Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας

Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλεύεστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

Ενεργείτε ανήθικα αν:

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- συνεργασθείτε με άλλους στις εργασίες και δεν ενημερώσετε τον διδάσκοντα
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2023-2024 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε latex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 01/02/2024

(Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και <u>δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες</u>. Στην 1η σελίδα θα πρέπει να γράφετε το όνομά σας και το ΑΕΜ σας)

Άσκηση 1 (20%)

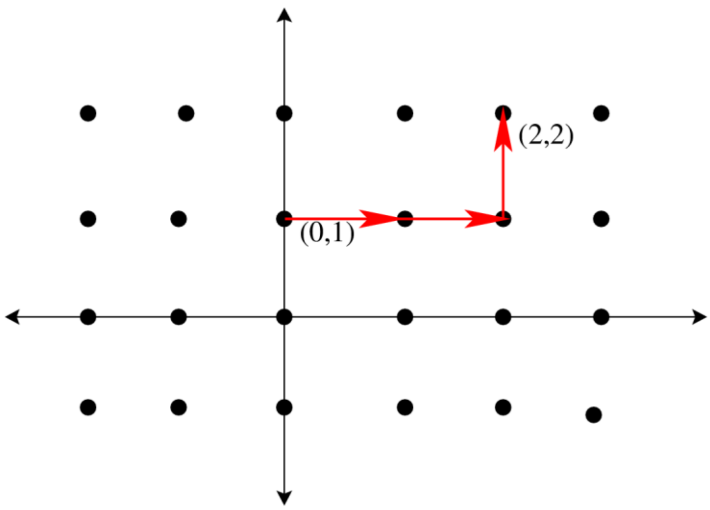
Κάνοντας χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος αποδείξτε ότι η ποσότητα $\frac{(10!)!}{(10!)^{9!}}$ είναι ακέραιος αριθμός. Στη συνδυαστική απόδειξη αυτής της πρότασης θα πρέπει να φτιάξετε ένα πρόβλημα μέτρησης που να έχει ως λύση τη συγκεκριμένη ποσότητα και άρα θα είναι οπωσδήποτε ακέραιος αριθμός (αφού ένα συνδυαστικό πρόβλημα μέτρησης δεν μπορεί να έχει μη-ακέραια λύση).

Άσκηση 2 (20%)

Θεωρούμε όλα τα σημεία (α,β) στο επίπεδο με α,β ακεραίους. Ορίζουμε ως ***βήμα***

Δ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α+1,β)
Α: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α-1,β)
Π: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β+1) και
Κ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β-1)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία ακολουθία 3 βημάτων (ΔΔΠ) με αρχή το (0,1) και τέλος το (2,2).



A) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα Α και Κ, οι οποίες ξεκινούν από το (0,0) και να καταλήγουν στο (x,y) με $x>0$, $y>0$;

B) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα Α και Κ, οι οποίες ξεκινούν από το (0,0), διέρχονται διαδοχικά από τα σημεία (3,2) και (4,5) και καταλήγουν στο (x,y), όπου $x>4$, $y>5$;

Γ) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων μήκους $2n$, που ξεκινούν από το (0,0), διέρχονται από το σημείο $(k,n-k)$, $0\leq k\leq n$, και καταλήγουν στο (0,0);

<u>Άσκηση 3</u> (20%)
Κατά πόσους τρόπους 7 άνδρες μπορούν να επιλεγούν από 12 έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ' αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί; Γενικεύστε θέτοντας n αντί για 12 και k αντί για 7.

<u>Άσκηση 4</u> (20%)
α) Βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων όλων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ, ΒΕΛΟΣ.
β) Να βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία εκ των λέξεων: ΤΗΝ, ΣΤΗΝ, ΑΣΤΗΝ, ΧΑΣΤΗΝ.

<u>Άσκηση 5</u> (20%)
Να δείξετε ότι από ένα σύνολο S 10 διαφορετικών ανά δύο αριθμών με δύο ψηφία (στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης), είναι δυνατό να επιλέξετε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα S_1 και S_2 του S ώστε το άθροισμα των στοιχείων του S_1 να είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων του S_2.

