“Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (4η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περιεχόμενα 4ης Διάλεξης

Σύνοψη Προηγούμενου Μαθήματος

- Δεσμευμένη Πιθανότητα
  - $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
- 3 εργαλεία που αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα
  - ο πολλαπλασιαστικός νόμος
  - το θεώρημα της ολικής πιθανότητας
  - το θεώρημα του Bayes: $P(B \mid A) = f\left(P(A \mid B)\right)$
- στοχαστική ανεξαρτησία
  - $P(A \mid B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Σχόλιο για σημερινό μάθημα

"Τομή"

- πριν: στοιχειώδη μέσα για τη μελέτη της Πιθανότητας
    - γεγονότα → σύνολα
    - πράξεις συνόλων
    - αξιωματική θεμελίωση
    - συνδυαστική ανάλυση

Σχόλιο για σημερινό μάθημα

"Τομή"

- πριν: στοιχειώδη μέσα για τη μελέτη της Πιθανότητας
  - γεγονότα → σύνολα
  - πράξεις συνόλων
  - αξιωματική θεμελίωση
  - συνδυαστική ανάλυση
- τώρα: Τυχαίες μεταβλητές
  - γεγονότα → αριθμοί
  - "πυκνή" αναπαράσταση
  - μαθηματική προσέγγιση (ανάλυση, άλγεβρα)

Σχόλιο για σημερινό μάθημα

"Τομή"

- πριν: στοιχειώδη μέσα για τη μελέτη της Πιθανότητας
  - γεγονότα → σύνολα
  - πράξεις συνόλων
  - αξιωματική θεμελίωση
  - συνδυαστική ανάλυση
- τώρα: Τυχαίες μεταβλητές
  - γεγονότα → αριθμοί
  - "πυκνή" αναπαράσταση
  - μαθηματική προσέγγιση (ανάλυση, άλγεβρα)

- Συστηματική μελέτη συνήθων πιθανοτικών φαινομένων (κατανομές)
- Ισχυρές ποσοτικές παράμετροι (μέση τιμή, διασπορά, ροπές)
- Ανισότητες για συγκέντρωση τιμών
- Ισχυρά εργαλεία (πιθανογεννήτριες, ροπογεννήτριες)

3. Τυχαίες Μεταβλητές

α. Ορισμός τυχαίας μεταβλητής:
"συνάρτηση ορισμένη σε ένα δειγματοχώρο"$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ αντιστοιχούμε στα ΣΗΜΕΙΑ ενός δειγματοχώρου ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ αριθμούς

$\Rightarrow$ έτσι περνάμε από ΣΥΝΟΛΑ σε ΑΡΙΘΜΟΥΣ (συστηματική προσέγγιση)

3. Τυχαίες Μεταβλητές

β. Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος 2 φορές $\Rightarrow \Omega = \{\text{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}\}$
τυχαία μεταβλητή X = #αποτελεσμάτων κεφαλή

β. Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος 2 φορές $\Rightarrow \Omega = \{$ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ$\}$

τυχαία μεταβλητή Χ $=$ #αποτελεσμάτων κεφαλή $\Leftrightarrow$ Χ: 2, 1, 1, 0

Οπότε π.χ. γεγονός "1 κεφαλή" $\Rightarrow$ Χ $= 1$

β. Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος 2 φορές $\Rightarrow \Omega = \{$ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ$\}$

τυχαία μεταβλητή X = #αποτελεσμάτων κεφαλή $\Leftrightarrow$ X: 2, 1, 1, 0

Οπότε π.χ. γεγονός "1 κεφαλή" $\Rightarrow X = 1$

Υπάρχουν πολλές τ.μ. στον ίδιο χώρο π.χ. Y = "απόλυτη διαφορά αποτελεσμάτων κεφαλή από αποτελέσματα γράμματα"

β. Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος 2 φορές $\Rightarrow \Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$
τυχαία μεταβλητή Χ = #αποτελεσμάτων κεφαλή $\Leftrightarrow$ Χ: 2, 1, 1, 0

Οπότε π.χ. γεγονός "1 κεφαλή" $\Rightarrow X = 1$

Υπάρχουν πολλές τ.μ. στον ίδιο χώρο π.χ. Υ = "απόλυτη διαφορά αποτελεσμάτων κεφαλή από αποτελέσματα γράμματα" $\Leftrightarrow$ Υ = 2, 0, 0, 2.

