# “Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (2η Διάλεξη)

**Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής**

*Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής,*
*Πανεπιστήμιο Πατρών*

Ακαδημαϊκό Έτος 2023 - 2024

# Περιεχόμενα 2ης Διάλεξης


1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

**Δειγματοχώρος Ω:** σύνολο όλων των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Είδη δειγματοχώρων:

- διακριτοί
  - πεπερασμένοι
  - αριθμήσιμα άπειροι
- συνεχείς

# Σύνοψη Προηγούμενου Μαθήματος

**Γεγονός:** υποσύνολο του δειγματοχώρου, σύνολο αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

**Πραγματοποίηση γεγονότος:** όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός.

ΓΕΓΟΝΟΤΑ $\longleftrightarrow$ ΣΥΝΟΛΑ $\Rightarrow$ Γνωστές πράξεις συνόλων:

- Συμπλήρωμα $\overline{A}$ : δε συμβαίνει το γεγονός A
- Τομή $\bigcap$ : και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν
- Ένωση $\bigcup$ : τουλάχιστον ένα γεγονός συμβαίνει

# Σύνοψη Προηγούμενου Μαθήματος

## Ορισμός

Πιθανότητα = συνολοσυνάρτηση: υποσύνολα του $\Omega \Rightarrow$ πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή γεγονότα $\Rightarrow$ πιθανότητες

# Σύνοψη Προηγούμενου Μαθήματος

## Ορισμός

Πιθανότητα = συνολοσυνάρτηση: υποσύνολα του $\Omega \Rightarrow$ πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή γεγονότα $\Rightarrow$ πιθανότητες

## Αξιώματα

**$1_o$ Αξίωμα** : $P(A) \geq 0$
**$2_o$ Αξίωμα** : $P(\Omega) = 1$
**$3_o$ Αξίωμα** : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

# Σύνοψη Προηγούμενου Μαθήματος

## Ορισμός

Πιθανότητα = συνολοσυνάρτηση: υποσύνολα του $\Omega \Rightarrow$ πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή γεγονότα $\Rightarrow$ πιθανότητες

## Αξιώματα

**1$_o$ Αξίωμα** : $\mathrm{P(A)} \geq 0$
**2$_o$ Αξίωμα** : $\mathrm{P}(\Omega)= 1$
**3$_o$ Αξίωμα** : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

## Σημαντικό Θεώρημα

$$\mathrm{P}(\cup_i \mathrm{A}_i) \leq \sum_i P\{A_i\} \text{ (ανισότητα Boole)}$$

Πιθανότητα και Απαρίθμηση

(σημείωση: οι μέθοδοι απαρίθμησης διδάσκονται αναλυτικά στο μάθημα Διακριτά Μαθηματικά, εδώ γίνεται συνοπτική υπενθύμιση βασικών εννοιών και χρήση κατά τον υπολογισμό πιθανοτήτων)

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# 2. Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

$$\left.\begin{array}{c} \text{Έστω } \Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \\ \omega_i \text{ ισοπίθανα} \\ \text{γεγονός } |A| = \mathrm{k} \end{array}\right\} : \ \mathrm{P}\{\omega_1\} + \cdots + \mathrm{P}\{\omega_n\} = \mathrm{P}\{\Omega\} = 1$$

$\Rightarrow$

# 2. Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

$$\left.\begin{array}{c}\text{Έστω } \Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \\ \omega_i \text{ ισοπίθανα} \\ \text{γεγονός } |A| = \mathrm{k}\end{array}\right\} : \ \mathrm{P}\{\omega_1\} + \cdots + \mathrm{P}\{\omega_n\} = \mathrm{P}\{\Omega\} = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\{w_i\} = \frac{1}{n}, \quad \forall i$$

$$\Rightarrow$$

# 2. Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

$$\left.\begin{array}{c} \text{Έστω } \Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \\ \omega_i \text{ ισοπίθανα} \\ \text{γεγονός } |A| = \mathrm{k} \end{array}\right\} : \; \mathrm{P}\{\omega_1\} + \cdots + \mathrm{P}\{\omega_n\} = \mathrm{P}\{\Omega\} = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\{w_i\} = \tfrac{1}{n}, \quad \forall i$$

$$\Rightarrow P\{A\} = \sum_{i=i_1}^{i_k} \mathrm{P}\{\omega_i\} = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