<u>Ενδεικτικές Λύσεις</u>

<u>Άσκηση 1</u>

Το ερώτημα μας οδηγεί στη χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος, μας προτρέπει δηλαδή να ψάξουμε για ένα συνδυαστικό πρόβλημα που η λύση του είναι η συγκεκριμένη ποσότητα. Αν το καταφέρουμε δείχνουμε και το ζητούμενο, καθώς η λύση ενός συνδυαστικού προβλήματος μπορεί να είναι μόνο ακέραιος αριθμός. Το γεγονός ότι παρατηρούμε ένα παραγοντικό όρο στον αριθμητή και το γινόμενο πολλών όρων στον παρονομαστή μας θυμίζει τη λύση σε πρόβλημα μεταθέσεων ομάδων όμοιων αντικειμένων. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι έχουμε 10! αντικείμενα και ας υποθέσουμε ότι αυτά μπορούν να χωριστούν σε ομάδες που κάθε μια περιλαμβάνει 10 όμοια μεταξύ τους αντικείμενα. Οι ομάδες που δημιουργούνται είναι 10!/10=9!. Αν λοιπόν υπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μεταθέσουμε τα 10! αντικείμενα, αυτοί θα είναι

$$\frac{(10!)!}{\underbrace{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdots 10!}_{9!\ \text{φορές}}}=\frac{(10!)!}{(10!)^{9!}}$$

που είναι υποχρεωτικά ακέραιος αριθμός.

<u>Άσκηση 2</u>

Α) Ας θεωρήσουμε x σε πλήθος βήματα Δ και y σε πλήθος βήματα Π. Τότε ξεκινώντας από το σημείο (0,0), με οποιαδήποτε σειρά και αν εκτελέσουμε τα παραπάνω βήματα θα καταλήξουμε στο σημείο (x,y). Επιπλέον οποιαδήποτε προσθήκη η απομάκρυνση βήματος Δ ή Π θα δημιουργήσει ακολουθία βημάτων που δεν καταλήγει στο (x,y). Επομένως έχουμε πρόβλημα μεταθέσεων δύο ομάδων όμοιων βημάτων, από τις οποίες η πρώτη αποτελείται από x σε πλήθος αντικείμενα (βήματα) Δ και η δεύτερη αποτελείται από y σε πλήθος αντικείμενα (βήματα) Δ. Το πλήθος των ακολουθιών υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

Β) Σύμφωνα με την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (3,2) είναι:

$$\frac{(3+2)!}{3!2!}=\frac{5!}{3!2!}$$

Οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (3,2) στο σημείο (4,5) είναι ακριβώς ίσοι με τους τρόπους μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (1,3):

$$\frac{(1+3)!}{1!3!}=\frac{4!}{1!3!}$$

Οι τρόποι μετακίνησης από το σημείο (4,5) στο σημείο (x,y) είναι ακριβώς ίσοι με τους τρόπους μετακίνησης από το σημείο (0,0) στο σημείο (x-4,y-5):

$$\frac{(x-4+y-5)!}{(x-4)!(y-5)!}=\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}$$

Τα παραπάνω τρία γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά πρέπει να συνυπάρξουν προκειμένου η ακολουθία να ξεκινήσει από το (0,0) και να καταλήξει στο (x,y) αφού διέλθει από τα σημεία (3,2), (4,5). Επομένως το πλήθος των ζητούμενων ακολουθιών προκύπτει με εφαρμογή του κανόνα του γινομένου:

$$\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}=40\frac{(x+y-9)!}{(x-4)!(y-5)!}$$

Γ) Οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο (k,n-k) απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ και τουλάχιστον n-k βήματα Π. Αντίστοιχα, οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων από το σημείο (k,n-k) στο σημείο 0 απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Α και τουλάχιστον n-k βήματα Κ. Επομένως μια ακολουθία που ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο (0,0) αφού διέλθει από το σημείο (k,n-k) απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ, n-k βήματα Π, k βήματα Α και n-k βήματα Κ, δηλαδή τουλάχιστον $k+n-k+k+n-k=2n$ συνολικά βήματα. Αφού όμως το ερώτημα αφορά σε ακολουθίες μήκους 2n, απαιτούνται ακριβώς k βήματα Δ, n-k βήματα Π, k βήματα Α και n-k βήματα Κ. Επιπλέον θα πρέπει να προηγηθούν και να εξαντληθούν τα βήματα Δ και Π, αφού οποιαδήποτε παρεμβολή σε αυτά συμβόλου Α ή Κ, θα έχει ως συνέπεια να μη διέλθει η ακολουθία από το σημείο (k,n-k). Έχουμε δηλαδή δύο προβλήματα μεταθέσεων ομάδων όμοιων αντικειμένων και σε κάθε πρόβλημα υπάρχουν δύο ομάδες όμοιων αντικειμένων από τις οποίες η μία αποτελείται από k αντικείμενα και η άλλη από n-k αντικείμενα. Τα δύο αυτά γεγονότα είναι ανεξάρτητα και σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}=\frac{\left(n!\right)^2}{\left(k!\right)^2\left((n-k)!\right)^2}$$

<u>Άσκηση 3</u>

Λύση Α:

Το πρόβλημα θα λυθεί γενικά αρχικά και στη συνέχεια θα τοποθετήσουμε τα συγκεκριμένα νούμερα. