες). 1. $\forall t \in R$ είναι:

$$1 + t \leq e^t$$

2. $\forall t, n \in R$ τέτοια ώστε $n \geq 1$ και $|t| \leq n$ είναι

$$e^t \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

□

Γ΄.3 Συνδυαστική ανάλυση

Ενα από τα σημαντικότερα ζητήματα της συνδυαστικής ανάλυσης (combinatorial analysis) είναι η απαρίθμηση όλων των δυνατών τρόπων να επιλέξει κανείς r αντικείμενα από ένα σύνολο n αντικειμένων, όπου $0 \leq r \leq n$. Υπάρχουν τρία βασικά κριτήρια που διαφοροποιούν το είδος της επιλογής αυτής:

- το αν τα επιλεγόμενα αντικείμενα θεωρούνται διατεταγμένα (ordered) ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε γενικά για μεταθέσεις (permutations), ενώ στη δεύτερη για συνδυασμούς (combinations) αντικειμένων.

- το αν τα προς επιλογή αντικείμενα θεωρούνται ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους ή όχι, οπότε μιλάμε για επιλογή από διακεκριμένα (distinct) ή μη διακεκριμένα (non-distinct) αντικείμενα, αντίστοιχα.

- τέλος, σε κάθε ένα από τα τέσσερα είδη επιλογής που προκύπτουν από τα δύο προηγούμενα κριτήρια, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν επιτρέπονται επαναλήψεις (repetitions) κατά την επιλογή των αντικειμένων ή όχι. Ενας εναλλακτικός τρόπος θεώρησης της δυνατότητας επαναληπτικών επιλογών, προκύπτει υποθέτοντας την επανατοποθέτηση (replacement) του κάθε φορά επιλεγόμενου αντικειμένου στο σύνολο όλων των προς επιλογή αντικειμένων.

Υπάρχουν δυο βασικά μαθηματικά εργαλεία που αποδεικνύονται εξαιρετικά χρήσιμα κατά την απαρίθμηση όλων των δυνατών τρόπων επιλογής αντικειμένων: ο κανόνας του γινομένου (rule of product) και ο κανόνας του αθροίσματος (rule of sum).

Κανόνας του γινομένου: Αν ένα γεγονός επιλογής μπορεί να συμβεί με m τρόπους και ένα άλλο με n τρόπους, υπάρχουν συνολικά $m \cdot n$ τρόποι για να συμβεί τόσο το ένα όσο και το άλλο γεγονός επιλογής.

Για παράδειγμα, υπάρχουν $7 \cdot 3 = 21$ τρόποι για να επιλέξει κανείς ένα ζευγάρι (δηλαδή μία γυναίκα και έναν άντρα) ανάμεσα σε 7 γυναίκες και 3 άντρες. Η χρησιμοποίηση του κανόνα του γινομένου δικαιολογείται από την πραγματοποίηση και των δύο γεγονότων επιλογής, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η επιλογή μιας γυναίκας και ενός άντρα. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου η επιλογή συνίσταται στην πραγματοποίηση ενός μόνο (οποιουδήποτε, είτε του ενός είτε του άλλου) γεγονότος επιλογής, χρησιμοποιείται ο ακόλουθος κανόνας του αθροίσματος:

Κανόνας του αθροίσματος: Αν ένα γεγονός επιλογής μπορεί να συμβεί με m τρόπους και ένα άλλο με n τρόπους, υπάρχουν συνολικά $m+n$ τρόποι για να συμβεί ένα (οποιοδήποτε) από τα δύο γεγονότα επιλογής.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος, προκύπτει εύκολα ότι υπάρχουν $7 + 3 = 10$ τρόποι για να επιλέξει κανείς ένα άτομο (γυναίκα ή άντρα) ανάμεσα στις 7 γυναίκες και τους 3 άντρες του προηγούμενου παραδείγματος.