# 2. Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

- σε ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ αρκούν τα n (όλες οι περιπτώσεις), k (ευνοϊκές περιπτώσεις)
- ολόκληρος κλάδος διακριτών μαθηματικών: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
- στο μάθημα: 3 βασικές αρχές απαρίθμησης:
  - multiplication principle (κανόνας γινομένου)
  - addition principle (κανόνας αθροίσματος)
  - inclusion-exclusion principle (αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

# 2. α. Κανόνας Γινομένου

$$\left.\begin{array}{c}\text{Γεγονός A: με m τρόπους}\\ \text{Γεγονός B: με n τρόπους}\end{array}\right\}\ \text{και τα δύο (τομή A}\cap\text{B): με m}\cdot\text{n τρόπους}$$

# 2. β. Κανόνας Αθροίσματος

$$\left.\begin{array}{c}\text{Γεγονός A: με m τρόπους}\\ \text{Γεγονός B: με n τρόπους}\end{array}\right\}\ \text{κάποιο (ένωση } A\cup B\text{): με m+n τρόπους}$$

# Παράδειγμα (προαιρετικό υλικό)

Vandermonde's convolution:

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{l}{n-k} = \binom{m+l}{n}$$

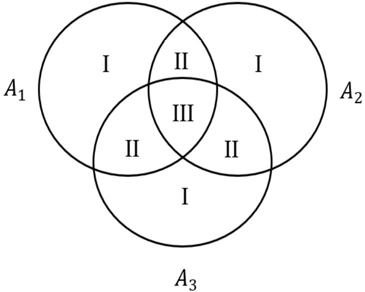
<u>Απόδειξη (sketch):</u>

$$m + l \text{ άνθρωποι} \left\rangle \begin{array}{l} m \text{ άνδρες} \\ l \text{ γυναίκες} \end{array} \right.$$

Διαλέγω n ανθρώπους

# 2. γ. Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$$\#(A_1 \cup .... \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + ... + \#(A_n)$$
$$-\#(A_1 \cap A_2) - ... - \#(A_{n-1} \cap A_n)$$
$$+$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$+(-1)^{n-1}\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$



1. Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος
2. Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση
3. **Διατάξεις - Συνδυασμοί**
4. Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων
5. Διωνυμικοί Συντελεστές
6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων
7. Επιπλέον Παραδείγματα

# 3. Διατάξεις - Συνδυασμοί

Με βάση τις αρχές απαρίθμησης μπορούμε να υπολογίζουμε διατάξεις - συνδυασμούς.
Από n αντικείμενα παίρνω k. Διάφορα κριτήρια:

- Με ενδιαφέρει η σειρά $\Rightarrow$ διάταξη (arrangement)
- Δεν με ενδιαφέρει η σειρά $\Rightarrow$ συνδυασμός (combination)

- διακεκριμένα αντικείμενα
- όχι διακεκριμένα

- Χωρίς επαναλήψεις
- Με επαναλήψεις

<u>Χρήσιμος συμβολισμός:</u> $n^{\underline{k}} = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

όπου $n^{\underline{k}}$ είναι η κ-οστή παραγοντική ροπή.

# 3. α. Διατάξεις

- <u>Χωρίς επανάληψη</u> $\Rightarrow n^{\underline{k}}$
- <u>Με επανάληψη</u> $\Rightarrow n^k$
- <u>Όλων</u> (μεταθέσεις, permutations) $\Rightarrow n!$

# 3. α. Παράδειγμα (προαιρετικό υλικό)

- $x_1$ όμοια, $\cdots x_k$ όμοια
- $x_1 + ... + x_k = n$

$$\Rightarrow \frac{n!}{x_1!...x_k!} \text{ διατάξεις όλων}$$

# 3. β. Διαταράξεις

**Διαταράξεις**: κανένα στην αρχική θέση της διάταξης.

# = #όλες - #(1ο στην ίδια θέση ∪ ... ∪ n-οστό στην ίδια θέση)

# 3. β. Διαταράξεις

**Διαταράξεις**: κανένα στην αρχική θέση της διάταξης.

# = #όλες - #(1ο στην ίδια θέση $\cup$ ... $\cup$ n-οστό στην ίδια θέση)

$$= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + ... + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (n-n)!$$