γ. Είδη τυχαίων μεταβλητών

- διακριτές
  - πεπερασμένο πλήθος τιμών
  - αριθμήσιμα άπειρο πλήθος τιμών
- συνεχείς
  - μη αριθμήσιμα άπειρο πλήθος τιμών

δ. Τυπικά παραδείγματα τ.μ.

- Ο αριθμός τηλεφωνημάτων, emails, σε ορισμένο χρονικό διάστημα $\Rightarrow \Delta$
- Ο αριθμός των άδειων κελιών $\Rightarrow \Delta$
- Ο χρόνος παραλαβής ενός email $\Rightarrow \Sigma$
- Η θέση ενός σωματιδίου σε τυχαία κίνηση $\Rightarrow \Sigma$
- Το ύψος των ατόμων ενός πληθυσμού $\Rightarrow \Sigma$
- Ο αριθμός των επαναλήψεων μέχρι την πρώτη επιτυχία $\Rightarrow \Delta$
- Ο αριθμός επιτυχιών σε n επαναλήψεις ενός πειράματος $\Rightarrow \Delta$

4. Κατανομές

α. Κατανομή πιθανότητας (ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, probability density function pdf)

Ορισμός

Δ $f(x) = P(X = x)$

Σ $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$ (η πιθανότητα κάθε συγκεκριμένης τιμής είναι 0 ή δεν έχει νόημα)

Προϋποθέσεις

- f κατανομή πιθανότητας $\Leftrightarrow$
  - $f(x) \geq 0$
  - $\sum_x f(x) = 1 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1 \right)$

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\mathrm{KK}, \mathrm{K\Gamma}, \mathrm{\Gamma K}, \mathrm{\Gamma\Gamma}\}$$

X = # αποτελεσμάτων "κεφαλή" $\Rightarrow$ X =

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

$$X = \#\ \text{αποτελεσμάτων “κεφαλή”} \Rightarrow X = \{0,\ 1,\ 2\} \Rightarrow$$

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\text{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}\}$$

$$\text{X} = \#\ \text{αποτελεσμάτων “κεφαλή”} \Rightarrow \text{X} = \{0,\ 1,\ 2\} \Rightarrow$$

$$Pr\{X = 0\} = f(0) =$$

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\mathrm{KK},\ \mathrm{K\Gamma},\ \mathrm{\Gamma K},\ \mathrm{\Gamma\Gamma}\}$$

X = # αποτελεσμάτων "κεφαλή" ⇒ X = {0, 1, 2} ⇒

$$Pr\{X=0\} = f(0) = \frac{1}{4}$$
$$Pr\{X=1\} = f(1) =$$

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\text{KK, K}\Gamma\text{, }\Gamma\text{K, }\Gamma\Gamma\}$$

X = # αποτελεσμάτων "κεφαλή" $\Rightarrow$ X $= \{0, 1, 2\} \Rightarrow$

$$\begin{gathered} Pr\{X = 0\} = f(0) = \frac{1}{4} \\ Pr\{X = 1\} = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ Pr\{X = 2\} = f(2) = \end{gathered}$$

4. Κατανομές - Απλό παράδειγμα

$$\Omega = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

$$\text{X} = \# \text{ αποτελεσμάτων “κεφαλή”} \Rightarrow \text{X} = \{0, 1, 2\} \Rightarrow$$

$$\begin{gathered} Pr\{X=0\} = f(0) = \frac{1}{4} \\ Pr\{X=1\} = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ Pr\{X=2\} = f(2) = \frac{1}{4} \end{gathered}$$

4. Κατανομές - Άλλο ένα παράδειγμα (1)

Διωνυμική $B(n,p)$: n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p. X: αριθμός επιτυχιών. Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της X και να δειχθεί ότι πράγματι είναι κατανομή πιθανότητας.

Η κατανομή είναι $\quad f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$x = 0, 1, \cdots, n$

$0 \leq p \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x$

$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$ από το διωνυμικό θεώρημα

4. Κατανομές - Άλλο ένα παράδειγμα (2)

Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) μιας συσκευής είναι μια συνεχής τ.μ. με pdf:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα η συσκευή να λειτουργήσει το πολύ 100 ώρες.

4. Κατανομές - Άλλο ένα παράδειγμα (2)

Λύση. Αρχικά πρέπει $\lambda > 0$ και

$$\int_0^\infty \lambda e^{-x/100} dx = 1 \Rightarrow -100\lambda e^{-x/100}\Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow 100\lambda = 1$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

$$P(X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = 1 - e^{-1} \approx 0.633$$

4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)

Ορισμός

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)

Ορισμός

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

Θεώρημα

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \Rightarrow$ αν ξέρουμε την συνάρτηση κατανομής βρίσκουμε πιθανότητα

4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)

Θεώρημα

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \Rightarrow$ αν ξέρουμε την συνάρτηση κατανομής βρίσκουμε πιθανότητα

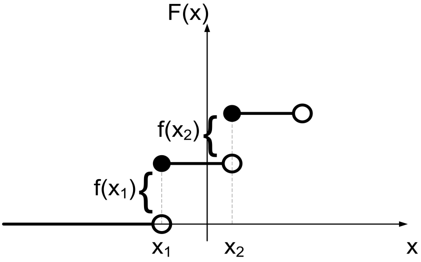
Σχέση μεταξύ συνάρτησης κατανομής και κατανομής πιθανότητας

- Ξέρω pdf $\Rightarrow$ βρίσκω $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$
- Ξέρω συνάρτηση κατανομής $\Rightarrow$ βρίσκω $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ (για συνεχή τυχαία μεταβλητή)

4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές ⇒ κλιμακωτή συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < x_1 \\ f(x_1), x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), x_2 \leq x < x_3 \\ . \\ . \end{cases}$$



4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)

Θεώρημα

(α.) $0 \leq F(x) \leq 1$

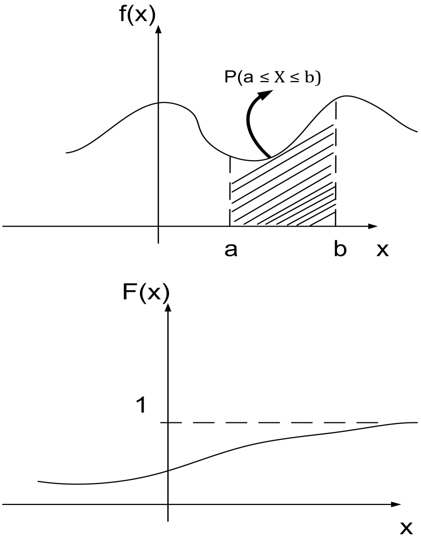
(β.) $F(x) \uparrow$ αύξουσα

(γ.) συνεχής από δεξιά

(δ.) οι αριστερές ασυνέχειες ή απότομες μεταβολές δίνουν τις πιθανότητες των σημείων και επομένως την κατανομή πιθανότητας

(ε.) $\lim\limits_{-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$

4. Κατανομές - Συνάρτηση κατανομής (distribution function)



5. Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Συχνά ενδιαφερόμαστε για περισσότερες από μία τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο, π.χ. σε ένα data set από emails για spam detection θέλουμε να μελετήσουμε το μέγεθός τους, τον αριθμό των αποδεκτών τους, τον αριθμό των αναμεταδόσεων κ.λπ., ή σε ένα σύνολο μαθητών να μελετήσουμε ταυτόχρονα τον χρόνο χρήσης κινητού και την σχολική επίδοση κ.λπ. , οπότε αντιστοιχίζουμε μία τ.μ. σε κάθε μέγεθος από αυτά τα (πιθανώς συσχετιζόμενα) μεγέθη.
Από κοινού κατανομή πιθανότητας:
$f(x,y) = P(X = x, Y = y) \equiv P(X = x \cap Y = y)$

$$\text{f από κοινού κατανομή πιθανότητας} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) \geq 0 \quad \text{και} \\ \sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε νόμισμα 3 φορές. Χ: # κεφαλών, Υ:# γραμμάτων. Να βρεθεί η από κοινού pdf, $f(x, y)$.

Ενδεχόμενο	f(x,y)
ΚΚΚ	f(3,0)= 1/8
ΚΚΓ, ΚΓΚ,ΓΚΚ	f(2,1)= 3/8
ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ	f(1,2)= 3/8
ΓΓΓ	f(0,3)= 1/8

Περιθώριες κατανομές πιθανότητας

$$f_1(x) = P(X = x) = P\left[X = x \cap (Y = y_1 \cup Y = y_2 \cup \cdots)\right]$$

$$= P\left[(X = x \cap Y = y_1) \cup \cdots\right] =$$

$$= \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f(x, y)$$

$$f_2(y) = \sum_x f(x, y)$$

Επεξήγηση ονόματος

Από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{X \leq x} \sum_{Y \leq y} f(X,Y)$$

5. Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Αν $\forall x, y : \{X = x\}, \{Y = y\}$ ανεξάρτητα γεγονότα $\Rightarrow$

$f(x, y) = P(X = x \cap Y = y) = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\} =$
$f_1(x) \cdot f_2(y)$

δηλαδή η από κοινού κατανομή πιθανότητας ισούται με το γινόμενο των περιθωρίων κατανομών

5. Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Y / X	y_1	y_2		
x_1	$f(x_1, y_1)$			$f_1(x_1)$
x_2				
	$f_2(y_1)$			1

5. Παράδειγμα 1

Έστω ότι 15% των οικογενειών σε μια πόλη δεν έχουν παιδιά, 20% έχουν ένα παιδί, 35% έχουν 2 παιδιά, και 30% έχουν 3. Έστω επίσης ότι σε κάθε οικογένεια κάθε παιδί είναι εξίσου πιθανό να είναι αγόρι ή κορίτσι. Αν μια οικογένεια επιλέγεται τυχαία από αυτήν την πόλη, τότε το πλήθος των αγοριών της, B, και το πλήθος των κοριτσιών της, G, θα έχουν την από κοινού κατανομή πιθανότητας που δίνεται από τον πίνακα:

5. Παράδειγμα 1

$P\{B = i, G = j\}$

$i \backslash j$	0	1	2	3	Row sum $= P\{B = i\}$
0	.15	.10	.0875	.0375	.3750
1	.10	.175	.1125	0	.3875
2	.0875	.1125	0	0	.2000
3	.0375	0	0	0	.0375
Columnsum $= P\{G = j\}$	.3750	.3875	.2000	.0375	

5. Παράδειγμα 1

- $P(B=0, G=0) = P(\text{όχι παιδιά}) = 0.15$
- $P(B=0, G=1) = P(1 \text{ κορίτσι και συνολικά } 1 \text{ παιδί})$

$$= P(1 \text{ παιδί}) P(1 \text{ κορίτσι } \mid 1 \text{ παιδί}) = (0.20)(\frac{1}{2})$$

- $P(B=0, G=2) = P(2 \text{ κορίτσια και συνολικά } 2 \text{ παιδιά})$

$$= P(2 \text{ παιδιά}) P(2 \text{ κορίτσια } \mid 2 \text{ παιδιά}) = (0.35)(\frac{1}{2})^2$$

5. Παράδειγμα 2

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y δίνεται από:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\{X > 1, Y < 1\}$

5. Παράδειγμα 2

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y δίνεται από:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\{X > 1, Y < 1\}$

<u>Λύση:</u>

$$\begin{aligned} P\{X > 1, Y < 1\} &= \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\ &= \int_0^1 2e^{-2y}(-e^{-x} \mid_1^\infty)dy \\ &= e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy \\ &= e^{-1}(1-e^{-2}) \end{aligned}$$

5. Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Δεσμευμένες κατανομές

$$f(y \mid x) =$$

5. Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Δεσμευμένες κατανομές

$$f(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x)$$

Δεσμευμένες κατανομές

$$f(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x)$$

$$= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} =$$

Δεσμευμένες κατανομές

$$f(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x)$$

$$= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\sum_y f(x, y)}$$

6. Μέση Τιμή

Ορισμός

$$\mu = E(X) = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} = \sum_x x \cdot f(x)$$

Φυσική σημασία

- αντιπροσωπεύει όλες τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή X
- είναι ένα "ζυγισμένο" άθροισμα των τιμών της μεταβλητής X $\Rightarrow$
  - "Κέντρο πιθανότητας"
  - "Κεντρική τάση"
  - Παράμετρος Θέσης

6. Μέση Τιμή

Ιδιότητες

α) $E(c \cdot X) = c \cdot E(X), \qquad$ όπου c σταθερά

β) $E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad$ (γραμμικότητα μέσης τιμής)(*είτε είναι ανεξάρτητες είτε όχι)

γ) X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Απόδειξη β)

$$E(X+Y)=\sum_x\sum_y (x+y)\cdot f(x,y)=$$

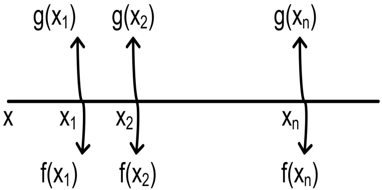
$$\sum_x\sum_y xf(x,y)+\sum_y\sum_x yf(x,y)=$$

$$\sum_x x\sum_y f(x,y)+\sum_y y\sum_x f(x,y)=$$

$$\sum_x x\cdot f(x)+\sum_y y\cdot f(y)=E(X)+E(Y)$$

6. Μέση Τιμή συνάρτησης τ.μ.