Η εφαρμογή των κανόνων αυτών στην περίπτωση συνδυασμών διακεκριμένων αντικειμένων οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 92. Υπάρχουν $\binom{n}{r}$ συνδυασμοί r αντικειμένων από συνολικά n διακεκριμένα αντικείμενα. Επίσης, υπάρχουν

$$\binom{n+r-1}{r}$$

τρόποι επαναληπτικών (ή με επανατοποθέτηση) συνδυασμών r αντικειμένων από συνολικά n διακεκριμένα αντικείμενα. □

Ενδιαφέρουσα είναι και η περίπτωση όπου τα αντικείμενα δεν είναι διακεκριμένα και όπου υπολογίζεται ο αριθμός όλων των δυνατών συνδυασμών τους που περιλαμβάνουν τουλάχιστον ένα από τα αντικείμενα αυτά.

Θεώρημα 93. Εστω $n = q_1 + q_2 + \cdots + q_t$ αντικείμενα, όπου q_i είναι ο αριθμός των (όμοιων μεταξύ τους) αντικειμένων του είδους i $(1 \leq i \leq t)$. Υπάρχουν συνολικά

$$(q_1 + 1)(q_2 + 1) \cdots (q_t + 1) - 1$$

συνδυασμοί με ένα ή περισσότερα από τα αντικείμενα αυτά. $\square$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα για μεταθέσεις αντικειμένων.

Θεώρημα 94. Υπάρχουν συνολικά $n^{\underline{r}}$ μεταθέσεις r αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα, όπου

$$n^{\underline{r}} = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Επίσης, υπάρχουν n^r επαναληπτικές μεταθέσεις r αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα. $\square$

Στην περίπτωση όπου τα n αντικείμενα δεν είναι όλα διακεκριμένα μεταξύ τους, ο αριθμός των $r-$μεταθέσεών τους δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 95. Εστω $n = q_1 + q_2 + \cdots + q_t$ αντικείμενα, όπου q_i είναι ο αριθμός των όμοιων μεταξύ τους αντικειμένων του είδους i $(1 \leq i \leq t)$. Υπάρχουν συνολικά

$$\frac{n!}{q_1!\, q_2! \cdots q_t!}$$

μεταθέσεις των n αυτών αντικειμένων. $\square$

Ολοκληρώνουμε τη συνοπτική αυτή παρουσίαση ορισμένων βασικών αποτελεσμάτων συνδυαστικής ανάλυσης με την παρατήρηση ότι εξίσου σημαντικά και ενδιαφέροντα με τα ζητήματα επαναληπτικών ή όχι συνδυασμών και μεταθέσεων διακεκριμένων ή μη αντικειμένων, είναι και τα προβλήματα τοποθέτησης διακεκριμένων ή μη σφαιριδίων (balls) σε διακεκριμένες ή όχι θέσεις υποδοχής (cells), όπου η επαναληπτικότητα (ή επανατοποθέτηση) αντιστοιχεί στη δυνατότητα κάθε θέσης να δέχεται ή όχι περισσότερα του ενός σφαιρίδια. Τα προβλήματα τοποθέτησης σφαιριδίων σε θέσεις υποδοχής είναι αρκετά παρόμοια (και σε πολλές περιπτώσεις ισοδύναμα) με τα προβλήματα συνδυασμών και μεταθέσεων αντικειμένων.

Τέλος, τονίζουμε την ιδιαίτερη χρησιμότητα γεννητριών συναρτήσεων για τον υπολογισμό του αριθμού των συνδυασμών και μεταθέσεων αντικειμένων, όπως επίσης και κατά τον υπολογισμό όλων των δυνατών τρόπων τοποθέτησης σφαιριδίων σε θέσεις υποδοχής.

