# “Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (1η Διάλεξη)

**Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής**

*Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών*

# Λίγα λόγια για τον διδάσκοντα

- Διαχρονικά ερευνητικά ενδιαφέροντα:
  - πιθανοτικοί αλγόριθμοι, τυχαία γραφήματα
  - το διαδίκτυο των πραγμάτων (Internet of Things - IoT)
- Πρόσφατες αιχμές έρευνας
  - ασύρματη μεταφορά ενέργειας (wireless power transfer)
  - digital health (ψηφιακή υγεία)
  - industrial IoT
  - crowdsourcing/crowdsensing
  - smart cities, smart transport, smart buildings
  - socio-psychological aspects of social networks
- Ιστοσελίδα διδάσκοντα:
  `https://www.cti.gr/RD1/nikole/index.html`

# The IoT-Lab @ CEID

Τρέχοντα ερευνητικά έργα με ανταγωνιστική χρηματοδότηση:

- VBD Projects 1 & 2 (Voice Based Diagnostics, απευθείας συμβόλαια με Pfizer)
- EU Project SynAirG
  (indoor air quality)
- EU Project ZDMP
  (zero-defect manufacturing for predictive quality)

IoTLaB
Internet of Things Laboratory
CEID - University of Patras

# The IoT-Lab @ CEID

Βασικές τεχνολογίες

- IoT (sensors, smartphones, wearables, actuators)
- Machine Learning (ML) and AI
- Artificial Intelligence of Things (AIoT)

Ιστοσελίδα εργαστηρίου

- `https://iotlab.ceid.upatras.gr`

# Περιεχόμενα 1ης Διάλεξης

1. Χρησιμότητα και σκοπός του μαθήματος
2. Τρόπος διδασκαλίας και εξέτασης
3. Βασικές έννοιες
4. Είδη δειγματοχώρων
5. Πράξεις με γεγονότα
6. Ορισμοί για την πιθανότητα
7. Αξιωματική θεμελίωση - Μαθηματική πιθανότητα
8. Παραδείγματα

# 1. Χρησιμότητα και σκοπός του μαθήματος

Το μάθημα έχει μαθηματικό χαρακτήρα, αλλά είναι τεράστια και η **πρακτική χρησιμότητα** των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, ιδιαίτερα στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

- Απαραίτητο εργαλείο για :
    - υψηλού επιπέδου Μηχανικό Η/Υ
    - μεταπτυχιακές σπουδές, έρευνα
- Ουσιαστικό προαπαιτούμενο σε πολλά άλλα μαθήματα

# Μερικά Παραδείγματα

- Ξέρουμε (από στατιστικές) την πιθανότητα ένα spam email να έχει ορισμένα χαρακτηριστικά για να είναι spam. Κάποιο email που έχει αυτά τα χαρακτηριστικά, με πόση πιθανότητα είναι πράγματι spam? (νόμος Bayes)
- Θέλουμε να σιγουρευτούμε ότι το ποσοστό ελαττωματικών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που παράγει ένα εργοστάσιο είναι πολύ μικρό. Πόσα (κατά το δυνατόν πολύ λίγα) κυκλώματα πρέπει δειγματοληπτικώς να εξετάσουμε ώστε να είμαστε 99% βέβαιοι; (στατιστικά τεστ).
- Ρίχνουμε 100 φορές ένα νόμισμα και όλες τις φορές το αποτέλεσμα είναι κεφαλή. Είναι περισσότερο πιθανό την επόμενη φορά το αποτέλεσμα να είναι γράμματα; (probability can be counter-intuitive).

# Χρησιμότητα και σκοπός του μαθήματος

Βασικές αιτίες χρησιμότητας πιθανοτήτων:

- τυχαιότητα στην **καθημερινότητα**
- εγγενής τυχαιότητα φαινομένων στις **υπολογιστικές και δικτυακές τεχνολογίες**
- **αποδοτικοί αλγόριθμοι**: σχεδιασμός και ανάλυση μέσω πιθανοτήτων
- χρήση στατιστικής για **data science και big data**

