“Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (6η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περιεχόμενα 6ης Διάλεξης: Διακριτές Κατανομές

1. Κατανομή Bernoulli (ή δοκιμή Bernoulli)

Γένεση: Σε τυχαίο πείραμα, δεν μας ενδιαφέρει το ΑΚΡΙΒΕΣ αποτέλεσμα, αλλά αν πραγματοποιήθηκε ή όχι ένα γεγονός (ΕΠΙΤΥΧΙΑ ή ΑΠΟΤΥΧΙΑ).

π.χ. ρίξιμο ζαριού

$$X = \begin{cases} 1, & \text{περιττό αποτέλεσμα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λέγεται και δεικνύουσα (indicator) μεταβλητή.

1. Κατανομή Bernoulli (ή δοκιμή Bernoulli)

pdf:

$$X = \begin{cases} 1 \quad \text{(επιτυχία)}, & \text{p} \\ 0, & \text{1 - p} = \text{q} \end{cases}$$

Μέση τιμή:

$$\mu = E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Διασπορά:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) =$$
$$p \cdot (1 - p) \cdot [1 - p + p] = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)

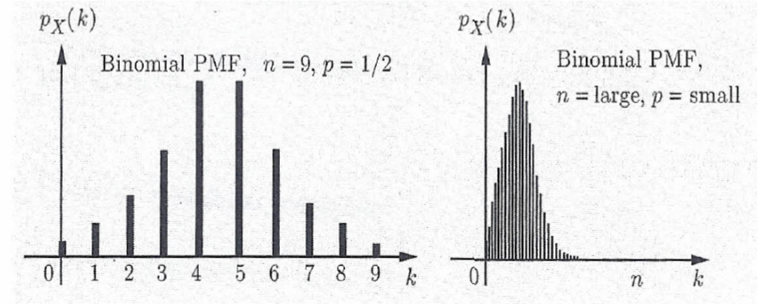
Γένεση: # επιτυχιών σε n στοχαστικά ανεξάρτητες επαναλήψεις πειράματος, όπου κάθε φορά η πιθανότητα επιτυχίας είναι p (πιθανότητα αποτυχίας: 1 - p = q), π.χ. αριθμός κεφαλών σε n ρίψεις νομίσματος

Σχόλιο: πρόκειται για άθροισμα n ανεξάρτητων κατανομών Bernoulli

pdf: $Pr\{X = x\} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n$

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)

Η μορφή της pdf της διωνυμικής



αριστερά: $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ συμμετρική pdf

δεξιά: p μικρό $\Rightarrow$ κοντύτερα στο 0
(και αντίστοιχα, p μεγάλο $\Rightarrow$ κοντύτερα στο n)

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)

Μέση τιμή (α' τρόπος):

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x} = (\text{Θέτω } x = x+1)$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-1-x} = n \cdot p \cdot [p+q]^{n-1} = n \cdot p$$

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)

Μέση τιμή (β′ τρόπος):

$$\Pi(z) = E\left[z^X\right] = \sum_{x=0}^{n} z^x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = (p \cdot z + q)^n$$

$$\Rightarrow \Pi'(z) = n \cdot (p \cdot z + q)^{n-1} \cdot p$$

$$\Rightarrow E(X) = \Pi'(1) = n \cdot (p+q)^{n-1} \cdot p = n \cdot p$$

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial) - Διασπορά

Διασπορά:

$X = X_1 + \cdots + X_n$ όπου X_i ανεξάρτητες Bernoulli(p)

$$\Rightarrow Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right)$$

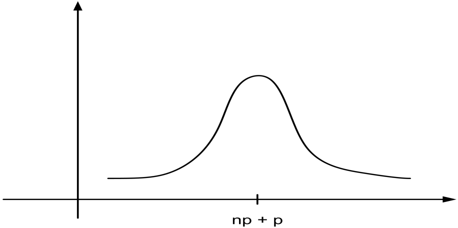
$$= \sum_{i=1}^{n} p \cdot q = n \cdot p \cdot q$$