Γ΄.4 Γεννήτριες συναρτήσεις

Ο πιο ισχυρός ίσως τρόπος για τον αποτελεσματικό χειρισμό ακολουθιών αριθμών είναι η χρησιμοποίηση γεννητριών συναρτήσεων (generating functions). Η ονομασία των συναρτήσεων αυτών οφείλεται ακριβώς στη δυνατότητά τους να παράγουν τους όρους των ακολουθιών στις οποίες αντιστοιχούν.

Ορισμός 84. Εστω $g_n = < g_0, g_1, \ldots >$ μια ακολουθία αριθμών. Καλούμε τη συνάρτηση

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots$$

γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας g_n. □

Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει κανείς το μαθηματικό χαρακτήρα μιας γεννήτριας συνάρτησης $G(z)$ (είτε δηλαδή σα μια συνάρτηση της μεταβλητής z είτε σα μια δυναμοσειρά, formal power series), η βαθύτερη ουσία και η ιδιαίτερη δύναμη των γεννητριών συναρτήσεων παραμένει η ίδια και συνίσταται στη δυνατότητα που προσφέρουν για ένα σύντομο, συμπυκνωμένο και ιδιαίτερα ισχυρό τρόπο αναπαράστασης μιας ακολουθίας και στη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων τους για τον υπολογισμό νέων γεννητριών συναρτήσεων με απώτερο στόχο την παραγωγή μιας τελικής γεννήτριας συνάρτησης και την ανάπτυξή της σε μια άπειρη δυναμοσειρά για την παραγωγή των όρων της ζητούμενης ακολουθίας.

Ορισμένες βασικές και ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες που περιγράφουν μετασχηματισμούς και πράξεις μεταξύ γεννητριών συναρτήσεων δίνονται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 96. Εστω f_n, g_n ακολουθίες πραγματικών αριθμών με γεννήτριες συναρτήσεις $F(z), G(z)$ αντίστοιχα (συμβολίζουμε με $\leftrightarrow$ την αντιστοιχία ανάμεσα σε μια ακολουθία και τη γεννήτρια συνάρτησή της). Εστω επίσης a, b, c οποιεσδήποτε σταθερές και $m \geq 0$ ένας οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Είναι

1. $aF(z) + b\,G(z) \leftrightarrow af_n + b\,g_n$
2. $z^m G(z) \leftrightarrow g_{n-m}$
3. $\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} \leftrightarrow g_{n+m}$
4. $G(cz) \leftrightarrow c^n g_n$
5. $G'(z) \leftrightarrow (n+1) g_{n+1}$
6. $\int_0^z G(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{n}\, g_{n-1},\ n \geq 1$
7. $F(z)G(z) \leftrightarrow \sum_k f_k\, g_{n-k}$
8. $\frac{1}{1-z}\, G(z) \leftrightarrow \sum_{k \leq n} g_k$

□

Η πρώτη σχέση του θεωρήματος αυτού συνιστά μια έννοια γραμμικότητας για γεννήτριες συναρτήσεις. Οι δύο επόμενες σχέσεις δίνουν τις γεννήτριες συναρτήσεις ακολουθιών των οποίων οι όροι έχουν υποστεί ολίσθηση (shifting) προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, αντίστοιχα. Μια σημαντική ειδική περίπτωση της τέταρτης σχέσης του θεωρήματος προκύπτει για $c = -1$ και αντιστοιχεί στην ακολουθία $(-1)^n g_n$, δηλαδή την ακολουθία όπου οι όροι της g_n εμφανίζονται με εναλλασσόμενα πρόσημα. Οι δύο επόμενες σχέσεις δίνουν τις ακολουθίες που προκύπτουν από την παραγώγιση και την ολοκλήρωση της γεννήτριας συνάρτησης μιας αρχικής ακολουθίας. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η έβδομη σχέση, σύμφωνα με την οποία η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης (convolution) $\sum_k f_k g_{n-k}$ δύο ακολουθιών f_n, g_n ισούται με το γινόμενο των γεννητριών τους συναρτήσεων. Επίσης, η τελευταία σχέση, που στην πραγματικότητα αποτελεί εφαρμογή της ιδιότητας της συνέλιξης για $f_n = 1$ οπότε $F(z) = 1/(1-z)$, προσδιορίζει τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων των όρων μιας ακολουθίας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις ορισμένων βασικών ακολουθιών. Ο αναγνώστης παροτρύνεται να τις επαληθεύσει χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 97. Οι γεννήτριες συναρτήσεις των παρακάτω ακολουθιών είναι