# 3. β. Διαταράξεις

**Διαταράξεις**: κανένα στην αρχική θέση της διάταξης.

$$\# = \#\text{όλες - }\#(\text{1ο στην ίδια θέση} \cup \ldots \cup \text{n-οστό στην ίδια θέση})$$
$$= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (n-n)!$$
$$= n! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right] \to n! \cdot e^{-1}$$

**Συνδυασμοί** (χωρίς επανάληψη)

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{με επανάληψη} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k}$$

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# 4. Παράδειγμα 1

Τυχαία χωρίς επανάθεση διαλέγουμε 5 αριθμούς από το $\{1, 2, ..., 20\}$. Ποιά η πιθανότητα α) ο μικρότερος να είναι ο 6 και ο μεγαλύτερος το 13, β) ο τρίτος κατά σειρά μεγέθους να είναι ο 9.

# 4. Παράδειγμα 1

Τυχαία χωρίς επανάθεση διαλέγουμε 5 αριθμούς από το $\{1, 2, ..., 20\}$. Ποιά η πιθανότητα α) ο μικρότερος να είναι ο 6 και ο μεγαλύτερος το 13, β) ο τρίτος κατά σειρά μεγέθους να είναι ο 9.

Λύση: #όλοι οι τρόποι επιλογής 5 αριθμών =

# 4. Παράδειγμα 1

Τυχαία χωρίς επανάθεση διαλέγουμε 5 αριθμούς από το $\{1, 2, ..., 20\}$. Ποιά η πιθανότητα α) ο μικρότερος να είναι ο 6 και ο μεγαλύτερος το 13, β) ο τρίτος κατά σειρά μεγέθους να είναι ο 9.

<u>Λύση</u>: #όλοι οι τρόποι επιλογής 5 αριθμών $= \binom{20}{5}$

α) ευνοϊκοί

# 4. Παράδειγμα 1

Τυχαία χωρίς επανάθεση διαλέγουμε 5 αριθμούς από το $\{1, 2, ..., 20\}$. Ποιά η πιθανότητα α) ο μικρότερος να είναι ο 6 και ο μεγαλύτερος το 13, β) ο τρίτος κατά σειρά μεγέθους να είναι ο 9.

Λύση: #όλοι οι τρόποι επιλογής 5 αριθμών $= \binom{20}{5}$

α) ευνοϊκοί 6 ............ 13

# ευνοϊκοί:

# 4. Παράδειγμα 1

Τυχαία χωρίς επανάθεση διαλέγουμε 5 αριθμούς από το $\{1, 2, ..., 20\}$. Ποιά η πιθανότητα α) ο μικρότερος να είναι ο 6 και ο μεγαλύτερος το 13, β) ο τρίτος κατά σειρά μεγέθους να είναι ο 9.

<u>Λύση</u>: #όλοι οι τρόποι επιλογής 5 αριθμών $= \binom{20}{5}$

α) ευνοϊκοί 6 ............ 13

\# ευνοϊκοί: $1 \cdot \binom{6}{3} \cdot 1$

$$P = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{20}{5}}$$

# 4. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

β) ευνοϊκοί $\alpha_1..\alpha_2...9...\alpha_4..\alpha_5$.

Με $\alpha_3 = 9$, ο τρίτος αριθμός κατά σειρά μεγέθους είναι ο 9

$$\Rightarrow$$

# 4. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

β) ευνοϊκοί $\alpha_1..\alpha_2...9...\alpha_4..\alpha_5$.
Με $\alpha_3 = 9$, ο τρίτος αριθμός κατά σειρά μεγέθους είναι ο 9

$$\Rightarrow \binom{8}{2} \cdot 1 \cdot \binom{11}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{20}{5}}$$

# 4. Παράδειγμα 2

"Αφηρημένη γραμματέας" (Τοποθετεί n γράμματα σε n φακέλους. Κανένα γράμμα στο σωστό φάκελο)

$$P\{\text{κανένα σωστό}\} = \frac{D_n}{n!} \simeq$$

# 4. Παράδειγμα 2

"Αφηρημένη γραμματέας"(Τοποθετεί n γράμματα σε n φακέλους. Κανένα γράμμα στο σωστό φάκελο)

$$P\{\text{κανένα σωστό}\} = \frac{D_n}{n!} \simeq \frac{n! \cdot e^{-1}}{n!} = \frac{1}{e}$$

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# 5. Διωνυμικοί Συντελεστές

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

**Βασικές ταυτότητες**:

**α)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n \Rightarrow \sum_k \binom{n}{k} = 2^n$

# 5. Παράδειγμα (προαιρετικό υλικό)

**β)** Ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου με άρτιο πληθικό αριθμό ισούται με τον αριθμό των υποσυνόλων με περιττό.

