

“Πιθανότητες και
Αρχές Στατιστικής”
(3η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

*Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής,
Πανεπιστήμιο Πατρών*

Ακαδημαϊκό Έτος 2023 - 2024

Περιεχόμενα 3ης Διάλεξης

- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

3ο Μάθημα “Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής”

Ολοκληρώνουμε σήμερα τον υπολογισμό πιθανοτήτων με στοιχειώδη μέσα (επόμενο μάθημα: ισχυρές μαθηματικές αναπαραστάσεις π.χ. τυχαίες μεταβλητές) μελετώντας ορισμένες πολύ βασικές έννοιες:

- Δεσμευμένη Πιθανότητα
- Στοχαστική Ανεξαρτησία

και ορισμένα χρήσιμα εργαλεία:

- τον πολλαπλασιαστικό νόμο
- το θεώρημα της ολικής πιθανότητας
- το θεώρημα του Bayes

- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

Ορισμός

Πείραμα τύχης:

- ΠΡIN το πείραμα:
 - δειγματοχώρος Ω
 - για κάθε γεγονός A , υπάρχει η $P(A)$
- META το πείραμα
 - ΣΥNEBH το γεγονός B
 - \Rightarrow “νέος δειγματοχώρος” Ω' είναι το B
 - \Rightarrow η πιθανότητα του A αλλάζει αφού πλέον $A \equiv A \cdot B$

Συμβολισμός $P(A|B) =$ “πιθανότητα του A δοθείσης της πραγματοποίησης του B ”

Ένα απλό παράδειγμα

Πείραμα: Ζάρι

$A = \{ \text{Αποτέλεσμα } 1 \}$

$B = \{ \text{Περιττό αποτέλεσμα} \}$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A | B) = \begin{cases} \text{Όλες: } \{1,3,5\} \\ \text{Ευνοϊκές: } \{1\} \end{cases} \Rightarrow P(A | B) =$$

Ένα απλό παράδειγμα

Πείραμα: Ζάρι

$A = \{ \text{Αποτέλεσμα 1} \}$

$B = \{ \text{Περιττό αποτέλεσμα} \}$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A | B) = \begin{cases} \text{Όλες: } \{1,3,5\} \\ \text{Ευνοϊκές: } \{1\} \end{cases} \Rightarrow P(A | B) = \frac{1}{3}$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά

B: “Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά”

A: “Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες”

$P(A | B) = ?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις = $N_B =$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά

B: “Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά”

A: “Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες”

$P(A | B) = ?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις = $N_B = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$

Ευνοϊκές περιπτώσεις = $N_{A \cdot B} =$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά

B: “Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά”

A: “Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες”

$P(A | B) = ?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις = $N_B = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$

Ευνοϊκές περιπτώσεις = $N_{A \cdot B} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{N_{A \cdot B}}{N_B} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Ορισμός

Έστω $P(B) > 0$

Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση:

$$A \rightarrow P(A | B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Διαίσθηση: $P(A | B) = \frac{N_{A \cdot B}}{N_B} = \frac{\frac{N_{A \cdot B}}{N}}{\frac{N_B}{N}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ αν τα σημεία του χώρου είναι ισοπίθανα και πεπερασμένα.

Βασική Παρατήρηση

Λόγω της διαίρεσης με τον παράγοντα $P(B)$, αντίστοιχα θεωρήματα για πιθανότητες εξακολουθούν να ισχύουν υποθέτοντας το ίδιο γεγονός B

π.χ.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cdot B]}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cdot B \cup A_2 \cdot B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot B)}{P(B)} = \\ &= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cdot A_2 | B) \end{aligned}$$

*δηλαδή ίδια μορφή με $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$

Ορισμένα χρήσιμα εργαλεία με βάση δεσμευμένες πιθανότητες

β1) Ο πολλαπλασιαστικός νόμος

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cdot A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1)$$

Γενικεύοντας: $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) =$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$$

αρκεί $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) > 0$

Απόδειξη: 2ο μέλος =

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_2 \cdot A_1)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_3 \cdot A_1 \cdot A_2)}{P(A_1 \cdot A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cdots A_n)}{P(A_1 \cdots A_{n-1})} =$$

= 1ο μέλος

Ορισμένα χρήσιμα εργαλεία με βάση δεσμευμένες πιθανότητες

β2) Το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Θεώρημα

$$A_1, \dots, A_n \text{ διαμέριση του } \Omega \Rightarrow P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B | A_k)$$

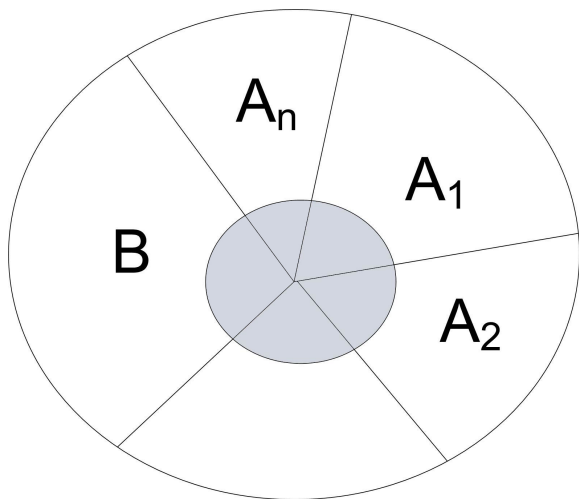
Απόδειξη:

$$2\text{o μέλος} = \sum_{k=1}^n P(B \cdot A_k) =$$

$$P(B \cdot A_1) + \dots + P(B \cdot A_n) = P[B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)]$$

$$P[B \cap \Omega] = P(B) = 1\text{o μέλος}$$

Εποπτική εξήγηση με διάγραμμα Venn



- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

2. Θεώρημα Bayes

Έστω ότι

A: “αιτία”

B: “αποτέλεσμα”

- Θεωρούμε γνωστή (ή μπορούμε να βρούμε) την $P(B|A)$
- Ζητάμε την $P(A|B)$

Διαγνωστικά ιατρικά τεστ:

A: “το άτομο έχει μια ασθένεια”

B: “το τεστ είναι θετικό”

Είναι λογικό να γνωρίζουμε (π.χ. με βάση στατιστικές μετρήσεις) την $P(B|A)$ δηλαδή την πιθανότητα το τεστ να βγει θετικό δοθέντος του ότι το άτομο είναι ασθενές.

Μας ενδιαφέρει η “αντίστροφη” δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ δηλαδή η πιθανότητα το άτομο να είναι ασθενές δοθέντος ότι το τεστ ήταν θετικό.

Θεώρημα

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ διαμέριση του } \Omega \\ P(A_k) > 0, \forall k \\ P(B) > 0 \end{array} \right\} P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)}$$

Θεώρημα - Απόδειξη

$$\begin{aligned} \text{2ο μέλος} &= \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)} = \frac{P(B \cdot A_k)}{P(B)} = \\ &= P(A_k | B) \quad \square. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

80% όταν υπάρχει ασθένεια

Τεστ θετικό

10% όταν δεν υπάρχει ασθένεια

1% του πληθυσμού έχει ασθένεια. $P(\text{Ασθένεια} \mid \text{τεστ θετικό}) = ?$

Λύση: Έστω A έχει ασθένεια, \bar{A} δεν έχει ασθένεια και B τεστ θετικό. Τα A, \bar{A} είναι διαμέριση του Ω και θέλουμε την $P(A \mid B)$.

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})} =$$

Παράδειγμα

80% όταν υπάρχει ασθένεια

Τεστ θετικό

10% όταν δεν υπάρχει ασθένεια

1% του πληθυσμού έχει ασθένεια. $P(\text{Ασθένεια} \mid \text{τεστ θετικό}) = ?$

Λύση: Έστω A έχει ασθένεια, \bar{A} δεν έχει ασθένεια και B τεστ θετικό. Τα A, \bar{A} είναι διαμέριση του Ω και θέλουμε την $P(A \mid B)$.

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})} =$$

$$\frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + 0.99 \cdot 0.1} = \frac{8}{107} \simeq 7\%$$

- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

3. Στοχαστική Ανεξαρτησία

Θα θέλαμε διαισθητικά $P(A | B) = P(A)$ (1)

δηλαδή η πραγματοποίηση του B να μην επηρεάζει το A.

$$(1) \Rightarrow \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ορισμός:

A, B στοχαστικά ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Θεώρημα

Θεώρημα:

A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow A, \bar{B}$ ανεξάρτητα

Απόδειξη: Είναι $A \cdot B \cup A \cdot \bar{B} = A \cdot (B \cup \bar{B}) = A \cdot \Omega = A \Rightarrow$

$$P(A \cdot B) + P(A \cdot \bar{B}) = P(A) \Rightarrow$$

$$P(A \cdot \bar{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$P(A) [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B}) \quad \square$$

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε 2 ζάρια

$$E_1 = \text{“άθροισμα 6”}$$

$$E_2 = \text{“άθροισμα 7”}$$

$$F = \text{“1ο ζάρι 4”}$$

α) E_1, F όχι ανεξάρτητα

β) E_2, F ανεξάρτητα

Παράδειγμα 1 - Α' τρόπος)

Απόδειξη α)

$$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_1 \cdot F =$$

Παράδειγμα 1 - Α' τρόπος)

Απόδειξη α)

$$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_1 \cdot F = \{(4, 2)\} \Rightarrow P(E_1 \cdot F) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

Άρα E_1 , F όχι ανεξάρτητα.

Διαισθητική Ερμηνεία: Το άθροισμα 6 περιορίζεται από το πρώτο ζάρι, αφού αν υπάρξει αποτέλεσμα 6 στο πρώτο ζάρι, είναι αδύνατο να έχουμε άθροισμα 6.

Παράδειγμα 1 - Β' τρόπος)

Απόδειξη β)

$$E_2 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_2 \cdot F = \{(4, 3)\} \Rightarrow P(E_2 \cdot F) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Άρα E_2 , F ανεξάρτητα.

Διαισθητική Ερμηνεία: Το άθροισμα 7 δεν περιορίζεται από το πρώτο ζάρι.

Παράδειγμα 2 - Α' τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Α' τρόπος)

Παράδειγμα 2 - Α' τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Α' τρόπος)

$$\text{Είναι } \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{12!}{2!10!}} = \frac{7 \cdot 8}{11 \cdot 12}$$

Παράδειγμα 2 - Β' τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β' τρόπος)

Παράδειγμα 2 - Β' τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β' τρόπος)

Έστω R_1, R_2 τα γεγονότα η πρώτη (αντίστοιχα η δεύτερη) μπάλα να είναι κόκκινη.

Είναι: $P(R_1 \cdot R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) =$

Παράδειγμα 2 - Β' τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β' τρόπος)

Έστω R_1, R_2 τα γεγονότα η πρώτη (αντίστοιχα η δεύτερη) μπάλα να είναι κόκκινη.

$$\text{Είναι: } P(R_1 \cdot R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11}$$

(διότι προφανώς τα R_1, R_2 δεν είναι ανεξάρτητα)

- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

4. Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία

Γενικεύοντας για 3 γεγονότα θα θέλαμε

$$A_1, A_2, A_3 \quad \text{ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Ερώτημα: Η ανεξαρτησία ανά ζεύγη δηλαδή

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

συνεπάγεται τη σχέση $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$;

4. Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία

Γενικεύοντας για 3 γεγονότα θα θέλαμε

$$A_1, A_2, A_3 \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Ερώτημα: Η ανεξαρτησία ανά ζεύγη δηλαδή

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

συνεπάγεται τη σχέση $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$;

Απάντηση: Όχι γενικά (ωστόσο ισχύει σχεδόν πάντα).