1. $f_n = 1 = \langle 1, 1, 1, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-z}$
2. $f_n = (-1)^n = \langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1+z}$
3. $f_n = n + 1 = \langle 1, 2, 3, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$
4. $f_n = c^n = \langle 1, c, c^2, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1-cz}$
5. $f_n = \binom{c}{n} = \langle \binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = (1+z)^c$
6. $f_n = \frac{1}{n} = \langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$
7. $f_n = \frac{1}{n!} = \langle 1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots \rangle \quad \Rightarrow F(z) = e^z$

□

Ορισμένες χαρακτηριστικές εφαρμογές που αναδεικνύουν τη μεγάλη χρησιμότητα των γεννητριών συναρτήσεων είναι η επίλυση αναδρομικών σχέσεων (recurrence relations), ο υπολογισμός του αριθμού των συνδυασμών (combinations) και των μεταθέσεων (permutations) αντικειμένων μέσω της χρησιμοποίησης γεννητριών συναρτήσεων για συνδυασμούς και μεταθέσεις αντίστοιχα, ο υπολογισμός των ροπών (moments) και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) τυχαίων μεταβλητών (στην περίπτωση αυτή οι γεννήτριες συναρτήσεις καλούνται ροπογεννήτριες και πιθανογεννήτριες αντίστοιχα).

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [43], [40], [30] και [59] για μια πλήρη διαπραγμάτευση του ιδιαίτερα σημαντικού ζητήματος των γεννητριών συναρτήσεων.

Βιβλιογραφία

[1] A. Aho, J. Hopcroft and J. Ullman, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[2] D. Aldous, "Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains", Séminaire de Probabilités XVII, Springer Lecture Notes in Mathematics 986, pp. 243–297, 1981/1982.

[3] D. Aldous and P. Diaconis, "Shuffling cards and stopping times", American Mathematical Monthly 93, pp. 333–348, 1986.

[4] N. Alon and J. Spencer, "The Probabilistic Method", John Wiley & Sons, 1992.

[5] D. Angluin and L. Valiant, "Fast Probabilistic Algorithms for Hamiltonian Circuits and Matchings", JCSS, vol. 18, pp. 155–193, 1979.

[6] P. Bachmann, "Die analytische Zahlentheorie", Teubner, Leipzig, 1894.

[7] B. Bollobás, "Random Graphs", Academic Press, 1985.

[8] B. Bollobás, "The chromatic number of random graphs", Combinatorica, 8, pp. 49–55, 1988.

[9] J. Beck, "On 3-chromatic hypergraphs", Discrete Math., 24, pp. 127–137, 1978.

[10] A. Broder and E. Shamir, "On the second eigenvalue of random regular graphs", Proc. 19st ACM Symp. on Theory of Computing, pp. 286–294, 1987.

[11] A. Cayley, "On the theory of the analytical forms called trees", Philos. Mag. 13, pp. 19–30, 1857. Also in Mathematical Papers, Cambridge 3, pp. 242–246, 1891.

[12] H. Chernoff, "A measure of the asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sums of observations", Annals of Mathematical Statistics, 23, pp. 493–509, 1952.

[13] V. Chvatal and E. Szemeredi, "Many hard examples for resolution", Journal of the ACM, vol. 35, pp. 759–768, 1988.

[14] S. Cook, "The complexity of theorem-proving procedures", 3rd STOC, pp. 151–158, 1971.

[15] P. Diaconis, "Group representations in probability and statistics", Lecture Notes Monograph Series, 11, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1988.

[16] J. Diaz, S. Nikoletseas, M. Serna and P. Spirakis, "A genetic approach for the parallel almost uniform generation and approximate counting of matchings", Mathematics, Rutgers University, DIMACS Institute, USA, 1996.

[17] J. Doob, "Stochastic Processes", John Wiley, New York, 1953.

[18] P. Erdös, "Some remarks on the theory of graphs", Bull. Amer. Math. Soc., 53, pp. 292–294, 1947.

[19] P. Erdös, "On a problem of graph theory", Math. Gaz., 47, pp. 220–223, 1963.

[20] P. Erdös, "On a combinatorial problem", I, Nordisk Tidskr. Informations-behandlung (BIT), 11, pp. 5–10, 1963.

[21] P. Erdös and L. Lovász, "Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions", Infinite and Finite Sets, North Holland, Amsterdam-New York, 1975.

[22] P. Erdös and J. Moon, "On sets of consistent arcs in a tournament", Canadian Math. Bull., 8, pp. 269–271 , 1965.

[23] P. Erdös and G. Szekeres, "A combinatorial problem in geometry", Compositio Math., 2, pp. 463–470, 1935.

[24] L. Euler, "The Königsberg bridges", Sci. Amer. 189, pp. 66–70, 1953.

[25] W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and its Applications", John Wiley, New York, 1957.

[26] P. Feyerabend, "Ενάντια στη μέθοδο: Για μια αναρχική θεωρία της γνώσης".

[27] J. Franco and M. Paull, "Probabilistic analysis of the Davis Putnam procedure for solving the satisfiability problem", Discrete Applied Mathematics, vol. 5, pp. 77–87, 1983.

[28] A. Frieze and S. Suen, "Analysis of simple heuristics for random instances of 3-SAT", unpublished manuscript, 1993.

[29] M.Garey and D.Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", W.H.Freeman and Co., NY, 1979.

[30] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik, "Concrete Mathematics", Addison-Wesley, 1989.

[31] T. Hagerup and C. Rüb, "A guided tour of Chernoff bounds", Information Processing Letters, 33, pp. 305–308, 1989/1990.

[32] F. Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, 1972.

[33] S. Janson, "Poisson approximation for large deviations", Random Structures and Algorithms, 1, pp. 221–230, 1990.

[34] Σ. Καλπαζίδου, "Στοιχεία Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων", Εκδόσεις Ζήτη, 1991.

[35] A. Kamath, R. Motwani, K. Palem and P. Spirakis, "Tail bounds for occupancy and the satisfiability threshold conjecture", Random Structures and Algorithms, 7, pp. 59–80, 1995.

[36] Z. Kedem, K. Palem, and P. Spirakis, "Efficient Robust Parallel Computations", Proc. 22nd ACM Symp. on Theory of Computing (STOC), pp. 138–148, 1990.

[37] Z. Kedem, K. Palem, A. Raghunathan and P. Spirakis, "Combining Tentative and Definite Executions for Very Fast Dependable Parallel Computing", Proc. 23nd ACM Symp. on Theory of Computing (STOC), 1991.

[38] G. Kirchhoff, "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird", Ann. Phys. Chem. 72, pp. 497–508, 1847.

[39] L. Kirousis, E. Kranakis and D. Krizanc, "Approximating the Unsatisfiability Threshold of Random Formulas", 4th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), Barcelona, Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 1996.

[40] D. Knuth, "The Art of Computer Programming. Volume 1: Fundamental Algorithms", Addison-Wesley, 1968.

[41] Σ. Κουνιάς και Χ. Μωυσιάδης, "Πιθανότητες Ι, Θεωρία και Ασκήσεις", Εκδόσεις Ζήτη, 1992.

[42] E. Landau, "Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", two volumes, Teubner, Leipzig, 1909.