2. Διωνυμική Κατανομή (Binomial) - Πιθανότερη τιμή

$$\frac{p(x)}{p(x-1)} = \frac{\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}{\binom{n}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x+1}} = \cdots = 1 + \frac{p \cdot (n+1) - x}{x \cdot q}$$

$$\text{αν } x < p \cdot (n+1) \Rightarrow p(x) > p(x-1) \Rightarrow p(x) \uparrow$$

$$\text{αν } x > p \cdot (n+1) \Rightarrow p(x) < p(x-1) \Rightarrow p(x) \downarrow$$



δηλαδή η πιθανότερη τιμή είναι πολύ κοντά στη μέση τιμή

2. Διωνυμική Κατανομή - άθροισμα διωνυμικών (προαιρετικό διάβασμα)

Άθροισμα διωνυμικών

X, Υ ανεξάρτητες

$X \sim B(n,p)$ και $Y \sim B(m,p) \Rightarrow X+Y \sim B(n+m,p)$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_x(z) = (p \cdot z + q)^n \\ \Pi_y(z) = (p \cdot z + q)^m \end{array}\right\} X{+}Y \leftrightarrow (p \cdot z + q)^{n+m} \Rightarrow X{+}Y \sim B(n{+}m,p)$$

3. Γεωμετρική Κατανομή

Γένεση: ανεξάρτητες επαναλήψεις (πιθανότητα επιτυχίας p και $q = 1 - p$) μέχρι 1η επιτυχία
π.χ. ρίχνω νόμισμα μέχρι 1η φορά "κεφαλή"

pdf: $Pr\{X = x\} = q^{x-1} \cdot p = (1-p)^{x-1} \cdot p, \qquad \mathrm{x} = 1, 2, \cdots, \infty$

μέση τιμή: $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot p = p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1}$

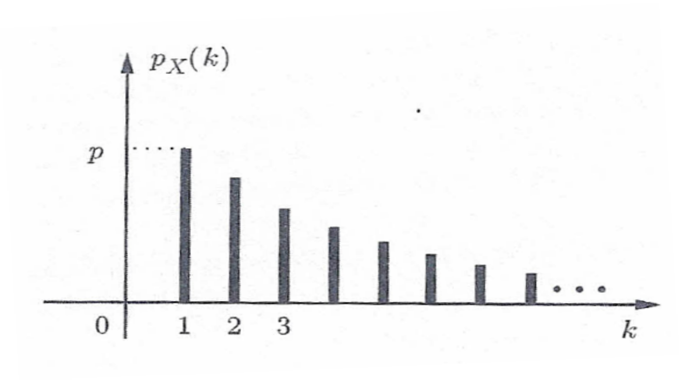
$$\text{αλλά } 1 + q + q^2 + \cdots + q^x + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot q + \cdots + x \cdot q^{x-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

3. Γεωμετρική Κατανομή

Η μορφή της pdf της γεωμετρικής



Η μείωση της πιθανότητας μοιάζει με εκείνη μιας γεωμετρικής προόδου

3. Γεωμετρική Κατανομή

ιδιότητα "έλλειψης μνήμης"
(η μοναδική διακριτή κατανομή με αυτήν την ιδιότητα):

$$Pr\{X > i + j \mid X > i\} = Pr\{X > j\}$$

Απόδειξη: 1ο μέλος $= \dfrac{Pr\{X > i + j \cap X > i\}}{Pr\{X > i\}} =$

$$\frac{Pr\{X > i + j\}}{Pr\{X > i\}} = \frac{q^{i+j}}{q^i} = q^j = Pr\{X > j\}$$

(Η έλλειψη μνήμης οφείλεται στην ανεξαρτησία των επαναλήψεων).

4. Poisson Κατανομή

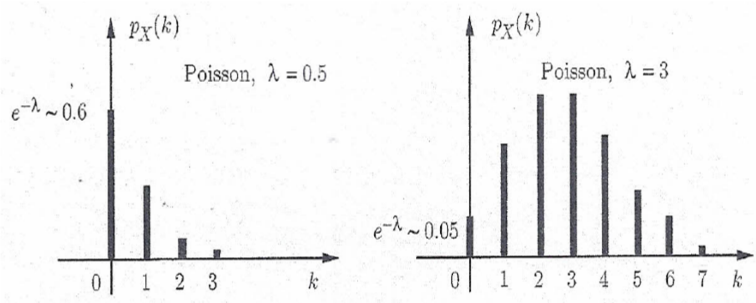
Γένεση: # γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα ορισμένο χρονικό ή χωρικό διάστημα, των οποίων ο μέσος ρυθμός είναι λ σταθερός δηλαδή πάρα πολλά ενδεχόμενα γεγονότα κάθε ένα εκ των οποίων είναι σχετικά απίθανο ώστε το λ να παραμένει μικρό

