

“Πιθανότητες και
Αρχές Στατιστικής”
(5η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

*Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής,
Πανεπιστήμιο Πατρών*

Περιεχόμενα 5ης Διάλεξης

- 1 Ανισότητα Markov
- 2 Διασπορά
- 3 Συνδιασπορά
- 4 Ανισότητα Chebyshev
- 5 Πιθανογεννήτριες-Ροπογεννήτριες

- 1 Ανισότητα Markov
- 2 Διασπορά
- 3 Συνδιασπορά
- 4 Ανισότητα Chebyshev
- 5 Πιθανογεννήτριες-Ροπογεννήτριες

1. Ανισότητα Markov

Θεώρημα

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ μη αρνητική} \\ \forall t > 0 \end{array} \right\} \Pr\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}$$

1. Ανισότητα Markov

Θεώρημα

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ μη αρνητική} \\ \forall t > 0 \end{array} \right\} \Pr\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}$$

Φυσική σημασία

$$-t = 2 \cdot \mu \Rightarrow \Pr\{X \geq 2 \cdot \mu\} \leq \frac{\mu}{2 \cdot \mu} = \frac{1}{2}$$

$$-t = 3 \cdot \mu \Rightarrow \Pr\{X \geq 3 \cdot \mu\} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Γενικά: } \Pr\{X \geq t \cdot \mu\} \leq \frac{1}{t}$$

Επομένως, πρόκειται για ανισότητα συγκέντρωσης των τιμών μιας τ.μ. γύρω από τη μέση τιμή της.

1. Ανισότητα Markov - Απόδειξη

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} \geq \sum_{x \geq t} x \cdot Pr\{X = x\} \\ &\geq \sum_{x \geq t} t \cdot Pr\{X = x\} = t \cdot \sum_{x \geq t} Pr\{X = x\} = t \cdot Pr\{X \geq t\} \quad \square \end{aligned}$$

Σχόλιο: Η ανισότητα Markov απαιτεί μόνο γνώση της μέσης τιμής. Εφαρμόζεται εύκολα, αλλά δεν είναι πολύ ισχυρή.

- 1 Ανισότητα Markov
- 2 Διασπορά
- 3 Συνδιασπορά
- 4 Ανισότητα Chebyshev
- 5 Πιθανογεννήτριες-Ροπογεννήτριες

2. Διασπορά - Ορισμός

Ορισμός διασποράς (variance)

$$\text{Var}(X) = E \left[(X - \mu)^2 \right] = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot \text{Pr}\{X = x\}$$

όπου $\mu = E(X)$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{τυπική απόκλιση})$$

Φυσική σημασία: μέτρο αποκλίσεων από τη μέση τιμή (μέση τιμή τετραγώνου αποκλίσεων από τη μέση τιμή - πιθανοτικά “ζυγισμένο” άθροισμα αυτών των αποκλίσεων)

2. Variance - Ιδιότητες

Ιδιότητες

- 1) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- 2) Αν X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
(προσθετικότητα)
- 3) $Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X)$

2. Variance - Ιδιότητες

Απόδειξη 1)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2 \cdot \mu \cdot X + \mu^2] = \\ &= E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot E(X) + E(\mu^2) = E(X^2) - 2 \cdot \mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

2. Variance - Ιδιότητες (προαιρετικά)

Απόδειξη 2)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - E^2(X + Y) = \\ &= E[X^2 + 2 \cdot X \cdot Y + Y^2] - [E(X) + E(Y)]^2 = \\ &= E(X^2) + 2 \cdot E(X \cdot Y) + E(Y^2) - E^2(X) - 2 \cdot E(X) \cdot E(Y) - E^2(Y) = \\ & \text{(λόγω ανεξαρτησίας ισχύει: } E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)) \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) = \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

3. Συνδιασπορά - Ορισμός

Ορισμός συνδιασποράς (covariance)

Καλούμε συνδιασπορά (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y την:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

Βασική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \text{Είναι } Cov(X, Y) &= E[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)] = \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Φυσική σημασία:

Αν X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

Δηλαδή η συνδιασπορά είναι μέτρο της εξάρτησης δύο τ.μ.