# Ενδεικτικές εφαρμογές πιθανοτήτων και στατιστικής

- **ιατρική, βιολογία, γενετική** (π.χ. εξάπλωση ιού, κληρονομικότητα)
- **οικονομικές επιστήμες** (εκτίμηση οικονομικών μεγεθών, ασφαλιστικά συμβόλαια κλπ)
- **ανάλυση αξιοπιστίας συστημάτων** (π.χ. πυρηνικά εργοστάσια, αεροδρόμια), δηλαδή της πιθανότητας να λειτουργούν ικανοποιητικά στο χρόνο υπό μεταβλητές συνθήκες
- **μελέτη τεχνικών έργων** (π.χ. αντοχή γεφυρών σε ανέμους, επίδραση κυμάτων και ανέμων σε πλατφόρμες εξόρυξης πετρελαίου)
- **μελέτες της κοινής γνώμης** (γκάλοπ, exit polls κλπ)
- **έλεγχος ποιότητας βιομηχανικής παραγωγής** μέσω στατιστικής δειγματοληψίας

# Παραδείγματα εγγενούς τυχαιότητας υπολογιστικών φαινομένων (I)

## Αξιόπιστος Υπολογισμός σε Δίκτυα

Τυχαιότητα: βλάβες πόρων (nodes, links) ενός δικτύου.

Αφαιρετικό μοντέλο: **τυχαίοι γράφοι** κορυφών (nodes) των οποίων οι ακμές (links) υπάρχουν με μια **πιθανότητα p και όχι ντετερμινιστικά.**

# Παραδείγματα εγγενούς τυχαιότητας υπολογιστικών φαινομένων (II)

## Συστήματα Ουρών Αναμονής

Πολλά φαινόμενα και συστήματα:

- εξυπηρετητές (servers, διόδια, ταμεία θεάτρου)
- jobs προς εξυπηρέτηση (emails,αυτοκίνητα, άνθρωποι)
- ουρές αναμονής

Οι αφίξεις είναι απρόσμενες. **Υποθέσεις τυχαιότητας** για εργασίες:

- ρυθμός αφίξεων
- μήκη
- χρόνοι άφιξης

π.χ. υποθέτουμε **πιθανοτικές κατανομές**

# Παραδείγματα εγγενούς τυχαιότητας υπολογιστικών φαινομένων (II)

Σημαντικές (**πιθανοτικές** και όχι ντετερμινιστικές) μετρικές απόδοσης:

- **μέσος χρόνος** εξυπηρέτησης (μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής)
- **μέσα μεγέθη** ουρών π.χ. μνήμη server

# Παραδείγματα εγγενούς τυχαιότητας υπολογιστικών φαινομένων (III)

**Έντονη χρήση πιθανοτήτων σε ψηφιακές επικοινωνίες και σήματα**

- **ο θόρυβος** σε ένα κανάλι επικοινωνίας (λόγω περιβαλλοντικών επιδράσεων) συχνά θεωρείται ότι ακολουθεί **κανονική κατανομή** (Gaussian)
- η **εξασθένηση** ενός σήματος έχει πιθανοτικές συνιστώσες (ακολουθεί συγκεκριμένες πιθανοτικές κατανομές)

## Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

**Τυχαίες επιλογές** (π.χ. νοητή ρίψη ενός νομίσματος) ⇒ **πιο απλοί** από ντετερμινιστικούς.

**Πιο γρήγοροι:** trade-off (αντιστάθμιση):

- μικρή πιθανότητα λάθους
- πολύ καλύτεροι χρόνοι

# Big data, data science and AI

- Big data: τεράστια/πολύπλοκα/αδόμητα σύνολα δεδομένων (google search, genomics, smart cities, meteo data, social media data etc.), every day 2.5 exabytes ($2.5 * 10^{18}$) of data is generated.
- Machine Learning: αλγόριθμοι μάθησης από τα δεδομένα
- Statistical Learning: μοντέλα και υπολογισμοί της προβλεψιμότητας
- Data Science: εξαγωγή γνώσης από δεδομένα, με εργαλεία από mathematics, statistics, machine learning, computer science, engineering, ...

## 2.1 Διδασκαλία και Φροντιστήριο

13 διαλέξεις σε 3 μεγάλες ενότητες

- <u>πιθανότητες με στοιχειώδη μέσα:</u> λεπτές έννοιες (αξιώματα πιθανοτήτων, απαρίθμηση, ανεξαρτησία, δεσμευμένη πιθανότητα)
- <u>πιθανότητες με μαθηματικά εργαλεία</u> (τυχαίες μεταβλητές, ροπές, ανισότητες, γεννήτριες, κατανομές)
- <u>στατιστική</u> (περιγραφική στατιστική, συσχέτιση δεδομένων, εκτιμήτριες συναρτήσεις, διαστήματα εμπιστοσύνης, γραμμική παλινδρόμηση, στατιστικοί έλεγχοι)