π.χ. - ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα
- ο αριθμός των ανθρώπων μιας πόλης που περνούν τα 100 χρόνια ζωής
- ο αριθμός των λάθος τηλεφωνημάτων σε μία ημέρα
- ο αριθμός των επισκέψεων σε μία ιστοσελίδα σε ένα λεπτό
- ο αριθμός των αυτοκινήτων που περνούν από μία γέφυρα σε μία ώρα

pdf: $Pr\{X = x\} = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$
(λ είναι μία σταθερά που εκφράζει τον αναμενόμενο ρυθμό των γεγονότων)

4. Poisson Κατανομή

Η μορφή της pdf της Poisson



– $\lambda \leq 1 \Rightarrow$ μονότονα φθίνουσα

– $\lambda > 1 \Rightarrow$ αρχικά αύξουσα, μετά φθίνουσα καθώς το k αυξάνει

<u>μέση τιμή (α΄ τρόπος):</u>

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \stackrel{x=x+1}{=}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1}}{x!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

4. Poisson Κατανομή

<u>μέση τιμή (β′ τρόπος):</u>

$\Pi(z) =$

$$E(z^X) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot z)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = e^{\lambda \cdot (z-1)}$$

$$\Pi'(z) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (z-1)} \Rightarrow E(X) = \Pi'(1) = \lambda$$

(δηλαδή η μέση τιμή είναι η σταθερά λ, ο ρυθμός των γεγονότων)

4. Σχέση διωνυμικής και Poisson

<u>Η διωνυμική συγκλίνει ασυμπτωτικά στην Poisson όταν $\lambda = n \cdot p, p \to 0$ και $n \cdot p$ σταθερό (π.χ. $n \geq 20$ και $p \leq 0.05$, ή $n \geq 100$ και $n \cdot p \leq 10$):</u>

<u>Απόδειξη 1:</u> $\binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \sim \frac{n^x}{x!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$

$$= \frac{n^x \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}}{x!} = \frac{n^x \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}}{x! \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} =$$

$$\xrightarrow{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{\lambda} \to \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \square$$

4. Σχέση διωνυμικής και Poisson

Απόδειξη 2:

$$B(n,p) \Rightarrow \Pi_B(z) = (p \cdot z + q)^n$$

$$P(\lambda) \Rightarrow \Pi_p(z) = e^{\lambda \cdot (z-1)}$$

$$\lambda = n \cdot p \Rightarrow B(n,p) : (1 - p + p \cdot z)^n = [1 + p \cdot (z-1)]^n =$$

$$\left[1 + \frac{\lambda}{n} \cdot (z-1)\right]^n = \left(\left[1 + \frac{1}{\frac{n}{\lambda \cdot (z-1)}}\right]^{\frac{n}{\lambda \cdot (z-1)}}\right)^{\lambda \cdot (z-1)} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{\lambda \cdot (z-1)} = \Pi_p(z) \qquad \square$$

4. Διασπορά Poisson

$$\text{Είναι } Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E\left(X \cdot (X-1)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+2}}{x!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow E\left(X^2 - X\right) = \lambda^2 \Rightarrow E\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

5. Άλλες κατανομές - Αρνητική Διωνυμική

Γένεση: Ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p $(0 < p < 1)$, μέχρι να πραγματοποιηθούν r επιτυχίες.

pdf: Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων:

$$Pr\{X = x\} = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{x-r}\,, \qquad x = r, r+1, \ldots$$

εξήγηση: $binomial(x-1, r-1)$ για τις πρώτες $x-1$ επαναλήψεις και επιτυχία στην $x-$οστή

Παρατήρηση: Η γεωμετρική είναι αρνητική διωνυμική με παραμέτρους r=1 και p.

5. Άλλες κατανομές - Υπεργεωμετρική

Γένεση – pdf : Διαλέγουμε τυχαία n μπάλες (χωρίς επανατοποθέτηση) από κουτί που περιέχει N μπάλες, εκ των οποίων m είναι άσπρες και $N-m$ είναι μαύρες. Έστω X ο αριθμός από άσπρες μπάλες:

$$Pr\{X=x\} = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \; , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, m$$

μέση τιμή: $$E(X) = \frac{n \cdot m}{N}$$

Παρατήρηση: $E(X) = n \cdot \frac{m}{N}$ όπου $\frac{m}{N}$ ο λόγος των άσπρων σφαιρών προς το συνολικό και n ο αριθμός των σφαιρών που τραβάμε (δείτε και επόμενη διαφάνεια). Δηλαδή είναι σαν να είχαμε επανατοποθέτηση και επομένως διωνυμική $B(n, \frac{m}{N})$

5. Άλλες κατανομές - Υπεργεωμετρική (προαιρετικό υλικό)

<u>Παρατήρηση:</u> Άν τα m και N είναι μεγάλα σε σχέση με τα n, x (δηλαδή τραβάμε από πολύ μεγάλο πλήθος από μπάλες εκ των οποίων πάρα πολλές είναι άσπρες), τότε διαισθητικά το αποτέλεσμα θα ήταν σχεδόν ίδιο με επανατοποθέτηση είτε χωρίς, αφού κάθε φορά που τραβάμε μία μπάλα η πιθανότητα να είναι άσπρη θα είναι περίπου $p = \frac{m}{N}$. Άρα, η υπεργεωμετρική θα προσεγγιζόταν πολύ καλά από μία διωνυμική με παραμέτρους $(n, \frac{m}{N})$. Πράγματι:

$$Pr\{X = x\} = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{m!}{(m-x)!x!} \cdot \frac{(N-m)!}{(N-m-n+x)!(n-x)!} \cdot \frac{(N-n)!n!}{N!}$$

$$= \binom{n}{x} \cdot \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} \cdots \frac{m-x+1}{N-x+1} \cdot \frac{N-m}{N-x} \cdot \frac{N-m-1}{N-x-1} \cdots \frac{N-m-(n-x-1)}{N-x-(n-x-1)}$$

$$\simeq \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \sim B(n,p) \text{ όπου } p = \frac{m}{N},\ 1-p = \frac{N-m}{N}$$

6. Παράδειγμα 1

Μια μηχανή παράγει προϊόντα που έχουν βλάβη με πιθανότητα 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 προϊόντων το πολύ 1 να έχει βλάβη.

6. Παράδειγμα 1

Μια μηχανή παράγει προϊόντα που έχουν βλάβη με πιθανότητα 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 προϊόντων το πολύ 1 να έχει βλάβη.

Λύση:

6. Παράδειγμα 1

Μια μηχανή παράγει προϊόντα που έχουν βλάβη με πιθανότητα 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 προϊόντων το πολύ 1 να έχει βλάβη.

<u>Λύση:</u> Πρόκειται για διωνυμική, οπότε η πιθανότητα είναι

$$\binom{10}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^9 = 0.7361$$

6. Παράδειγμα 1

Μια μηχανή παράγει προϊόντα που έχουν βλάβη με πιθανότητα 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 προϊόντων το πολύ 1 να έχει βλάβη.

Λύση: Πρόκειται για διωνυμική, οπότε η πιθανότητα είναι

$$\binom{10}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^9 = 0.7361$$

Η προσέγγιση από την Poisson δίνει ($\lambda = 10 \cdot 0.1 = 1$):

6. Παράδειγμα 1

Μια μηχανή παράγει προϊόντα που έχουν βλάβη με πιθανότητα 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα δείγμα 10 προϊόντων το πολύ 1 να έχει βλάβη.

<u>Λύση:</u> Πρόκειται για διωνυμική, οπότε η πιθανότητα είναι

$$\binom{10}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^9 = 0.7361$$

Η προσέγγιση από την Poisson δίνει ($\lambda = 10 \cdot 0.1 = 1$):

$$e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!} = 2 \cdot e^{-1} \simeq 0.7358$$

Δηλαδή είναι πολύ ακριβής.

6. Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η πιο πιθανή τιμή μιας Poisson κατανομής με παράμετρο λ;

6. Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η πιο πιθανή τιμή μιας Poisson κατανομής με παράμετρο λ;

<u>Λύση:</u>

6. Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η πιο πιθανή τιμή μιας Poisson κατανομής με παράμετρο λ;

Λύση: $$\frac{Pr\{X=i\}}{Pr\{X=i-1\}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

6. Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η πιο πιθανή τιμή μιας Poisson κατανομής με παράμετρο λ;

Λύση:
$$\frac{Pr\{X=i\}}{Pr\{X=i-1\}} = \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}}{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda}{i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots$$

– αν $\lambda \leq 1 \Rightarrow Pr\{X=i\} \leq Pr\{X=i-1\}$ δηλαδή η pdf είναι φθίνουσα οπότε πιθανότερη τιμή είναι η $i=0$ (με πιθανότητα $e^{-\lambda}$).

6. Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η πιο πιθανή τιμή μιας Poisson κατανομής με παράμετρο λ;

<u>Λύση:</u> $$\frac{Pr\{X=i\}}{Pr\{X=i-1\}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- αν $\lambda \leq 1 \Rightarrow Pr\{X=i\} \leq Pr\{X=i-1\}$ δηλαδή η pdf είναι φθίνουσα οπότε πιθανότερη τιμή είναι η $i=0$ (με πιθανότητα $e^{-\lambda}$).
- αν $\lambda > 1$ τότε όταν $i < \lambda$ είναι αύξουσα ενώ όταν $i > \lambda$ είναι φθίνουσα, άρα πιθανότερη τιμή είναι ο μέγιστος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το λ.

6. Παράδειγμα 3

Σε κάθε παιχνίδι που παίζει κάποιος κερδίζει με πιθανότητα p. Αρχικά σχεδιάζει να παίξει 5 παιχνίδια, αλλά αν στο πέμπτο παιχνίδι κερδίσει τότε συνεχίζει να παίζει μέχρι να χάσει.
(α)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που παίζει.
(β)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που χάνει.

6. Παράδειγμα 3

Σε κάθε παιχνίδι που παίζει κάποιος κερδίζει με πιθανότητα p. Αρχικά σχεδιάζει να παίξει 5 παιχνίδια, αλλά αν στο πέμπτο παιχνίδι κερδίσει τότε συνεχίζει να παίζει μέχρι να χάσει.
(α)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που παίζει.
(β)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που χάνει.

<u>Λύση:</u>

6. Παράδειγμα 3

Σε κάθε παιχνίδι που παίζει κάποιος κερδίζει με πιθανότητα p. Αρχικά σχεδιάζει να παίξει 5 παιχνίδια, αλλά αν στο πέμπτο παιχνίδι κερδίσει τότε συνεχίζει να παίζει μέχρι να χάσει.
(α)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που παίζει.
(β)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που χάνει.

Λύση: α) Έστω X ο αριθμός των παιχνιδιών. Μετά τα πρώτα 4 παιχνίδια, ο αριθμός των παιχνιδιών (έστω Y) είναι γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1-p$. Άρα:
$X = 4 + Y \Rightarrow E(X) = E(4+Y) = E(4) + E(Y) = 4 + \frac{1}{1-p}$

6. Παράδειγμα 3

Σε κάθε παιχνίδι που παίζει κάποιος κερδίζει με πιθανότητα p. Αρχικά σχεδιάζει να παίξει 5 παιχνίδια, αλλά αν στο πέμπτο παιχνίδι κερδίσει τότε συνεχίζει να παίζει μέχρι να χάσει.
(α)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που παίζει.
(β)Να βρείτε την μέση τιμή των παιχνιδιών που χάνει.

Λύση: α) Έστω X ο αριθμός των παιχνιδιών. Μετά τα πρώτα 4 παιχνίδια, ο αριθμός των παιχνιδιών (έστω Y) είναι γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1-p$. Άρα:
$X = 4 + Y \Rightarrow E(X) = E(4+Y) = E(4) + E(Y) = 4 + \frac{1}{1-p}$
β) Έστω Z ο αριθμός των χαμένων παιχνιδιών. Στα πρώτα 4 παιχνίδια ο αριθμός των χαμένων παιχνιδιών (έστω A) ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρο $1-p$. Μετά το τέταρτο παιχνίδι, πάντα ακολουθεί 1 ακριβώς ακόμα χαμένο παιχνίδι (είτε στο πέμπτο είτε μετά). Άρα:
$Z = A + 1 \Rightarrow E(Z) = E(A) + 1 = 4(1-p) + 1$