“Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (5η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό Έτος 2023 - 2024

Περιεχόμενα 5ης Διάλεξης

1. Ανισότητα Markov

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{c}\text{X μη αρνητική} \\ \forall \ \mathrm{t} > 0\end{array}\right\} \Pr\{\mathrm{X} \geq \mathrm{t}\ \} \leq \frac{E(X)}{t}$$

1. Ανισότητα Markov

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{c}\text{X μη αρνητική} \\ \forall\ \mathrm{t} > 0\end{array}\right\} \Pr\{\mathrm{X} \geq \mathrm{t}\ \} \leq \frac{E(X)}{t}$$

Φυσική σημασία

$-t = 2 \cdot \mu \Rightarrow Pr\{X \geq 2 \cdot \mu\} \ \leq \dfrac{\mu}{2 \cdot \mu} = \dfrac{1}{2}$

$-t = 3 \cdot \mu \Rightarrow Pr\{X \geq 3 \cdot \mu\} \ \leq \dfrac{1}{3}$

Γενικά: $Pr\{X \geq t \cdot \mu\} \leq \dfrac{1}{t}$
Επομένως, πρόκειται για ανισότητα συγκέντρωσης των τιμών μιας τ.μ. γύρω από τη μέση τιμή της.

1. Ανισότητα Markov - Απόδειξη

$$E(X) = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} \geq \sum_{x \geq t} x \cdot Pr\{X = x\}$$

$$\geq \sum_{x \geq t} t \cdot Pr\{X = x\} = t \cdot \sum_{x \geq t} Pr\{X = x\} = t \cdot Pr\{X \geq t\} \; \square$$

Σχόλιο: Η ανισότητα Markov απαιτεί μόνο γνώση της μέσης τιμής. Εφαρμόζεται εύκολα, αλλά δεν είναι πάντα αρκετά ισχυρή.

2. Διασπορά - Ορισμός

Ορισμός διασποράς (variance)

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 \cdot Pr\{X = x\}$$

όπου $\mu = E(X)$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ (τυπική απόκλιση)

Φυσική σημασία: μέτρο αποκλίσεων από τη μέση τιμή (μέση τιμή τετραγώνου αποκλίσεων από τη μέση τιμή - πιθανοτικά "ζυγισμένο" άθροισμα αυτών των αποκλίσεων)

2. Variance - Ιδιότητες

Ιδιότητες

1) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
2) Αν X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ (προσθετικότητα)
3) $Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X)$

Απόδειξη 1)

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\cdot\mu\cdot X + \mu^2\right] =$$

$$= E(X^2) - 2\cdot\mu\cdot E(X) + E(\mu^2) = E(X^2) - 2\cdot\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

2. Variance - Ιδιότητες (προαιρετικά)

Απόδειξη 2)

$$Var(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - E^2(X+Y) =$$

$$E\left[X^2 + 2 \cdot X \cdot Y + Y^2\right] - [E(X)+E(Y)]^2 =$$

$$E(X^2)+2\cdot E(X\cdot Y)+E(Y^2)-E^2(X)-2\cdot E(X)\cdot E(Y)-E^2(Y) =$$

(λόγω ανεξαρτησίας ισχύει: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$)

$$= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) =$$

$$= Var(X) + Var(Y)$$

3. Συνδιασπορά - Ορισμός

Ορισμός συνδιασποράς (covariance)

Καλούμε συνδιασπορά (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y την:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

<u>Βασική ιδιότητα:</u>

Είναι $Cov(X,Y) = E[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)] =$
$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

Άρα Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)

<u>Φυσική σημασία:</u>

Αν X,Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$
Δηλαδή η συνδιασπορά είναι μέτρο της εξάρτησης δύο τ.μ.

3. Συνδιασπορά - Παρατήρηση (προαιρετικά)

Παρατήρηση:

Το αντίστροφο δεν ισχύει! δηλαδή η συνδιασπορά μπορεί να είναι 0 ακόμα και όταν οι τυχαίες μεταβλητές είναι εξαρτημένες. πχ.

$$Pr\{X=0\} = Pr\{X=1\} = Pr\{X=-1\} = \frac{1}{3}$$

$$\text{και έστω} \qquad Y = \begin{cases} 0, \text{ αν } X \neq 0 \\ 1, \text{ αν } X = 0 \end{cases}$$

Οπότε προφανώς $X \cdot Y = 0$, οπότε $E(XY) = 0$.