Φροντιστήρια : Υπ. Δρ. Κυριάκος Γιαννόπουλος & Στέφανος Παναγιώτου

- Ασκήσεις
- Συμπληρώματα θεωρίας
- Λύσεις παλιών θεμάτων

## 2.2 Συγγράμματα και Σημειώσεις

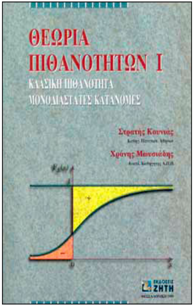
Συγγράμματα Μαθήματος:

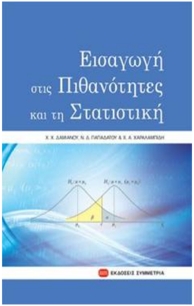
- "Θεωρία Πιθανοτήτων Ι", *Κουνιάς Στρατής και Μωυσιάδης Χρόνης*
- "Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική", Δαμιανού Χ., Χαραλαμπίδης Χ., Παπαδάτος Ν.
- "Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων", Sheldon Ross
- "Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς', Ζιούτας Γεώργιος, 3η έκδοση (2014)

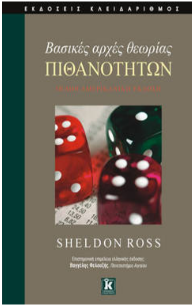
Για Στατιστική οι σημειώσεις:

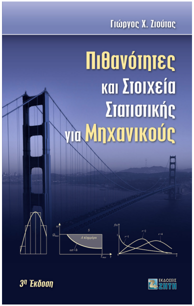
- "Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική (Διδακτικές Σημειώσεις)", *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Α. Χαραλαμπίδης, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 2003*

# Συγγράμματα










- ποιοτικά βιβλία ακριβώς στο πνεύμα του μαθήματος
- μαθηματική ακρίβεια και πληρότητα
- πολλά παραδείγματα και λυμένες ασκήσεις
- πολλές άλυτες ασκήσεις (με απαντήσεις)

# Επιπλέον υλικό

- Βιβλίο: Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L. and Ye, K. (2007) Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Pearson. (In English). (έχει προστεθεί και στα έγγραφα).
- MIT Open Courseware, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και την Στατιστική (περιλαμβάνει βίντεο παραδόσεων, ασκήσεις, κλπ.)
- `https://github.com/telmo-correa/all-of-statistics/blob/master/Chapter%2002%20-%20Probability.ipynb` (θεωρία, ασκήσεις, python programming)

# 2.3 Εξέταση του μαθήματος

1. Πρόοδος
   - εξέταση διάρκειας περίπου 2.5 ωρών, τον Δεκέμβριο
   - η ημερομηνία εξέτασης θα ανακοινωθεί 15 ημέρες νωρίτερα
   - Η πρόοδος δίνει bonus μέχρι και 2 μονάδες στον τελικό βαθμό με την προϋπόθεση ότι ο βαθμός στην πρόοδο είναι προβιβάσιμος και ο βαθμός της τελικής εξέτασης είναι $>= 5$
   - για όλα τα έτη
2. Τελική εξέταση
   - ασκήσεις μόνο - όχι θεωρία
3. Βαθμός Μαθήματος
   - Βαθμός τελικής εξέτασης $+ 0.2 *$ Βαθμός προόδου

# Τυχαιότητα και Πιθανότητα

- **τυχαιότητα**: εγγενής **έλλειψη προτύπου, τάξης και προβλεψιμότητας** σε φαινόμενα και γεγονότα
- **πιθανότητα**: η "**σχετική συχνότητα**" εμφάνισης τυχαίων γεγονότων και φαινομένων
- **λεπτή έννοια** που είναι δύσκολο να κατανοηθεί, ενώ συχνά **αντίκειται στην διαίσθηση** και την "κοινή λογική"
- οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με τις έννοιες αυτές **χωρίς όμως να τις ποσοτικοποιήσουν**
- τον 16ο αιώνα μαθηματικοί υπολόγισαν με ακρίβεια **πιθανότητες για τυχερά παιχνίδια**
- **μόλις τον 20ο αιώνα** αναπτύχθηκαν **αυστηρές, μαθηματικές θεμελιώσεις** για την πιθανότητα

## α) Πείραμα τύχης

- Όχι γνωστό εκ των προτέρων αποτέλεσμα ⇒ "**τυχαίο**"
  - **πείραμα** (υλικό π.χ. ρίχνω ζάρια, ή νοητό π.χ. διαλέγω τυχαίο αριθμό στο $[1, ..., n]$)
  - **φαινόμενο** (καθημερινό π.χ. θερμοκρασία, σεισμός, ή τεχνολογικό π.χ. βλάβη ενός server, χρόνος παράδοσης email)