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$A_k =$ “στη θέση k υπάρχει α” για $k = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) =$$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$A_k =$ “στη θέση k υπάρχει α” για $k = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

επίσης $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) =$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$A_k =$ “στη θέση k υπάρχει α” για $k = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{επίσης } P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

\Rightarrow τα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα ανά ζεύγη

Αλλά $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$A_k =$ “στη θέση k υπάρχει α” για $k = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{επίσης } P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

\Rightarrow τα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα ανά ζεύγη

$$\text{Αλλά } P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{27}$$

Ορισμός Πλήρους Στοχαστικής Ανεξαρτησίας

Ορισμός

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n (n \geq 2) \\ \text{πλήρως ανεξάρτητα} \end{array} \right\} \Leftrightarrow P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

για κάθε συνδυασμό $\{i_1, \dots, i_k\}$ των δεικτών $\{1, 2, \dots, n\}$ αν $k = 2, 3, \dots, n$

Ορισμός Πλήρους Στοχαστικής Ανεξαρτησίας

Παρατήρηση: Συνολικά πρέπει να ελεγχθούν

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$$

δηλαδή εκθετικά πολλές συνθήκες

Στην πράξη, στηριζόμαστε στη διαίσθηση και θεωρούμε γεγονότα που συμβαίνουν:

- σε διαφορετικούς χρόνους
- σε διαφορετικούς χώρους

ως ανεξάρτητα, χωρίς να ελέγχουμε τις (εκθετικές στο πλήθος) σχέσεις.

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ ανεξάρτητα} \\ P(A_k) = P_k \end{array} \right\} Pr\{\text{κανένα γεγονός δε συμβαίνει}\} = ?$$

Λύση:

$$P\left\{\bigcap_k \overline{A_k}\right\} = \prod_k P(\overline{A_k}) = \prod_k (1 - P_k) \leq \prod_k e^{-P_k} = e^{-\sum_{k=1}^n P_k}$$

Λόγω του θεωρήματος της σελίδας 21.

- 1 Δεσμευμένη Πιθανότητα
- 2 Bayes Theorem
- 3 Στοχαστική Ανεξαρτησία
- 4 Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία
- 5 Παραδείγματα

Άσκηση 1 - Α' τρόπος

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Άσκηση 1 - Α' τρόπος

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Έστω D: “οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά”

F: “ο A έχει 3 σπαθιά”

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

Άσκηση 1 - Α' τρόπος

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Έστω D: “οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά”

F: “ο A έχει 3 σπαθιά”

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(F|D) = \frac{N_{FD}}{N_D} = \frac{\binom{13}{8} \cdot \binom{39}{18} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10}}{\binom{13}{8} \cdot \binom{39}{18} \cdot \binom{26}{13}} = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με $\binom{26}{13} \binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με $\binom{26}{13} \binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με $\binom{26}{13} \binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο A διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με $\binom{26}{13} \binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο A διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άρα: $P =$

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των B και N, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους A και Δ με $\binom{26}{13} \binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο A διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άρα:

$$P = \frac{\binom{5}{3} \binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

Άσκηση 2

(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες.

Ποιά η πιθανότητα κάθε παίχτης να πήρε ακριβώς 1 άσο;

Άσκηση 2

(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες. Ποιά η πιθανότητα κάθε παίχτης να πήρε ακριβώς 1 άσσο;

Λύση: (Α' τρόπος) Για $i = 1, 2, 3, 4$ ορίζω τα E_i ως εξής:

E_1 : “Ο άσσος σπαθί πάει σε κάποιον παίχτη”.

E_2 : “Ο άσσος σπαθί και ο άσσος κούπα πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

E_3 : “Ο άσσος σπαθί, ο άσσος κούπα, ο άσσος μπαστούνι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

E_4 : “Όλοι οι 4 άσσοι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

Η ζητούμενη πιθανότητα $P(E_1 E_2 E_3 E_4)$ είναι:

$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) =$$

Άσκηση 2

(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)

Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες. Ποιά η πιθανότητα κάθε παίχτης να πήρε ακριβώς 1 άσσο;

Λύση: (Α' τρόπος) Για $i = 1, 2, 3, 4$ ορίζω τα E_i ως εξής:

E_1 : “Ο άσσος σπαθί πάει σε κάποιον παίχτη”.

E_2 : “Ο άσσος σπαθί και ο άσσος κούπα πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

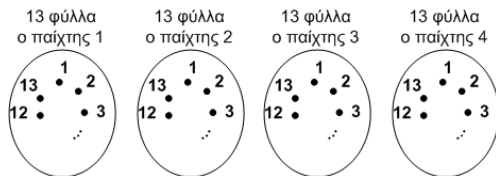
E_3 : “Ο άσσος σπαθί, ο άσσος κούπα, ο άσσος μπαστούνι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

E_4 : “Όλοι οι 4 άσσοι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες”.

Η ζητούμενη πιθανότητα $P(E_1 E_2 E_3 E_4)$ είναι:

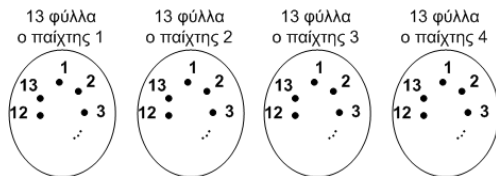
$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



$$P(E_1) =$$

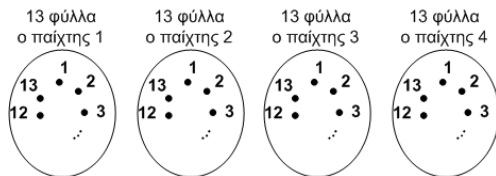
Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



$$P(E_1) = 1 \text{ (Προφανής)}$$

$$P(E_2|E_1) =$$

Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



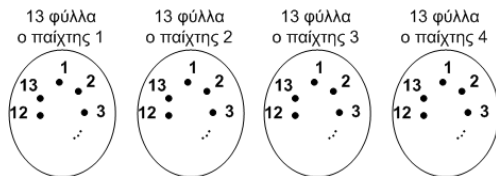
$$P(E_1) = 1 \text{ (Προφανής)}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51} \text{ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις}$$

αλλά δεν πρέπει να “πάρει” κάποια από τις 13
θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

$$\text{Ομοίως } P(E_3|E_1E_2) =$$

Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



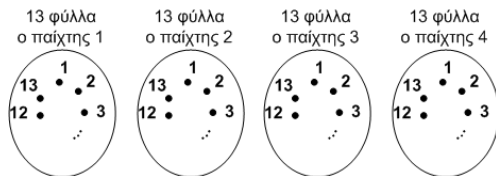
$$P(E_1) = 1 \text{ (Προφανής)}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51} \text{ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις}$$

αλλά δεν πρέπει να “πάρει” κάποια από τις 13 θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσο σπαθί)

$$\text{Ομοίως } P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50} \text{ και } P(E_4|E_1E_2E_3) =$$

Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



$$P(E_1) = 1 \text{ (Προφανής)}$$

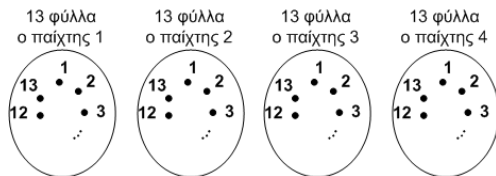
$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51} \text{ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις}$$

αλλά δεν πρέπει να “πάρει” κάποια από τις 13
θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

$$\text{Ομοίως } P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50} \text{ και } P(E_4|E_1E_2E_3) = \frac{13}{49}$$

$$\text{Οπότε } P(E_1E_2E_3E_4) =$$

Άσκηση 2 - Α' τρόπος (Συνέχεια)



$$P(E_1) = 1 \text{ (Προφανής)}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51} \text{ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις}$$

αλλά δεν πρέπει να “πάρει” κάποια από τις 13
θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

$$\text{Ομοίως } P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50} \text{ και } P(E_4|E_1E_2E_3) = \frac{13}{49}$$

$$\text{Οπότε } P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

όλων των τρόπων:

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

$$\# \text{ όλων των τρόπων: } \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

όλων των τρόπων: $\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$

ευνοικοί:

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

$$\# \text{ όλων των τρόπων: } \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

$$\# \text{ ευνοϊκοί: } 4! \binom{48}{12} \binom{36}{12} \binom{24}{12} \binom{12}{12}$$

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

$$\# \text{ όλων των τρόπων: } \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

$$\# \text{ ευνοικοί: } 4! \binom{48}{12} \binom{36}{12} \binom{24}{12} \binom{12}{12}$$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσο σε κάθε παίχτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίχτη αλλά οι 4 άσοι μπορούν να πάνε στους 4 παίχτες με $4!$ τρόπους.