Αλλά $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$

και $E(Y) = 0 \cdot Pr\{X \neq 0\} + 1 \cdot Pr\{X = 0\} = \frac{1}{3}$

Άρα $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

ενώ οι X και Y είναι προφανώς εξαρτημένες.

3. Συνδιασπορά - Ιδιότητες

Ιδιότητες

(ι) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

(ιι) $Cov(X,X) = Var(X)$

(ιιι) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i}\sum_{j \neq i} Cov(X_i, X_j)$

Απόδειξη της (ιι):

$$\begin{aligned} Cov(X,X) &= E(X \cdot X) - E(X)E(X) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) = \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

4. Ανισότητα Chebyshev

Θεώρημα

$$Pr\{|X-\mu| \geq t\} \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

Φυσική σημασία: $Var(X) \downarrow \Rightarrow Pr\{|X-\mu| \geq t\} \downarrow \Rightarrow$ μικρές αποκλίσεις, υψηλή συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή π.χ.

$$Pr\{|X-\mu| \geq 2\cdot\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{4\cdot\sigma^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$Pr\{|X-\mu| \leq 2\cdot\sigma\} \geq 0.75$ (δηλαδή οποιαδήποτε τ.μ. συγκεντρώνεται $\pm$ 2 τυπικές αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή με πιθανότητα ≥ 0.75). Επίσης:

$$Pr\{|X-\mu| \geq 3\cdot\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{9\cdot\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

4. Ανισότητα Chebyshev

Απόδειξη: Από την ανισότητα Markov:

$$Pr\{|X-\mu| \geq t\} = Pr\left\{(X-\mu)^2 \geq t^2\right\} \leq \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{t^2} = \frac{Var(X)}{t^2} \qquad \square$$

4. Ανισότητα Chebyshev - Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα όπου η Chebyshev δίνει ακριβές αποτέλεσμα

$$X = \begin{cases} k, & \frac{1}{2 \cdot k^2} \\ -k, & \frac{1}{2 \cdot k^2} \\ 0, & 1 - \frac{1}{k^2} \end{cases}$$

$$\mu = k \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} - k \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + 0 = 0$$

$$Var(X) = (k-0)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + (-k-0)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot k^2} + (0-0)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

4. Ανισότητα Chebyshev - Παράδειγμα (Συνέχεια)

Από την Chebyshev έχω:

$$Pr\{|X| \geq k\} = Pr\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Από την *pdf* έχω:

$$Pr\{|X| \geq k\} = Pr\{X \geq k\} + Pr\{X \leq -k\} =$$

$$Pr\{X = k\} + Pr\{X = -k\} = \frac{1}{2 \cdot k^2} + \frac{1}{2 \cdot k^2} = \frac{1}{k^2}$$

δηλαδή το άνω φράγμα είναι ακριβές. Αλλά πολλές φορές τα άνω φράγματα της Chebyshev δεν είναι πολύ ακριβή $\Rightarrow$ μελετάμε υψηλότερες ροπές

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

<u>Λύση:</u>

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1+2+\cdots+6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Είναι $E(X^2) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Είναι $E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1+2+\cdots+6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Είναι $E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

Άρα $Var(X) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Είναι $E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

Άρα $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) =$

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η διασπορά κατά την ρίψη ενός ζαριού

Λύση:

Έστω X η τ.μ. των αποτελεσμάτων του ζαριού.

Είναι $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = (1 + 2 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Είναι $E(X^2) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

Άρα $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

Παράδειγμα

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Παράδειγμα

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ αν η επιστολή i μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Παράδειγμα

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. $X_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ αν η επιστολή i μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.

Παράδειγμα

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. $X_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ αν η επιστολή i μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.