# 3. Βασικές έννοιες

- Υπάρχει (ή, τουλάχιστον, την υποθέτουμε): δυνατότητα επανάληψης κάτω από ίδιες συνθήκες **(στατιστική ομαλότητα)**.
Για παράδειγμα:

- Υπάρχει: ρίψη ενός ζαριού
- Την υποθέτουμε: διάρκεια συνδιάλεξης:
  - Μεγάλο εύρος χρόνου
  - Μεγάλο πλήθος συνδιαλέξεων
  - Διαφορετικοί συνομιλητές

(λεπτό σημείο: η τυχαιότητα **δεν είναι άγνοια** ή αδυναμία υπολογισμού αλλά **εγγενής ιδιότητα**)

**β) Δειγματοχώρος Ω (sample space)**

-Δειγματοχώρος $\Omega$: Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης π.χ. Ζάρι $\rightarrow \Omega = \{1, 2, ..., 6\}$

-Απλό γεγονός ή αλλιώς, sample point (σημείο/στοιχείο του δειγματοχώρου) (simple event): το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης

-Γεγονός (event):

- σύνολο απλών γεγονότων
- υποσύνολο του δειγματοχώρου

# 3. Βασικές έννοιες

-Πραγματοποίηση γεγονότος: όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός

-Παραδείγματα: τυχαία τοποθέτηση δύο διακριτών σφαιρών σε δύο διακριτά κελιά

# 3. Βασικές έννοιες

-Πραγματοποίηση γεγονότος: όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός

-Παραδείγματα: τυχαία τοποθέτηση δύο διακριτών σφαιρών σε δύο διακριτά κελιά

$\Omega = \{$ (a,b), (ab,-), (-,ab), (b,a) $\}$

# 3. Βασικές έννοιες

-Πραγματοποίηση γεγονότος: όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός

-Παραδείγματα: τυχαία τοποθέτηση δύο διακριτών σφαιρών σε δύο διακριτά κελιά

$\Omega = \{$ (a,b), (ab,-), (-,ab), (b,a) $\}$
A = "υπάρχει άδειο κελί" $= \{$ (ab,-), (-,ab) $\}$

# 3. Βασικές έννοιες

-Πραγματοποίηση γεγονότος: όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός

-Παραδείγματα: τυχαία τοποθέτηση δύο διακριτών σφαιρών σε δύο διακριτά κελιά

Ω = { (a,b), (ab,-), (-,ab), (b,a) }
A = "υπάρχει άδειο κελί" = { (ab,-), (-,ab) }
B = "το πρώτο κελί δεν είναι άδειο" = { (a,b), (b,a), (ab,-) }

# 4. Είδη δειγματοχώρων

Είδη δειγματοχώρων:

- πεπερασμένοι
- άπειροι
  - αριθμήσιμοι $\longleftrightarrow N$
    - $\Sigma$
    - αλγόριθμοι (πλήθος βημάτων)
  - μη αριθμήσιμοι
    - hardware
    - επεξεργασία σημάτων

- Διακριτοί: πεπερασμένοι ή αριθμήσιμα άπειροι
- Συνεχείς: μη αριθμήσιμα άπειροι

# 4. Είδη δειγματοχώρων

Παραδείγμα 1: Ρίχνω ένα νόμισμα μέχρι για πρώτη φορά το αποτέλεσμα να είναι “Γράμματα”.

# 4. Είδη δειγματοχώρων

<u>Παραδείγμα 1:</u> Ρίχνω ένα νόμισμα μέχρι για πρώτη φορά το αποτέλεσμα να είναι "Γράμματα".

$\Omega = \{$Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ, ... $\} \rightarrow$ άπειρος αριθμήσιμος δειγματοχώρος λόγω αντιστοιχίας με τον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων $1, 2, 3, 4, \cdots$

Παραδείγματα συνεχών δειγματοχώρων:

- Ο χρόνος για να παραδοθεί ένα email
- Ο χρόνος ζωής μιας μπαταρίας
- Η διάρκεια μίας συνδιάλεξης
- Το ύψος ενός ανθρώπου

# 4. Είδη δειγματοχώρων

Η σημασία σωστής εύρεσης του δειγματοχώρου

Ρίχνω δύο ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να φέρω δύο άσσους
Pr{ δύο άσσους } = ?

Η σημασία σωστής εύρεσης του δειγματοχώρου

Ρίχνω δύο ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να φέρω δύο άσσους
Pr{ δύο άσσους } = ?