$$E(g(x)) = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$



π.χ. X το αποτέλεσμα ενός τυχερού παιγνιδιού και g(X) το κέρδος του παίκτη σε σχέση με το αποτέλεσμα

7. Παράδειγμα 1 - Μέση τιμή δεικνύουσας τυχαίας μεταβλητής

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{με πιθανότητα p} \\ 0, \text{με πιθανότητα 1 - p} \end{cases}$$

$$E(X_i) =$$

7. Παράδειγμα 1 - Μέση τιμή δεικνύουσας τυχαίας μεταβλητής

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{με πιθανότητα p} \\ 0, \text{με πιθανότητα 1 - p} \end{cases}$$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

(ονομάζεται επίσης δοκιμή Bernoulli)

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής*

$$x : f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad 0 \le p \le 1$$

$$x : 0, 1, \cdots, n$$

*Διωνυμική $B(n, p)$: n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p. x: αριθμός επιτυχιών.

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής*

$$x : f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$x : 0, 1, \cdots, n$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

*Διωνυμική $B(n, p)$: n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p. x: αριθμός επιτυχιών.

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής*

$$x : f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad 0 \le p \le 1$$

$$x : 0, 1, \cdots, n$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

*Διωνυμική $B(n,p)$: n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p. x: αριθμός επιτυχιών.

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής*

$$x : f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$x : 0, 1, \cdots, n$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} \cdot p \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x} =$$

*Διωνυμική $B(n,p)$: n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p. x: αριθμός επιτυχιών.

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x} =$$

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x} = (\text{ θέτοντας x=x+1 })$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x-1} =$$

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot (1-p)^{n-x} = (\text{ θέτοντας x=x+1 })$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{x=0}^{n} \binom{n-1}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x-1} =$$

$$= n \cdot p \cdot (p + 1 - p)^{n-1} = n \cdot p$$

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής

Β' Τρόπος

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

όπου $X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα} \quad \text{p} \\ 0, & \text{με πιθανότητα} \quad \text{1 - p} \end{cases}$

Επειδή $E(X_i) = p$

είναι $E(X) =$

7. Παράδειγμα 2 - Μέση Τιμή διωνυμικής κατανομής

Β′ Τρόπος

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

όπου $X_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα} \quad \text{p} \\ 0, & \text{με πιθανότητα} \quad \text{1 - p} \end{cases}$

Επειδή $E(X_i) = p$

είναι $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot p. \quad \square$

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X $\geq$Y (δηλαδή, σε όλα τα σημέια του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

Απόδειξη:

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X ≥Y (δηλαδή, σε όλα τα σημεία του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$X \geq Y$$

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X $\geq$Y (δηλαδή, σε όλα τα σημέια του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

Απόδειξη:

$$X \geq Y$$
$$X - Y \geq 0$$

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X ≥Y (δηλαδή, σε όλα τα σημέια του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$X \geq Y$$

$$X - Y \geq 0$$

$$E(X - Y) \geq 0$$

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X ≥Y (δηλαδή, σε όλα τα σημέια του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

Απόδειξη:

$$X \geq Y$$
$$X - Y \geq 0$$
$$E(X - Y) \geq 0$$
$$E(X) - E(Y) \geq 0$$

7. Παράδειγμα 3

Έστω ότι για 2 τ.μ. X, Y είναι X $\geq$Y (δηλαδή, σε όλα τα σημεία του χώρου, η τιμή της X είναι μεγαλύτερη ή ίση της τιμής της Y). Να δειχθεί ότι $E(X) \geq E(Y)$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} &X \geq Y \\ &X - Y \geq 0 \\ &E(X - Y) \geq 0 \\ &E(X) - E(Y) \geq 0 \\ &E(X) \geq E(Y) \qquad \square \end{aligned}$$

7. Παράδειγμα 4

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές -1,0,1 με πιθανότητα 0.2, 0.5 και 0.3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η $E(X^2)$

7. Παράδειγμα 4

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές -1,0,1 με πιθανότητα 0.2, 0.5 και 0.3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η $E(X^2)$

Λύση: (Α΄ Τρόπος)

Η X^2 παίρνει μόνο τις τιμές 1 και 0, με πιθανότητες 0.5 και 0.5.