Είναι $E(X_i) = 1 \cdot Pr\{\text{επιστολή i σε σωστό φάκελο}\} =$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Παράδειγμα

Μία γραμματέας βάζει τυχαία n επιστολές σε n φακέλους. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των επιστολών που μπαίνουν στο σωστό φάκελο;

Λύση: Έστω δεικνύουσες τ.μ. $X_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ αν η επιστολή i μπαίνει στο σωστό φάκελο} \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ο αριθμός των επιστολών σε σωστό φάκελο.
Είναι $E(X_i) = 1 \cdot Pr\{\text{επιστολή i σε σωστό φάκελο}\} =$
$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
Άρα $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$
Άρα κατα μέση τιμή 1 επιστολή θα μπει σε σωστό φάκελο. □

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

<u>Λύση:</u>

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ , όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ , όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

Είναι $Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 =$

$$= p - p^2 = p(1-p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

<u>Λύση:</u>

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ , όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

Είναι $Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 =$

$$= p - p^2 = p(1-p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Επίσης $Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

<u>Λύση:</u>

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ , όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

Είναι $Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 =$

$$= p - p^2 = p(1-p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Επίσης $Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$

Αλλά $E(X_i \cdot X_j) = 1 \cdot Pr\{X_i = 1 \cap X_j = 1\} =$

$$= Pr\{X_i = 1\} Pr\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Παράδειγμα 3 (προαιρετικά)

Να βρεθεί η διασπορά στο παράδειγμα 2

Λύση:

$$\text{Είναι } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ , όπου } X_i = \begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα } p = \frac{1}{n} \\ 0, \text{ με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

Είναι $Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 1^2 p + 0^2(1-p) - p^2 =$

$$= p - p^2 = p(1-p) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Επίσης $Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$

Αλλά $E(X_i \cdot X_j) = 1 \cdot Pr\{X_i = 1 \cap X_j = 1\} =$

$$= Pr\{X_i = 1\} Pr\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Άρα $Cov(X_i, X_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$

Παράδειγμα 3 - Συνέχεια (προαιρετικά)

Οπότε από τη σχέση

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i} \sum_{j \neq i} Cov(X_i, X_j)$$

Παράδειγμα 3 - Συνέχεια (προαιρετικά)

Οπότε από τη σχέση

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i} \sum_{j \neq i} Cov(X_i, X_j)$$

Προκύπτει ότι

$$Var(X) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

$\square$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

Απόδειξη:

Είναι $E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0$:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

Απόδειξη:

Είναι $E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

και (λόγω ανεξαρτησίας):

$$Var\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Παράδειγμα 4 (the weak law of large numbers)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με την ίδια κατανομή και ίδια πεπερασμένη μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διασπορά $Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε, $\forall \epsilon > 0:$
$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \to 0$ καθώς $n \to \infty$

<u>Απόδειξη:</u>

Είναι $E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

και (λόγω ανεξαρτησίας):

$$Var\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Άρα: $Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2} \to 0$ $\square$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα``κεφαλή''} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα``γράμματα''} \end{cases}$$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα“κεφαλή”} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα“γράμματα”} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα“κεφαλή”} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα“γράμματα”} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right\} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

δηλαδή ο αριθμός των αποτελεσμάτων κεφαλή σε n επαναλήψεις συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο $\frac{n}{2}$

Φυσική σημασία

Φυσική σημασία: Ο αριθμητικός μέσος όρος μιας ακολουθίας n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται ισχυρά γύρω από αυτή τη μέση τιμή, καθώς το n μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο.

π.χ. αν ρίξω n φορές ένα νόμισμα και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν αποτέλεσμα“κεφαλή”} \\ 0, & \text{αν αποτέλεσμα“γράμματα”} \end{cases}$$

τότε $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mu$ και επομένως:

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right\} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

δηλαδή ο αριθμός των αποτελεσμάτων κεφαλή σε n επαναλήψεις συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο $\frac{n}{2}$

Παρατήρηση: Ωστόσο, σε κάθε ρίψη η πιθανότητα για “κεφαλή” είναι πάντα $\frac{1}{2}$ ανεξαρτήτως της “ιστορίας”!

π.χ. $Pr\{$“κεφαλή”$|$“κεφαλή” στις 100 τελευταίες ρίψεις$\} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

<u>Λύση:</u>
Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

<u>Λύση:</u>
Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:
Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1 X_2) + 2E(X_1)E(X_2) =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$

και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$

$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$

$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1 X_2) + 2E(X_1)E(X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28$

Άρα

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1 X_2) + 2E(X_1)E(X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28$

Άρα $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} =$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:
Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$
και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$
$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1 X_2) + 2E(X_1)E(X_2) =$
$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28$

Άρα $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} = Pr\{|X_1 - X_2 - 0| > 15\} \leq$

Παράδειγμα 5

Έστω $E(X_1) = 75, E(X_2) = 75, Var(X_1) = 10, Var(X_2) = 12$ και $Cov(X_1, X_2) = -3$. Βρείτε άνω φράγμα για την $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\}$.