- Σωστή λύση

$$\frac{1}{36}$$

## Η σημασία σωστής εύρεσης του δειγματοχώρου

Ρίχνω δύο ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να φέρω δύο άσσους
Pr{ δύο άσσους } = ?

- Σωστή λύση

$$\frac{1}{36}$$

- Λάθος λύση

$$\left.\begin{matrix} \Omega = \{0, 1, 2\} \\ \text{Ισοπίθανα} \end{matrix}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}$$

# 5. Πράξεις με γεγονότα

Γεγονότα $\longleftrightarrow$ Σύνολα $\Rightarrow$ Πράξεις με γεγονότα $\longleftrightarrow$ Πράξεις με σύνολα

- Συμπλήρωμα $\overline{A}$
- Τομή $\cap$
- Ένωση $\cup$

**Ερμηνεία**

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{A}$ | : | δε συμβαίνει το Α |
| $A \cap B$ | : | και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν |
| $A \cup B$ | : | ένα τουλάχιστον γεγονός συμβαίνει |

# 5. Πράξεις με Γεγονότα

- Α, Β ασυμβίβαστα (ξένα) $\longleftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

- $A_1, A_2, \cdots$ διαμέριση του $\Omega$ $\longleftrightarrow$
  - ασυμβίβαστα ανά δύο $\Rightarrow \forall\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
  - η ένωσή τους είναι $\Omega \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \Omega$

- Διαφορά:
  - συμβαίνει το Α
  - δεν συμβαίνει το Β

  Αποδεικνύεται ότι $A - B = A \cdot \overline{B}$

- Συμμετρική διαφορά (ακριβώς ένα): $A \bigoplus B = (A - B) \cup (B - A) = A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B$

# 5. Πράξεις με Γεγονότα

## Ιδιότητες

1. Ταυτοδυναμία: $A \cup A = A \qquad A \cdot A = A$
2. Ταυτοτικές: $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cdot \Omega = A$
3. Συμπληρώματος: $A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$
4. Αντιμεταθετικές: $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
5. Προσεταιριστικές: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. Επιμεριστικές: $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# 6.1 Ορισμοί για την πιθανότητα

Ορισμός κλασσικής πιθανότητας (De Moivre, 1711) (Laplace, 1812)

Πειράματα

- Πεπερασμένο πλήθος σημείων δειγματοχώρου
- Ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα

$$\mathrm{P(A)} = \frac{N(A)}{N} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών για το A αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Παράδειγμα: Ρίξιμο ζαριού: A = “Αποτέλεσμα περιττό” = $\{1, 3, 5\}$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{6}$$

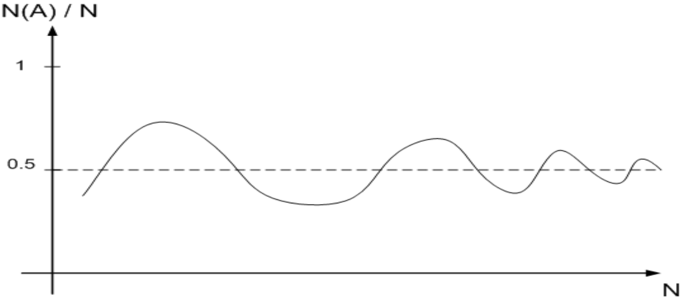
- χρήσιμος στην πράξη
- περιοριστικές υποθέσεις

# 6.2 Όριο σχετικής συχνότητας

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$$

Πολλές επαναλήψεις, μεγάλα μεγέθη ⇒ **σύγκλιση σε μια τιμή (πιθανότητα)**

Παράδειγμα: Συμμετρικό νόμισμα $\Omega = \{K, \Gamma\}$   $A = \{K\}$



# 6.2 Όριο σχετικής συχνότητας

- Έχει εγκαταλειφθεί ως προσπάθεια θεμελίωσης της έννοιας της πιθανότητας.
- **Πειραματικός έλεγχος πιθανότητας** γεγονότος (π.χ. του ισοπίθανου) όταν υπάρχει υπάρχει αμφισβήτηση (π.χ. με προσομοίωση σε υπολογιστή).