3. Συνδιασπορά - Παρατήρηση (προαιρετικά)

Παρατήρηση:

Το αντίστροφο δεν ισχύει! δηλαδή η συνδιασπορά μπορεί να είναι 0 ακόμα και όταν οι τυχαίες μεταβλητές είναι εξαρτημένες. πχ.

$$Pr\{X = 0\} = Pr\{X = 1\} = Pr\{X = -1\} = \frac{1}{3}$$

$$\text{και έστω } Y = \begin{cases} 0, & \text{αν } X \neq 0 \\ 1, & \text{αν } X = 0 \end{cases}$$

Οπότε προφανώς $X \cdot Y = 0$, οπότε $E(XY) = 0$.

$$\text{Αλλά } E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{και } E(Y) = 0 \cdot Pr\{X \neq 0\} + 1 \cdot Pr\{X = 0\} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

ενώ οι X και Y είναι προφανώς εξαρτημένες.

3. Συνδιασπορά - Ιδιότητες

Ιδιότητες

$$(ι) \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

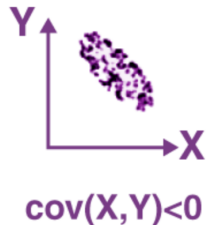
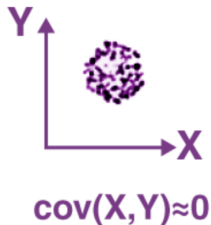
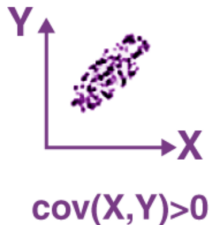
$$(ιι) \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$(ιιι) \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Απόδειξη της (ιι):

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= E(X \cdot X) - E(X)E(X) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) = \\ &= \text{Var}(X) \end{aligned}$$

3. Συνδιασπορά - Σχετικά με το πρόσημο της συνδιασποράς



- 1 Ανισότητα Markov
- 2 Διασπορά
- 3 Συνδιασπορά
- 4 Ανισότητα Chebyshev
- 5 Πιθανογεννήτριες-Ροπογεννήτριες

4. Ανισότητα Chebyshev

Θεώρημα

$$Pr\{|X - \mu| \geq t\} \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

Φυσική σημασία: $Var(X) \downarrow \Rightarrow Pr\{|X - \mu| \geq t\} \downarrow \Rightarrow$ μικρές αποκλίσεις, υψηλή συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή π.χ.

$$Pr\{|X - \mu| \geq 2 \cdot \sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{4 \cdot \sigma^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$Pr\{|X - \mu| \leq 2 \cdot \sigma\} \geq 0.75$ (δηλαδή οποιαδήποτε τ.μ. συγκεντρώνεται ± 2 τυπικές αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή με πιθανότητα ≥ 0.75). Επίσης:

$$Pr\{|X - \mu| \geq 3 \cdot \sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{9 \cdot \sigma^2} = \frac{1}{9}$$

4. Ανισότητα Chebyshev

Απόδειξη: Από την ανισότητα Markov:

$$\Pr\{|X - \mu| \geq t\} = \Pr\{(X - \mu)^2 \geq t^2\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{t^2} = \frac{\text{Var}(X)}{t^2} \quad \square$$

4. Ανισότητα Chebyshev - Παράδειγμα (Προαιρετικά)

Ένα παράδειγμα όπου η Chebyshev δίνει ακριβές αποτέλεσμα

$$X = \begin{cases} k, & \frac{1}{2 \cdot k^2} \\ -k, & \frac{1}{2 \cdot k^2} \\ 0, & 1 - \frac{1}{k^2} \end{cases}$$

$$\mu = k \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} - k \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + 0 = 0$$

$$\text{Var}(X) = (k-0)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + (-k-0)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + (0-0)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