Λύση:

Είναι $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 75 - 75 = 0$

και $Var(X_1 - X_2) = Var[X_1 + (-1)X_2] =$

$= Var(X_1) + Var[(-1)X_2] + \sum_{i \neq j} Cov[X_1, (-1)X_2] =$

$= Var(X_1) + (-1)^2 Var(X_2) + Cov(X_1, -X_2) + Cov(-X_2, X_1) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2E(X_1(-X_2)) - 2E(X_1)E(-X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2E(X_1X_2) + 2E(X_1)E(X_2) =$

$= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 10 + 12 - 2(-3) = 28$

Άρα $Pr\{|X_1 - X_2| > 15\} = Pr\{|X_1 - X_2 - 0| > 15\} \leq$

$$\leq \frac{Var(X_1 - X_2)}{15^2} = \frac{28}{225} \qquad \square$$

Ροπές Moments - Διάφορα είδη

- ν-οστή ροπή περί την τιμή α: $\alpha_\nu = E\left[(X-\alpha)^\nu\right]$
- ν-οστή ροπή περί την αρχή: $\mu'_\nu = E\left[X^\nu\right]$
- ν-οστή ροπή περί τη μέση τιμή: $\mu_\nu = E\left[(X-\mu)^\nu\right]$
- ν-οστή παραγοντική ροπή:
  $E\left[X^{\underline{\nu}}\right] = E\left[X \cdot (X-1) \cdots (X-\nu+1)\right]$

οπότε

- μέση τιμή: 1η ροπή περί την αρχή
- διασπορά: 2η ροπή περί τη μέση τιμή

Ροπές Moments

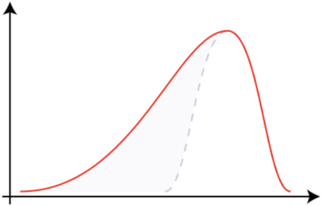
Συντελεστής λοξότητας:

$$\lambda = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

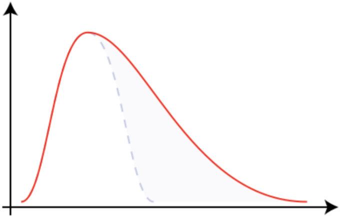
Συντελεστής κύρτωσης:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] - 3$$

Ροπές Moments

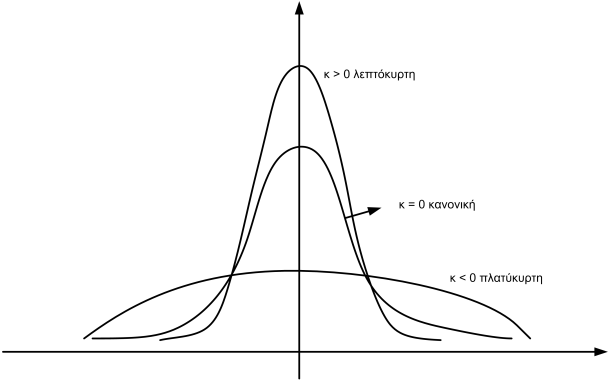


$\lambda < 0$ λοξή αριστερά



$\lambda > 0$ λοξή δεξιά

Ροπές Moments



Η κυρτότητα της τυπικής κανονικής κατανομής είναι 0.

Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Ορισμός

$< g_n >= g_0, \;\; g_1, \;\; \cdots \;\; g_n, \cdots$

$$\Rightarrow G(z) = g_0 + g_1 \cdot z + g_2 \cdot z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^n$$

π.χ. $< g_n >= 1 \Rightarrow G(z) = \sum_n z^n = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$

Γενικά για γεννήτριες συναρτήσεις

Σημασία:

Μια πυκνή αναραπαράσταση της ακολουθίας που την καθορίζει μονοσήμαντα

Δηλαδή $F(z) = G(z) \Leftrightarrow f_n = g_n, \forall n$

Αν ξέρουμε την γεννήτρια, μπορούμε να βρούμε την ακολουθία αφού g_n είναι ο συντελεστής του z^n στο ανάπτυγμα της γεννήτριας σε σειρά