Άρα $E(X^2) =$

7. Παράδειγμα 4

Η τυχαία μεταβλητή Χ παίρνει τιμές -1,0,1 με πιθανότητα 0.2, 0.5 και 0.3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η $E(X^2)$

Λύση: (Α΄ Τρόπος)

Η X^2 παίρνει μόνο τις τιμές 1 και 0, με πιθανότητες 0.5 και 0.5.

Άρα $E(X^2) = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5$

7. Παράδειγμα 4

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές -1,0,1 με πιθανότητα 0.2, 0.5 και 0.3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η $E(X^2)$

<u>Λύση:</u> (Α΄ Τρόπος)

Η X^2 παίρνει μόνο τις τιμές 1 και 0, με πιθανότητες 0.5 και 0.5.

Άρα $E(X^2) = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5$

Παρατηρούμε ότι $E(X) = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3 = 0.1$

Άρα $E^2(X) = 0.01 \neq E(X^2)$

7. Παράδειγμα 4

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές -1,0,1 με πιθανότητα 0.2, 0.5 και 0.3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η $E(X^2)$

Λύση: (Α' Τρόπος)

Η X^2 παίρνει μόνο τις τιμές 1 και 0, με πιθανότητες 0.5 και 0.5.

Άρα $E(X^2) = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5$

Παρατηρούμε ότι $E(X) = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3 = 0.1$

Άρα $E^2(X) = 0.01 \neq E(X^2)$

Β' Τρόπος (μέσω της g(X))

$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot Pr\{X = x\} =$
$(-1)^2 \cdot 0.2 + (0)^2 \cdot 0.5 + (1)^2 \cdot 0.3 = 0.2 + 0 + 0.3 = 0.5 \qquad \square$

7. Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα νόμισμα (για το οποίο η κεφαλή έχει πιθανότητα p) μέχρι να εμφανιστεί είτε κεφαλή είτε γράμματα για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων;

7. Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα νόμισμα (για το οποίο η κεφαλή έχει πιθανότητα p) μέχρι να εμφανιστεί είτε κεφαλή είτε γράμματα για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων;

Λύση:

Έστω X ο αριθμός των επαναλήψεων. Το ζητούμενο θα συμβεί είτε σε 2 είτε σε 3 επαναλήψεις. Είναι:

7. Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα νόμισμα (για το οποίο η κεφαλή έχει πιθανότητα p) μέχρι να εμφανιστεί είτε κεφαλή είτε γράμματα για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων;

Λύση:

Έστω X ο αριθμός των επαναλήψεων. Το ζητούμενο θα συμβεί είτε σε 2 είτε σε 3 επαναλήψεις. Είναι:

$$Pr\{X=2\} = p \cdot p + (1-p)(1-p) = p^2 + 1 + p^2 - 2p = 2p^2 - 2p + 1$$

7. Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα νόμισμα (για το οποίο η κεφαλή έχει πιθανότητα p) μέχρι να εμφανιστεί είτε κεφαλή είτε γράμματα για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων;

Λύση:

Έστω X ο αριθμός των επαναλήψεων. Το ζητούμενο θα συμβεί είτε σε 2 είτε σε 3 επαναλήψεις. Είναι:

$Pr\{X = 2\} = p \cdot p + (1-p)(1-p) = p^2 + 1 + p^2 - 2p = 2p^2 - 2p + 1$

$Pr\{X = 3\} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$

Άρα $\quad E(X) =$

7. Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα νόμισμα (για το οποίο η κεφαλή έχει πιθανότητα p) μέχρι να εμφανιστεί είτε κεφαλή είτε γράμματα για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων;

<u>Λύση:</u>

Έστω X ο αριθμός των επαναλήψεων. Το ζητούμενο θα συμβεί είτε σε 2 είτε σε 3 επαναλήψεις. Είναι:

$$Pr\{X=2\} = p \cdot p + (1-p)(1-p) = p^2 + 1 + p^2 - 2p = 2p^2 - 2p + 1$$

$$Pr\{X=3\} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

Άρα
$$\begin{aligned} E(X) &= 2(2p^2 - 2p + 1) + 3 \cdot 2 \cdot p(1-p) = \\ &= 4p^2 - 4p + 2 + 6p - 6p^2 = 2p - 2p^2 + 2 \quad \square \end{aligned}$$