4. Ανισότητα Chebyshev - Παράδειγμα (Προαιρετικά)

Από την Chebyshev έχω:

$$Pr\{|X| \geq k\} = Pr\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Από την *pdf* έχω:

$$Pr\{|X| \geq k\} = Pr\{X \geq k\} + Pr\{X \leq -k\} =$$

$$Pr\{X = k\} + Pr\{X = -k\} = \frac{1}{2 \cdot k^2} + \frac{1}{2 \cdot k^2} = \frac{1}{k^2}$$

δηλαδή το άνω φράγμα είναι ακριβές. Αλλά πολλές φορές τα άνω φράγματα της Chebyshev δεν είναι πολύ ακριβή \Rightarrow μελετάμε υψηλότερες ροπές

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Είναι } E(X^2) =$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Είναι } E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Είναι } E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Άρα $Var(X) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Είναι } E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\text{Άρα } Var(X) = E(X^2) - E^2(X) =$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

$$\text{Είναι } E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Είναι } E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\text{Άρα } Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Παράδειγμα 2

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Παράδειγμα 2

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. X_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιστολή } i \text{ μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. X_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιστολή } i \text{ μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.

Παράδειγμα 2

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. X_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιστολή } i \text{ μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } E(X_i) &= 1 \cdot Pr\{\text{επιστολή } i \text{ σε σωστό φάκελο}\} = \\ &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. X_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η επιστολή } i \text{ μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } E(X_i) &= 1 \cdot Pr\{\text{επιστολή } i \text{ σε σωστό φάκελο}\} = \\ &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = n \frac{1}{n} = 1$$

Άρα κατά μέση τιμή 1 επιστολή θα μπει σε σωστό φάκελο. \square

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ όπου } X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ όπου } X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{Var}(X_i) &= E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2p + 0^2(1 - p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n - 1}{n} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ όπου } X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{Var}(X_i) &= E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2p + 0^2(1 - p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n - 1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ όπου } X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{Var}(X_i) &= E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2p + 0^2(1 - p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n - 1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } E(X_i \cdot X_j) &= 1 \cdot \text{Pr}\{X_i = 1 \cap X_j = 1\} = \\ &= \text{Pr}\{X_i = 1\} \text{Pr}\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n - 1} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{Var}(X_i) &= E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2p + 0^2(1 - p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n - 1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } E(X_i \cdot X_j) &= 1 \cdot \text{Pr}\{X_i = 1 \cap X_j = 1\} = \\ &= \text{Pr}\{X_i = 1\} \text{Pr}\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n - 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n - 1)} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2(n - 1)}$$

Παράδειγμα 3 - Συνέχεια (προαιρετικά)

Οπότε από τη σχέση

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Παράδειγμα 3 - Συνέχεια (προαιρετικά)

Οπότε από τη σχέση

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Προκύπτει ότι

$$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

□

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

$$\text{Είναι } E \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

$$\text{Είναι } E \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

και (λόγω ανεξαρτησίας):

$$Var \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω X_1, X_2, \dots μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

$$\text{Είναι } E \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

και (λόγω ανεξαρτησίας):

$$Var \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{Άρα: } Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right\} \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \quad \square$$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα "κεφαλή"} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα "γράμματα"} \end{cases}$$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα "κεφαλή"} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα "γράμματα"} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα "κεφαλή"} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα "γράμματα"} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

δηλαδή ο αριθμός των αποτελεσμάτων κεφαλή σε n επαναλήψεις συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο $\frac{n}{2}$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα "κεφαλή"} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα "γράμματα"} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

$$Pr \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

δηλαδή ο αριθμός των αποτελεσμάτων κεφαλή σε n επαναλήψεις συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο $\frac{n}{2}$

Παρατήρηση: Ωστόσο, σε κάθε ρίψη η πιθανότητα για “κεφαλή” είναι πάντα $\frac{1}{2}$ ανεξαρτήτως της “ιστορίας”!