Μερικές Ιδιότητες

- $f_n + g_n \Leftrightarrow F(z) + G(z)$
- $c^n \cdot g_n \Leftrightarrow G(c \cdot z)$ $\qquad (c = -1 \Rightarrow$ εναλλασσόμενα πρόσημα$)$
- convolution (συνέλιξη):

$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \cdots$

$g_0 \quad g_1 \quad g_2 \cdots$ $\qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot g_{n-k} \Leftrightarrow F(z) \cdot G(z)$

- άθροισμα πρώτων όρων ακολουθίας (συνέλιξη με 1):

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \Leftrightarrow F(z) \cdot \frac{1}{1-z}$$

Πιθανογεννήτριες

Ορισμός

$$\Pi(z) = E\left[z^X\right] = \sum_x z^x \cdot Pr\{X = x\}$$

Χρήσιμες Ιδιότητες

$$\Pi'(z) = \sum_x x \cdot z^{x-1} \cdot Pr\{X = x\}$$

$$\Rightarrow \Pi'(1) = \sum_x x \cdot Pr\{X = x\} \text{ δηλαδή } \Pi'(1) = E(X)$$

$$\sigma^2 = \Pi''(1) + \Pi'(1) - \left(\Pi'(1)\right)^2$$

Δηλαδή η πιθανογεννήτρια "γεννά" τις πιθανότητες των τιμών x της μεταβλητής, οι οποίες ειναι οι συντελεστές των z^x στο ανάπτυγμα της πιθανογεννήτριας σε δυναμοσειρά.

Πιθανογεννήτριες

Διωνυμική

Διωνυμική κατανομή B(n,p): #επιτυχιών σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις, κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p

$$Pr\{X = x\} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \ \ x = 0, 1, \cdots, n \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{x=0}^{n} z^x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (pz)^x \cdot q^{n-x} = (p \cdot z + q)^n$$

$$\Rightarrow \Pi'(1) = n \cdot (p \cdot z + q)^{n-1} \cdot p|_{z=1} = n \cdot (p \cdot 1 + q)^{n-1} \cdot p = n \cdot p$$

Poisson

Κατανομή Poisson(λ): για 'σπάνια' γεγονότα που συμβαίνουν με ρυθμό λ.

$$f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \;\; x = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow$$

$$\Pi(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot z)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = e^{\lambda \cdot (z-1)}$$

$$\Pi'(1) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (z-1)}|_{z=1} \Rightarrow \Pi'(1) = E\left[X\right] = \lambda$$

Πιθανογεννήτριες

Σύγκλιση Διωνυμικής → Poisson λ = np

$$\Pi_1(z) = (p \cdot z + 1 - p)^n = (1 + p \cdot (z-1))^n = \left[1 + \frac{\lambda \cdot (z-1)}{n}\right]^n$$

$$\left(\left[1 + \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda \cdot (z-1)}}\right]^{\frac{n}{\lambda \cdot (z-1)}}\right)^{\lambda \cdot (z-1)} \to_\infty e^{\lambda \cdot (z-1)} = \Pi_2(z)$$

Δηλαδή η διωνυμική προσεγγίζεται καλά από την Poisson, κάτι που έχει μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Ροπογεννήτριες

Ορισμός

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\}$$

Στη συνεχή περίπτωση: $M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

Παρατήρηση: πρόκειται όχι για αριθμό αλλά για συνάρτηση μιας παραμέτρου t.

Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας

Είναι: $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$$

Παραγωγίζοντας:

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} f(x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt}\left[e^{tx} f(x)\right] \Rightarrow$$

$$M'(t) = \sum_x x \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow M'(0) = \sum_x x \cdot f(x) = E(X)$$

Δηλαδή, η τιμή της πρώτης παραγώγου της ροπογεννήτριας στο 0 είναι η μέση τιμή (δηλαδή η ροπογεννήτρια "γεννά" την πρώτη ροπή).

Ροπογεννήτριες - Εξήγηση ονομασίας (2)

Ομοίως: $$M''(t) = \sum_x x^2 \cdot e^{tx} \cdot f(x)$$
$$\Rightarrow M''(0) = E(X^2)$$

και γενικά η n−οστή παράγωγος γεννά την n−οστή ροπή περί την αρχή.

Παρατήρηση: Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν στη συνεχή περίπτωση.

Γεννήτριες Αθροισμάτων

$$\left.\begin{array}{c} \text{X, Y ανεξάρτητες} \\ \text{X} \Leftrightarrow \Pi_1(z),\;\; M_1(t) \\ \text{Y} \Leftrightarrow \Pi_2(z),\;\; M_2(t) \end{array}\right\} \text{X} + \text{Y} \Leftrightarrow \Pi_1(z)\Pi_2(z) \text{ και } M_1(t)M_2(t)$$

Απόδειξη (για ροπογεννήτριες):

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

Λόγω της ανεξαρτησίας είναι:

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}] = M_X(t) \cdot M_Y(t) \qquad \square$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X} : Poisson(\lambda_1) \\ \mathrm{Y} : Poisson(\lambda_2) \\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y}\ \text{ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} : Poisson\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X} : Poisson(\lambda_1) \\ \mathrm{Y} : Poisson(\lambda_2) \\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y}\ \text{ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} : Poisson\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

Απάντηση:

5. Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X} : Poisson(\lambda_1) \\ \mathrm{Y} : Poisson(\lambda_2) \\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y}\ \text{ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} : Poisson\,(\lambda_1 + \lambda_2)$$

<u>Απάντηση:</u> $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

5. Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X} : Poisson(\lambda_1) \\ \mathrm{Y} : Poisson(\lambda_2) \\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y} \text{ ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} : Poisson\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

Απάντηση: $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

οπότε $X + Y \Leftrightarrow \Pi(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(z-1)}$

5. Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{X} : Poisson(\lambda_1) \\ \mathrm{Y} : Poisson(\lambda_2) \\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y}\ \text{ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} : Poisson\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

<u>Απάντηση:</u> $X \Rightarrow \Pi_1(z) = e^{\lambda_1 \cdot (z-1)}$

$$Y \Rightarrow \Pi_2(z) = e^{\lambda_2 \cdot (z-1)}$$

οπότε $X + Y \Leftrightarrow \Pi(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(z-1)}$

άρα $X + Y \Leftrightarrow Poisson\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση:

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$\Pi_i(z) =$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : Ρ(άθροισμα 17) = ?

<u>Απάντηση:</u> Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) =$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : Ρ(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z))^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

Άρα Ρ =

5. Παράδειγμα 2

Ρίψη 4 ζαριών : P(άθροισμα 17) = ?

Απάντηση: Για κάθε ζάρι $i = 1, \cdots, 4$ είναι:

$$\Pi_i(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{1}{6} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{6} \cdot z^4 + \frac{1}{6} \cdot z^5 + \frac{1}{6} \cdot z^6$$

Για το άθροισμα των 4 ζαριών είναι:

$$\Pi(z) = \left(\Pi_1(z)\right)^4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \left(z + z^2 + \cdots + z^6\right)\right]^4$$

Άρα P = ο συντελεστής του z^{17}

Υπολογισμός συντελεστή του z^{17}(προαιρετικά)

$$\Pi(z) = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot (1 + z + \cdots + z^5)^4 = \frac{1}{6^4} \cdot z^4 \cdot \left(\frac{1 - z^6}{1 - z}\right)^4$$

Αλλά $A = (1 - z^6)^4 = 1 - 4z^6 + 6z^{12} - 4z^{18} + z^{24}$

και $\quad B = (1 - z)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \cdot (-z)^n \cdot 1^{-4-n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)(-5)\ldots(-4-n+1)}{n!} (-1)^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)(n + 2)(n + 3) z^n$$

Στο γινόμενο $A \cdot B$ ο συντελεστής του z^{13} είναι:

$$1 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 - 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 104$$

Τελικά, ο συντελεστής του z^{17}είναι $\dfrac{104}{6^4}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση: $M(t) = E\left[e^{tX}\right] =$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u> $M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x} e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

Λύση:

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u> $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u> $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$

5. Παράδειγμα 3

Έστω μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 2, 3 και 5 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η μέση τιμή.

<u>Λύση:</u>
$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} \cdot Pr\{X = x\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{3} \cdot e^{5t}$$

Καταρχήν, η μέση τιμή είναι $E(X) = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} = \frac{19}{6}$

Μέσω της ροπογεννήτριας: $M'(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} + \frac{5}{3} \cdot e^{5t}$

$$\Rightarrow E(X) = M'(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}$$