Δηλαδή $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$

# 5. Διωνυμικοί Συντελεστές

**γ)** Προσέγγιση Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ δηλαδή } \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Όταν το n $\uparrow \Rightarrow$

- Το απόλυτο σφάλμα $\uparrow$
- Το σχετικό σφάλμα $\longrightarrow 0$

Καλή προσέγγιση ακόμα και για μικρά n π.χ. n $= 5$

# 5. Παράδειγμα (προαιρετικό υλικό)

**δ)** Χρήσιμη ιδιότητα: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

α) Ορισμένοι συμβολισμοί

- Έστω n γεγονότα: $A_1, ..., A_n$
- Θεωρούμε ότι ξέρουμε τις τομές των γεγονότων ανά k δηλαδή η πιθανότητα $P(A_{i1}A_{i2}...A_{ik})$ θεωρείται γνωστή ή εύκολα υπολογίσιμη, για $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$
- Έστω το άθροισμα των πιθανοτήτων των τομών ανά k :
$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} P(A_{i1}A_{i2}...A_{ik})$$

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

## β) Θεώρημα

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \\
P\,(\text{τουλάχιστον 1 από n γεγονότα}) &= P(A_1) + \cdots + P(A_n) \to S_1 \\
&\quad -P(A_1A_2) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \to S_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad +(-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cdots A_n) \to S_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot S_k = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot S_n
\end{aligned}
$$

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

Απόδειξη:

1η περίπτωση: Αν τα στοιχειώδη γεγονότα του πεπερασμένου δειγματοχώρου είναι ισοπίθανα τότε χρησιμοποιούμε:

- $\mathrm{P(A)} = \frac{|A|}{N}$
- αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

2η περίπτωση (γενική περίπτωση):

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- επαγωγή

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

Παράδειγμα: Αφηρημένη γραμματέας : n γράμματα σε n φακέλους.
Pr{κανένα γράμμα στον σωστό φάκελο } = ;

Απόδειξη 1ος τρόπος:
Πιο πρίν δείξαμε ότι ο αριθμός των διαταράξεων n αντικειμένων είναι n!$\cdot e^{-1}$ $\Rightarrow$

$$P = \frac{\text{αριθμός ευνοϊκών τρόπων}}{\text{αριθμός όλων}} \sim \frac{n! \cdot e^{-1}}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

Απόδειξη 2ος τρόπος:

Pr{κανένα γράμμα σε σωστό φάκελο } = 1 - $Pr${τουλάχιστον 1 σωστό}

Pr{τουλάχιστον 1 σωστό} $= Pr\{A_1 \cup \cdots \cup A_n\}$ όπου $A_i$: το i γράμμα στο σωστό φάκελο

Υπολογίζω τις τομές ανά k:

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik}) = \frac{(n-k)!}{n!} \qquad \forall\ i_1, i_2, \cdots i_k, \text{ λόγω συμμετρίας}$$

Απόδειξη 2ος τρόπος (Συνέχεια):

$$\Rightarrow S_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow Pr\left\{\bigcup_i A_i\right\} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

$$= 1 - 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}\right) = 1 - e^{-1}$$

αφού $e^x = \sum_k \frac{1}{k!} \cdot x^k \Rightarrow e^{-1} = \sum \frac{(-1)^k}{k!}$

$$\Rightarrow Pr\{\text{κανένα σωστό}\} = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \square$$

# 6. Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

**Θεώρημα (Πραγματοποίση ακριβώς k από n γεγονότα)**

$$P_{[k]} = S_k - \binom{k+1}{k} \cdot S_{k+1} + \binom{k+2}{k} \cdot S_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot S_n$$

# Παράδειγμα

Γραμματέας: Pr{ακριβώς k στη σωστή θέση } = ;

<u>Λύση</u>: $S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik})$

Αλλά $P(A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik})$ εξαρτάται μόνο από το k και μάλιστα

- όλοι οι τρόποι: n!
- ευνοϊκοί: $1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot (n-k) \cdots 1 = (n-k)!$

$$\Rightarrow P(A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\Rightarrow S_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!} \Rightarrow S_k = \frac{1}{k!}$$

# Παράδειγμα (Συνέχεια)

Οπότε Pr{ακριβώς k στη σωστή θέση } =

$$\frac{1}{k!} - \binom{k+1}{k} \cdot \frac{1}{(k+1)!} + \binom{k+2}{k} \cdot \frac{1}{(k+2)!} - ...$$

$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{k!1!} + \frac{1}{k!2!} - \cdots$$

$$= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots\right) = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1} = \frac{e^{-1}}{k!}. \quad \square$$

1 Σύνοψη προηγούμενου μαθήματος

2 Αξιωματικός ορισμός και απαρίθμηση

3 Διατάξεις - Συνδυασμοί

4 Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων

5 Διωνυμικοί Συντελεστές

6 Πιθανότητα ένωσης γεγονότων

7 Επιπλέον Παραδείγματα

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$

## 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

$\Rightarrow \Pr =$

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

$$\Rightarrow \Pr = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

$$\Rightarrow \Pr = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Άλλος τρόπος:
$\Pr\{14\text{ο φύλλο} = 1 \cup 14\text{ο φύλλο} = 2 \cup \ldots\} = 1$

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

$$\Rightarrow \Pr = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Άλλος τρόπος:

$\Pr\{14\text{ο φύλλο} = 1 \cup 14\text{ο φύλλο} = 2 \cup \ldots\} = 1$

Λόγω συμμετρίας $\Rightarrow \Pr\{14\text{ο φύλλο} = 1\} =$

# 7. Παράδειγμα 1

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

**α)** Το 14ο φύλλο $\rightarrow$ 4 τρόποι
Τα υπόλοιπα 51 $\rightarrow$ 51! τρόποι

$$\Rightarrow \Pr = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Άλλος τρόπος:
$\Pr\{14\text{ο φύλλο} = 1 \cup 14\text{ο φύλλο} = 2 \cup \ldots\} = 1$
Λόγω συμμετρίας $\Rightarrow \Pr\{14\text{ο φύλλο} = 1\} = \dfrac{1}{13}$

# 7. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).

α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;

β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

# 7. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

β)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ... | 13 | 14 | 15 | ... | 52 | (Θέσεις) |

# 7. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

<u>Λύση:</u>
β)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ... | 13 | 14 | 15 | ... | 52 | (Θέσεις) |
| 48 | 47 | ... | 36 | 4 | 38 | ... | 1 | (Τρόποι) |

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

<u>Λύση:</u>

β)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ... | 13 | 14 | 15 | ... | 52 | (Θέσεις) |
| 48 | 47 | ... | 36 | 4 | 38 | ... | 1 | (Τρόποι) |

$\Rightarrow \Pr =$

# 7. Παράδειγμα 1 - Συνέχεια

Μοιράζουμε μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 φύλλων (13 σειρές των 4 φύλλων).
α) Ποιά η πιθανότητα το 14ο φύλλο να είναι άσος;
β) Ποια η πιθανότητα ο πρώτος άσος να είναι στο 14ο φύλλο;

Λύση:

β)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | ... | 13 | 14 | 15 | ... | 52 | (Θέσεις) |
| 48 | 47 | ... | 36 | 4 | 38 | ... | 1 | (Τρόποι) |

$$\Rightarrow \mathrm{Pr} = \frac{48 \cdot 47 \cdot ... \cdot 36 \cdot 4 \cdot 38 \cdot ... \cdot 1}{52!}$$

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.

Απόδειξη: Όλες οι περιπτώσεις

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.

Γεγονός Α = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.