[43] C. Liu, “Introduction to Combinatorial Mathematics”, Mc Graw-Hill, 1968.

[44] B. Maurey, “Construction de suites symétriques”, Comptes Rendu Academie des Sciences, 288, pp. 679–681, Paris, 1979.

[45] V. Milman and G. Schechtman, “Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces”, Lecture Notes in Mathematics, 1200, Springer Verlag, New York, 1986.

[46] J. Moon, “Topics on Tournaments”, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1968.

[47] R. Motwani and P. Raghavan, “Randomized Algorithms”, Cambridge University Press, 1995.

[48] S. Nikoletseas, K. Palem, P. Spirakis and M. Yung, “Short Vertex Disjoint Paths and Multiconnectivity in Random Graphs: Reliable Network Computing” , 21st International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP), Jerusalem, pp. 508 – 515, 1994.

[49] S. Nikoletseas, G. Pantziou, P. Psycharis and P. Spirakis, “On the reliability of fat-trees”, CTI Technical Report, 1996.

[50] S. Nikoletseas, J. Reif, P. Spirakis and M. Yung, “Stochastic Graphs Have Short Memory: Fully Dynamic Connectivity in Polylogarithmic Expected Time”, 22nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP), Szeged (Hungary), 1995, (to appear).

[51] S. Nikoletseas and P. Spirakis, “Near-Optimal Dominating Sets in Dense Random Graphs in Polynomial Expected Time”, 19th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG), Utrecht, 1993.

[52] S. Nikoletseas and P. Spirakis, “Expander Properties in Random Regular Graphs with Edge Faults”, 12th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), München, pp. 421 – 432, 1995.

[53] C. Papadimitriou, “Complexity Theory”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

[54] C. Papadimitriou and K. Steiglitz, “Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity”, Prentice-Hall, 1982.

[55] N. Pippenger, “Telephone switching networks”, The Mathematics of Networks, AMS, Providence, 1982.

[56] F. Ramsey, “On a problem of formal logic”, Proceedings of the London Mathematics Society, 30 (2), pp. 264–286, 1930.

[57] J. Reif and P. Spirakis, “Expected parallel time analysis and sequential space complexity of graph and digraph problems”, Algorithmica, 1992.

[58] J.Reif and P.Spirakis, “Random Matroids”, Proc. 12th Annual ACM Symp. Theory of Computing (STOC), pp. 385–397, 1980.

[59] J. Riordan, “An Introduction to Combinatorial Analysis”, John Wiley & Sons, New York, 1960.

[60] E. Shamir and J. Spencer, “Sharp concentration of the chromatic number in random graphs $G_{n,p}$”, Combinatorica, 7, pp. 121–130, 1987.

[61] A. Sinclair, “Algorithms for random generation and counting”, ed. Birkhäuser, 1992.

[62] J. Spencer, “Asymptotic lower bounds for Ramsey functions”, Discrete Mathematics, 20, pp. 69–76, 1977.

[63] J. Spencer, “Ten Lectures on the Probabilistic Method”, SIAM, 1987.

[64] T. Szele, “Kombinatorikai vizsgalatok az iranyitott teljes graffal kapcsolatban ”, Matematicko Fizicki Lapok, 50, pp. 223–256, 1943. (German Translation in Publ. Math. Debrecen, 13, pp. 145–168, 1966)

[65] R. Tarjan, “Data Structures and Network Algorithms”, SIAM, 1985.

[66] P. Turan, “On an extremal problem in graph theory”, Matematicko Fizicki Lapok, 48, pp. 436–452, 1941.

[67] W. F. De La Vega, “On the maximal cardinality of a consistent set of arcs in a random tournament”, J. Combin. Theory, Ser. B, 35, pp. 328–332, 1983.

Ευρετήριο

Ε

Θ

Ι

Κ

Λ

Μ

Φ

Χ

Ψ

Ω