# 7. Αξιωματική Θεμελίωση - Μαθηματική Πιθανότητα (Kolmogorov, 1933)

**Ορισμός**

Πιθανότητα = συνολοσυνάρτηση: υποσύνολα του $\Omega \Rightarrow$ πραγματικούς αριθμούς: δηλαδή γεγονότα $\Rightarrow$ πιθανότητες

# 7. Αξιωματική Θεμελίωση - Μαθηματική Πιθανότητα (Kolmogorov, 1933)

**Ορισμός**

Πιθανότητα = συνολοσυνάρτηση: υποσύνολα του $\Omega \Rightarrow$ πραγματικούς αριθμούς: δηλαδή γεγονότα $\Rightarrow$ πιθανότητες

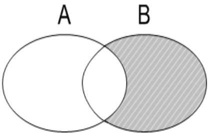
**Αξιώματα**

$\mathbf{1}_o$ **Αξίωμα** : $\mathrm{P(A)} \geq 0$
$\mathbf{2}_o$ **Αξίωμα** : $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
$\mathbf{3}_o$ **Αξίωμα** : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

### Ιδιότητες

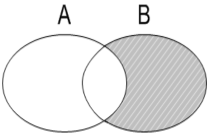
1. $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$
2. $\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$
3. $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$ - $\mathrm{P(A \cap B)}$
4. $\mathrm{P}(\cup_i \mathrm{A}_i) \leq \sum_i P(A_i)$ Ανισότητα του Boole, άνω φράγμα για πιθανότητα ένωσης γεγονότων

Απόδειξη: 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



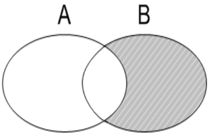

Απ.

Απόδειξη: 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$




Απ. Εκφράζω το $A \cup B$ ως δύο ξένα σύνολα:

Απόδειξη: 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

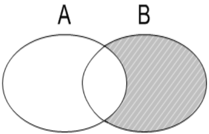



Απ. Εκφράζω το $A \cup B$ ως δύο ξένα σύνολα:

$$A \cup B = A \cup B \cdot \overline{A} \Rightarrow$$

## 7. Αξιωματική Θεμελίωση - Μαθηματική Πιθανότητα

Απόδειξη: 3) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

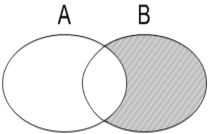



Απ.Εκφράζω το A ∪ B ως δύο ξένα σύνολα:

$$A \cup B = A \cup B \cdot \overline{A} \Rightarrow$$

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B \cdot \overline{A}\} \quad (1)$$

Απόδειξη: 3) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)




Απ. Εκφράζω το A ∪ B ως δύο ξένα σύνολα:

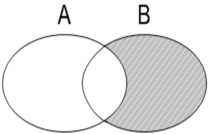
$$A \cup B = A \cup B \cdot \overline{A} \Rightarrow$$

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B \cdot \overline{A}\} \ (1)$$

Τώρα εκφράζω το B ως 2 ξένα σύνολα:

# 7. Αξιωματική Θεμελίωση - Μαθηματική Πιθανότητα

Απόδειξη: 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



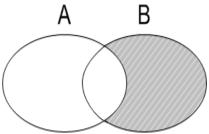

Απ.Εκφράζω το $A \cup B$ ως δύο ξένα σύνολα:

$$A \cup B = A \cup B \cdot \overline{A} \Rightarrow$$
$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B \cdot \overline{A}\} \ (1)$$

Τώρα εκφράζω το B ως 2 ξένα σύνολα:

$$B = B \cdot \Omega = B \cdot (A \cup \overline{A}) \Rightarrow B = B \cdot \overline{A} \cup A \cdot B \Rightarrow$$

Απόδειξη: 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



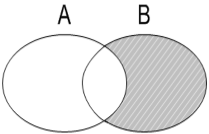

Απ. Εκφράζω το $A \cup B$ ως δύο ξένα σύνολα:

$$A \cup B = A \cup B \cdot \overline{A} \Rightarrow$$
$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B \cdot \overline{A}\} \ (1)$$

Τώρα εκφράζω το B ως 2 ξένα σύνολα:

$$B = B \cdot \Omega = B \cdot (A \cup \overline{A}) \Rightarrow B = B \cdot \overline{A} \cup A \cdot B \Rightarrow$$
$$\Pr\{B\} = \Pr\{B \cdot \overline{A}\} + \Pr\{A \cdot B\} \Rightarrow$$

Απόδειξη: 3) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)




Απ.Εκφράζω το A ∪ B ως δύο ξένα σύνολα:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\cdot\overline{A} \Rightarrow$$
$$\Pr\{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\} = \Pr\{\mathrm{A}\} + \Pr\{\mathrm{B}\cdot\overline{A}\} \ (1)$$

Τώρα εκφράζω το B ως 2 ξένα σύνολα:

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}\cdot\Omega = \mathrm{B}\cdot(\mathrm{A}\cup\overline{A}) \Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{B}\cdot\overline{A} \cup \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} \Rightarrow$$
$$\Pr\{\mathrm{B}\} = \Pr\{\mathrm{B}\cdot\overline{A}\} + \Pr\{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\} \Rightarrow$$
$$\Pr\{\mathrm{B}\cdot\overline{A}\} = \Pr\{\mathrm{B}\} - \Pr\{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\} \ (2)$$

# 8. Παράδειγμα 1

α) Γεγονότα A, B, C :     Ακριβώς 2 συμβαίνουν:

# 8. Παράδειγμα 1

α) Γεγονότα A, B, C :   Ακριβώς 2 συμβαίνουν:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\overline{C} \cup \mathrm{A}\cdot\overline{B}\cdot\mathrm{C} \cup \overline{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$$

# 8. Παράδειγμα 1

α) Γεγονότα A, B, C :  Ακριβώς 2 συμβαίνουν:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\overline{C} \cup \mathrm{A}\cdot\overline{B}\cdot\mathrm{C} \cup \overline{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$$

β) Γεγονότα A, B, C :  Όχι περισσότερα από 2 συμβαίνουν

# 8. Παράδειγμα 1

α) Γεγονότα A, B, C : Ακριβώς 2 συμβαίνουν:

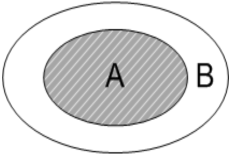
$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\overline{C} \cup \mathrm{A}\cdot\overline{B}\cdot\mathrm{C} \cup \overline{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$$

β) Γεγονότα A, B, C : Όχι περισσότερα από 2 συμβαίνουν

όχι 3 $\Rightarrow \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ (διαφορετικά, τουλάχιστον ένα δεν συμβαίνει)

# 8. Παράδειγμα 2

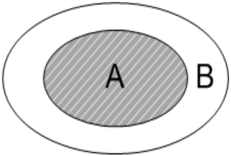
Να αποδείξετε ότι $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \Pr\{A\} \leq \Pr\{B\}$




<u>Απόδειξη:</u>

# 8. Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \Pr\{\mathrm{A}\} \leq \Pr\{\mathrm{B}\}$




Απόδειξη:

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\cdot\overline{A} \Rightarrow$$
$$\Pr\{\mathrm{B}\} = \Pr\{\mathrm{A}\} + \Pr\{\mathrm{B}\cdot\overline{A}\} \Rightarrow$$
$$\Pr\{\mathrm{B}\} \geq \Pr\{\mathrm{A}\}$$

# 8. Παράδειγμα 3

Να δειχθεί: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)+...+\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ (ανισότητα Boole)

Απόδειξη:

# 8. Παράδειγμα 3

Να δειχθεί: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)+...+\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ (ανισότητα Boole)

<u>Απόδειξη:</u>

$$\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup ... \cup \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1} \cup \mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cup \cdots \Rightarrow$$

# 8. Παράδειγμα 3

Να δειχθεί: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)+...+\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ (ανισότητα Boole)

Απόδειξη:

$$\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1} \cup \mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cup \cdots \Rightarrow$$
$$\Pr(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$\Pr\{\mathrm{A}_1\}+\Pr\{\mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1}\}+\Pr\{\mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\} + \cdots$$

# 8. Παράδειγμα 3

Να δειχθεί: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ (ανισότητα Boole)

<u>Απόδειξη:</u>

$$\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1} \cup \mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cup \cdots \Rightarrow$$

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$\mathrm{Pr}\{\mathrm{A}_1\}+\mathrm{Pr}\{\mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1}\}+\mathrm{Pr}\{\mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\} + \cdots$$

Αλλά $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{Pr}\{\mathrm{A}\} \leq \mathrm{Pr}\{\mathrm{B}\}$

# 8. Παράδειγμα 3

Να δειχθεί: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ (ανισότητα Boole)

<u>Απόδειξη:</u>

$$\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1} \cup \mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cup \cdots \Rightarrow$$

$$\Pr(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

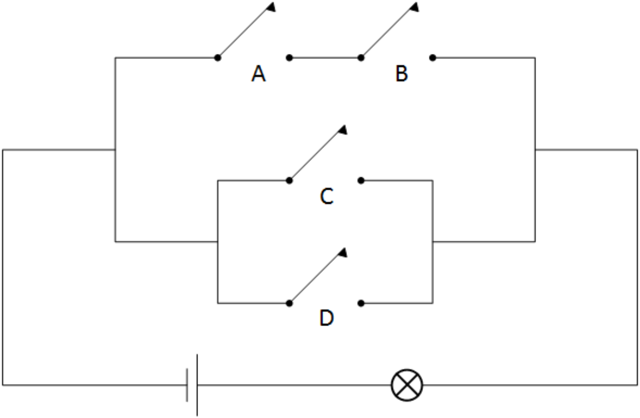
$$\Pr\{\mathrm{A}_1\}+\Pr\{\mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1}\}+\Pr\{\mathrm{A}_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\} + \cdots$$