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

$$\# \text{ όλων των τρόπων: } \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

$$\# \text{ ευνοικοί: } 4! \binom{48}{12} \binom{36}{12} \binom{24}{12} \binom{12}{12}$$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσο σε κάθε παίκτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίκτη αλλά οι 4 άσοι μπορούν να πάνε στους 4 παίκτες με $4!$ τρόπους.

$$\text{Άρα: } P =$$

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

$$\# \text{ όλων των τρόπων: } \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

$$\# \text{ ευνοικοί: } 4! \binom{48}{12} \binom{36}{12} \binom{24}{12} \binom{12}{12}$$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσο σε κάθε παίκτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίκτη αλλά οι 4 άσοι μπορούν να πάνε στους 4 παίκτες με $4!$ τρόπους.

$$\text{Άρα: } P = \frac{4! \binom{48}{12} \binom{36}{12} \binom{24}{12}}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13}} = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} =$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

$$\text{Αλλά } Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

$\Rightarrow Pr\{E\} =$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α' τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{\text{στις πρώτες } i-1 \text{ ρίψεις ούτε } 5 \text{ ούτε } 7 \cap 5 \text{ στη ρίψη } i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

$$\text{Αλλά } Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

$$\Rightarrow Pr\{E\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{13}{18}\right)^{i-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5

G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7

H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5

G : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7

H : η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5

G : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7

H : η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

οπότε $Pr\{E\} = Pr\{EF \cup EG \cup EH\} =$

$= Pr\{F\}Pr\{E | F\} + Pr\{G\}Pr\{E | G\} + Pr\{H\}Pr\{E | H\}$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5

G : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7

H : η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } Pr\{E\} &= Pr\{EF \cup EG \cup EH\} = \\ &= Pr\{F\}Pr\{E | F\} + Pr\{G\}Pr\{E | G\} + Pr\{H\}Pr\{E | H\} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } Pr\{F\} = \frac{4}{36}, Pr\{G\} = \frac{6}{36}, Pr\{H\} = \frac{26}{36}$$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (προαιρετικό υλικό)

Λύση: (Β' τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5

G : η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7

H : η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } Pr\{E\} &= Pr\{EF \cup EG \cup EH\} = \\ &= Pr\{F\}Pr\{E | F\} + Pr\{G\}Pr\{E | G\} + Pr\{H\}Pr\{E | H\} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } Pr\{F\} = \frac{4}{36}, Pr\{G\} = \frac{6}{36}, Pr\{H\} = \frac{26}{36}$$

προφανώς $Pr\{E | F\} = 1$

και $Pr\{E | G\} = 0$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (Συνέχεια)

$$\text{Αλλά } Pr\{E | H\} = Pr\{E\}$$

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (Συνέχεια)

$$\text{Αλλά } Pr\{E | H\} = Pr\{E\}$$

Επειδή αν στην 1η ρίψη δεν έρθει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7, τότε η κατάσταση είναι ακριβώς όπως στην αρχή.
(δηλαδή και τώρα πρέπει το 5 να έρθει πριν από το 7 στις επόμενες ρίψεις, και λόγω της ανεξαρτησίας η 1η ρίψη δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες).

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (Συνέχεια)

$$\text{Αλλά } Pr\{E | H\} = Pr\{E\}$$

Επειδή αν στην 1η ρίψη δεν έρθει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7, τότε η κατάσταση είναι ακριβώς όπως στην αρχή.
(δηλαδή και τώρα πρέπει το 5 να έρθει πριν από το 7 στις επόμενες ρίψεις, και λόγω της ανεξαρτησίας η 1η ρίψη δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες).

$$\text{Με απλές πράξεις προκύπτει ότι } Pr\{E\} = \frac{2}{5}$$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$

$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$

$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Οι “πιθανότητες” (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$

$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Οι “πιθανότητες” (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

Άρα $Pr\{\text{άθροισμα } 5 \text{ πριν από } 7\} =$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$

$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Οι “πιθανότητες” (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

$$\text{Άρα } Pr\{\text{άθροισμα } 5 \text{ πριν από } 7\} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$