π.χ. $Pr\{\text{"κεφαλή"} | \text{"κεφαλή"} \text{ στις } 100 \text{ τελευταίες ρίψεις}\} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\text{Είναι } E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\text{και } Var(X_1 - X_2) =$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\text{Είναι } E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\text{και } Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\text{και } Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$$

$$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28 \end{aligned}$$

Άρα

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} =$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\overline{\text{Είναι}} E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} = Pr\{|X_1 - X_2 - 0| > 15\} \leq$$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75$, $E(X_2) = 75$, $Var(X_1) = 10$, $Var(X_2) = 12$
και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την
 $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

$$\text{Είναι } E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{και } Var(X_1 - X_2) &= Var[X_1 + (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] = \\ &= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} &= Pr\{|X_1 - X_2 - 0| > 15\} \leq \\ &\leq \frac{Var(X_1 - X_2)}{15^2} = \frac{28}{225} \quad \square \end{aligned}$$

- 1 Ανισότητα Markov
- 2 Διασπορά
- 3 Συνδιασπορά
- 4 Ανισότητα Chebyshev
- 5 Πιθανογεννήτριες-Ροπογεννήτριες

Ροπές Moments - Διάφορα είδη

- ν-οστή ροπή περί την τιμή α : $\alpha_\nu = E[(X - \alpha)^\nu]$
- ν-οστή ροπή περί την αρχή: $\mu'_\nu = E[X^\nu]$
- ν-οστή ροπή περί τη μέση τιμή: $\mu_\nu = E[(X - \mu)^\nu]$
- ν-οστή παραγοντική ροπή:
 $E[X^\nu] = E[X \cdot (X - 1) \cdot \dots \cdot (X - \nu + 1)]$

οπότε

- μέση τιμή: 1η ροπή περί την αρχή
- διασπορά: 2η ροπή περί τη μέση τιμή

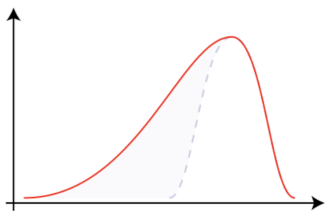
Συντελεστής λοξότητας:

$$\lambda = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right]$$

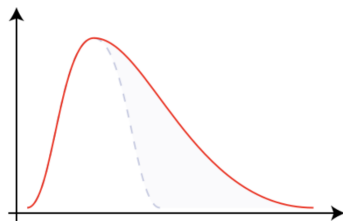
Συντελεστής κύρτωσης:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] - 3$$

Ροπές Moments

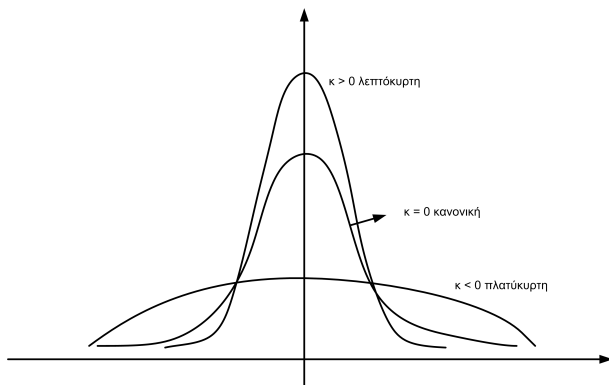


$\lambda < 0$ λοξή αριστερά



$\lambda > 0$ λοξή δεξιά

Ροπές Moments



Η κυρτότητα της τυπικής κανονικής κατανομής είναι 0.

Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Ορισμός

$$\langle g_n \rangle = g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$$

$$\Rightarrow G(z) = g_0 + g_1 \cdot z + g_2 \cdot z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^n$$

$$\text{π.χ. } \langle g_n \rangle = 1 \Rightarrow G(z) = \sum_n z^n = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Σημασία:

Μια πυκνή αναπαράσταση της ακολουθίας που την καθορίζει μονοσήμαντα

$$\text{Δηλαδή } F(z) = G(z) \Leftrightarrow f_n = g_n, \forall n$$

Αν ξέρουμε την γεννήτρια, μπορούμε να βρούμε την ακολουθία αφού g_n είναι ο συντελεστής του z^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας σε σειρά

- $f_n + g_n \Leftrightarrow F(z) + G(z)$
- $c^n \cdot g_n \Leftrightarrow G(c \cdot z)$ ($c = -1 \Rightarrow$ εναλλασσόμενα πρόσημα)
- convolution (συνέλιξη):

$$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \cdots$$

$$g_0 \quad g_1 \quad g_2 \cdots$$

$$h_n = \sum_{k=0}^n f_k \cdot g_{n-k} \Leftrightarrow F(z) \cdot G(z)$$

- άθροισμα πρώτων όρων ακολουθίας (συνέλιξη με 1):

$$\sum_{k=0}^n f_k \Leftrightarrow F(z) \cdot \frac{1}{1-z}$$

Ορισμός

$$\Pi(z) = E[z^X] = \sum_x z^x \cdot Pr\{X = x\}$$

Χρήσιμες Ιδιότητες

$$\Pi'(z) = \sum_x x \cdot z^{x-1} \cdot Pr\{X = x\}$$

$$\Rightarrow \Pi'(1) = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} \text{ δηλαδή } \Pi'(1) = E(X)$$

$$\sigma^2 = \Pi''(1) + \Pi'(1) - (\Pi'(1))^2$$

Δηλαδή η πιθανογεννήτρια “γεννά” τις πιθανότητες των τιμών x της μεταβλητής, οι οποίες είναι οι συντελεστές των z^x στο ανάπτυγμα της πιθανογεννήτριας σε δυναμοσειρά.

Διωνυμική

Διωνυμική κατανομή $B(n,p)$: #επιτυχιών σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p

$$Pr\{X = x\} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{x=0}^n z^x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \cdot (pz)^x \cdot q^{n-x} = (p \cdot z + q)^n$$

$$\Rightarrow \Pi'(1) = n \cdot (p \cdot z + q)^{n-1} \cdot p|_{z=1} = n \cdot (p \cdot 1 + q)^{n-1} \cdot p = n \cdot p$$

Poisson

Κατανομή Poisson(λ): για 'σπάνια' γεγονότα που συμβαίνουν με ρυθμό λ .

$$f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot z)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = e^{\lambda \cdot (z-1)}$$

$$\Pi'(1) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (z-1)}|_{z=1} \Rightarrow \Pi'(1) = E[X] = \lambda$$

Σύγκλιση Διωνυμικής \rightarrow Poisson $\lambda = np$

$$\Pi_1(z) = (p \cdot z + 1 - p)^n = (1 + p \cdot (z - 1))^n = \left[1 + \frac{\lambda \cdot (z - 1)}{n} \right]^n$$

$$\left(\left[1 + \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda \cdot (z-1)}} \right]^{\frac{n}{\lambda \cdot (z-1)}} \right)^{\lambda \cdot (z-1)} \rightarrow_{\infty} e^{\lambda \cdot (z-1)} = \Pi_2(z)$$

Δηλαδή η διωνυμική προσεγγίζεται καλά από την Poisson, κάτι που έχει μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Ορισμός

$$M(t) = E [e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\}$$

Στη συνεχή περίπτωση: $M(t) = E [e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

Παρατήρηση: πρόκειται όχι για αριθμό αλλά για συνάρτηση μιας παραμέτρου t .

Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας

Είναι:
$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$$

Παραγωγίζοντας:

$$M'(t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_x e^{tx} f(x) \right] = \sum_x \frac{d}{dt} [e^{tx} f(x)] \Rightarrow$$

$$M'(t) = \sum_x x \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow M'(0) = \sum_x x \cdot f(x) = E(X)$$

Δηλαδή, η τιμή της πρώτης παραγώγου της ροπογεννήτριας στο 0 είναι η μέση τιμή (δηλαδή η ροπογεννήτρια “γεννά” την πρώτη ροπή).

Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας (2)

Ομοίως:

$$M''(t) = \sum_x x^2 \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$
$$\Rightarrow M''(0) = E(X^2)$$

και γενικά η n -οστή παράγωγος γεννά την n -οστή ροπή περί την αρχή.

Παρατήρηση: Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν στη συνεχή περίπτωση.

Γεννήτριες Αθροισμάτων

$$\left. \begin{array}{l} X, Y \text{ ανεξάρτητες} \\ X \Leftrightarrow \Pi_1(z), M_1(t) \\ Y \Leftrightarrow \Pi_2(z), M_2(t) \end{array} \right\} X + Y \Leftrightarrow \Pi_1(z)\Pi_2(z) \text{ και } M_1(t)M_2(t)$$

Απόδειξη (για ροπογεννήτριες):

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

Λόγω της ανεξαρτησίας είναι:

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}] = M_X(t) \cdot M_Y(t) \quad \square$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left. \begin{array}{l} X : \text{Poisson}(\lambda_1) \\ Y : \text{Poisson}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y : \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left. \begin{array}{l} X : \text{Poisson}(\lambda_1) \\ Y : \text{Poisson}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y : \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Απάντηση:

5. Παράδειγμα 1

$$\left. \begin{array}{l} X : \text{Poisson}(\lambda_1) \\ Y : \text{Poisson}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y : \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Απάντηση: $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left. \begin{array}{l} X : \text{Poisson}(\lambda_1) \\ Y : \text{Poisson}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y : \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Απάντηση: $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

οπότε $X + Y \Leftrightarrow \Pi(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (z-1)}$

5. Παράδειγμα 1

$$\left. \begin{array}{l} X : \text{Poisson}(\lambda_1) \\ Y : \text{Poisson}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y : \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Απάντηση: $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

οπότε $X + Y \Leftrightarrow \Pi(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (z-1)}$

άρα $X + Y \Leftrightarrow \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση:

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) =$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) =$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot (z + z^2 + \dots + z^6) \right]^4$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot (z + z^2 + \dots + z^6) \right]^4$$

Άρα $P =$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : $P(\text{άθροισμα } 17) = ?$

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \dots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot (z + z^2 + \dots + z^6) \right]^4$$

Άρα $P =$ ο συντελεστής του z^{17}

Υπολογισμός συντελεστή του z^{17} (προαιρετικά)

$$\Pi(z) = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot (1 + z + \dots + z^5)^4 = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot \left(\frac{1 - z^6}{1 - z} \right)^4$$

$$\text{Αλλά } A = (1 - z^6)^4 = 1 - 4z^6 + 6z^{12} - 4z^{18} + z^{24}$$

$$\begin{aligned} \text{και } B &= (1 - z)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \cdot (-z)^n \cdot 1^{-4-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)(-5)\dots(-4-n+1)}{n!} (-1)^n z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)z^n \end{aligned}$$

Στο γινόμενο $A \cdot B$ ο συντελεστής του z^{13} είναι:

$$1 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 - 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 104$$

Τελικά, ο συντελεστής του z^{17} είναι $\frac{104}{6^4}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση: $M(t) = E [e^{tX}] =$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:
$$M(t) = E [e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:

$$\begin{aligned} M(t) &= E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t} \end{aligned}$$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:

$$\begin{aligned} M(t) &= E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t} \end{aligned}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$

$$\Rightarrow E(X) = M'(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}$$