Αλλά $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \Pr\{\mathrm{A}\} \leq \Pr\{\mathrm{B}\}$

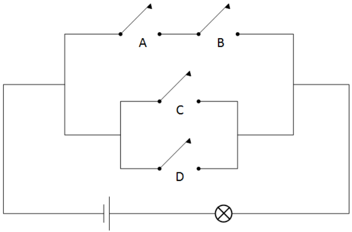
και αρκεί να δούμε ότι $\mathrm{A}_2 \cdot \overline{A_1} \subset \mathrm{A}_2$ κ.ο.κ.

# 8. Παράδειγμα 4

Στο κύκλωμα του σχήματος κάθε διακόπτης είναι κλειστός με πιθανότητα $p$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Πόση η πιθανότητα να ανάψει ο λαμπτήρας;



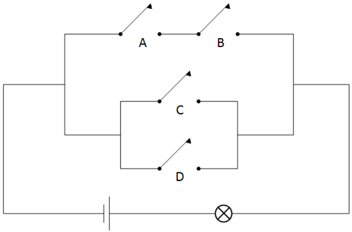
# 8. Παράδειγμα 4 (συνέχεια)



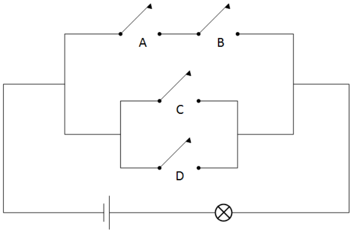

Λύση:

Έστω $A_K, B_K, C_K D_K$ τα γεγονότα "Είναι κλειστός ο διακόπτης A, B, C, D" αντίστοιχα.

# 8. Παράδειγμα 4 (συνέχεια)




<u>Λύση:</u>
Έστω $A_K, B_K, C_K D_K$ τα γεγονότα "Είναι κλειστός ο διακόπτης A, B, C, D" αντίστοιχα.
Ο λαμπτήρας ανάβει με πιθανότητα



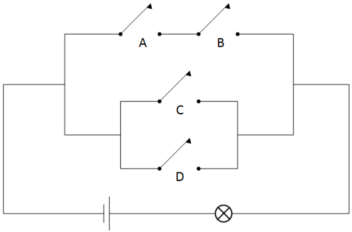

Λύση:

Έστω $A_K, B_K, C_K D_K$ τα γεγονότα "Είναι κλειστός ο διακόπτης A, B, C, D" αντίστοιχα.

Ο λαμπτήρας ανάβει με πιθανότητα

$Pr\{A_K \cdot B_K \cup (C_K \cup D_K)\} =$

# 8. Παράδειγμα 4 (συνέχεια)




Λύση:

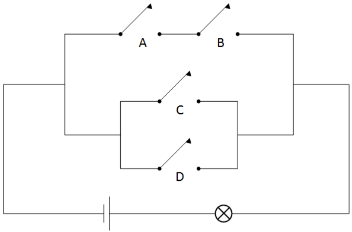
Έστω $A_K, B_K, C_K D_K$ τα γεγονότα "Είναι κλειστός ο διακόπτης A, B, C, D" αντίστοιχα.

Ο λαμπτήρας ανάβει με πιθανότητα

$$Pr\{A_K \cdot B_K \cup (C_K \cup D_K)\} =$$

$$= Pr\{A_K \cdot B_K\} + Pr\{C_K \cup D_K\} - Pr\{A_K B_K \cdot (C_K \cup D_K)\} =$$

# 8. Παράδειγμα 4 (συνέχεια)




Λύση:

Έστω $A_K, B_K, C_K D_K$ τα γεγονότα "Είναι κλειστός ο διακόπτης A, B, C, D" αντίστοιχα.

Ο λαμπτήρας ανάβει με πιθανότητα

$$Pr\{A_K \cdot B_K \cup (C_K \cup D_K)\} =$$
$$= Pr\{A_K \cdot B_K\} + Pr\{C_K \cup D_K\} - Pr\{A_K B_K \cdot (C_K \cup D_K)\} =$$
$$= p \cdot p + (p + p - p^2) - p^2 \cdot (p + p - p^2) = p^4 - 2p^3 + 2p$$