<u>Απόδειξη</u>: Όλες οι περιπτώσεις $= \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + ... + \binom{2n}{2n} =$

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.
<u>Απόδειξη</u>: Όλες οι περιπτώσεις $= \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \ldots + \binom{2n}{2n} =$
$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} - 1 =$ # άρτιων υποσυνόλων - 1 $=$

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.
Απόδειξη: Όλες οι περιπτώσεις $= \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + ... + \binom{2n}{2n} =$
$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + ... + \binom{2n}{2n} - 1 = \#$ άρτιων υποσυνόλων - 1 =

$= \frac{\text{πλήθος υποσυνόλων}}{2}$ - 1 $= \frac{2^{2n}}{2}$ - 1 $= 2^{2n-1}$ - 1

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.
<u>Απόδειξη</u>: Όλες οι περιπτώσεις $= \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \ldots + \binom{2n}{2n} =$

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} - 1 = \#\text{ άρτιων υποσυνόλων - } 1 =$$

$$= \frac{\text{πλήθος υποσυνόλων}}{2} \text{ - } 1 = \frac{2^{2n}}{2} \text{ - } 1 = 2^{2n-1} \text{ - } 1$$

ευνοϊκές: $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n} =$

# 7. Παράδειγμα 2 (προαιρετικό υλικό)

Μία κάλπη περιέχει n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Τραβάμε τυχαία, άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
Γεγονός A = ίσος αριθμός άσπρων και μαύρων.
<u>Απόδειξη</u>: Όλες οι περιπτώσεις $= \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + ... + \binom{2n}{2n} =$

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + ... + \binom{2n}{2n} - 1 = \#\text{ άρτιων υποσυνόλων - } 1 =$$

$$= \frac{\text{πλήθος υποσυνόλων}}{2} \text{ - } 1 = \frac{2^{2n}}{2} \text{ - } 1 = 2^{2n-1} \text{ - } 1$$

ευνοϊκές: $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n} =$

$$= \sum_k \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} - \binom{n}{0} \cdot \binom{n}{0} = \binom{2n}{n} - 1 \text{ (Vandermonde)}$$

# 7. Παράδειγμα 2 - Συνέχεια

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{2n}{n} - 1}{2^{2n-1} - 1} \simeq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n-1}}$$

Αλλά $\displaystyle\binom{2n}{n}$

# 7. Παράδειγμα 2 - Συνέχεια

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{2n}{n} - 1}{2^{2n-1} - 1} \simeq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n-1}}$$

Αλλά $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n)!\,(n)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$

$P(A)$

# 7. Παράδειγμα 2 - Συνέχεια

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{2n}{n} - 1}{2^{2n-1} - 1} \simeq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n-1}}$$

Αλλά $\displaystyle \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n)!\,(n)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$

$$P(A) \sim \frac{\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}}{2^{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \quad \square$$

# 7. Παράδειγμα 3

n διακριτές μπάλες τοποθετούνται τυχαία σε n διακριτά κελιά.
Ποιά η πιθανότητα ακριβώς ένα κελί να είναι άδειο;

# 7. Παράδειγμα 3

n διακριτές μπάλες τοποθετούνται τυχαία σε n διακριτά κελιά.
Ποιά η πιθανότητα ακριβώς ένα κελί να είναι άδειο;

Απόδειξη: Όλοι οι τρόποι είναι $n^n$

Ευνοϊκοί τρόποι:

**α)** ποιό κελί άδειο: n τρόποι

⇒ n μπάλες σε n - 1 κελιά ώστε κανένα κελί άδειο ⇒

- β1) 1 κελί με 2 μπάλες
- β2) όλα τα άλλα κελιά έχουν μία μπάλα

**β1)** Ποιό κελί έχει 2 μπάλες : n - 1 τρόποι

Ποιές 2 συγκεκριμένες μπάλες : $\binom{n}{2}$ τρόποι

# 7. Παράδειγμα 3 - Συνέχεια

**β2)** Όλα τα άλλα κελιά έχουν από μία μπάλα ⇒ n - 2 μπάλες σε n - 2 κελιά

1η μπάλα: n - 2 τρόποι
2η μπάλα: n - 3 τρόποι
.
.
.
n - 2 μπάλα: 1 τρόπος
⇒ (n - 2)! τρόποι

Από α), β1) και β2) ⇒

$$\Pr\{\text{ακριβώς ένα κελί άδειο}\} = P = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{2} \cdot (n-2)!}{n^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{2} \cdot n!}{n^n}$$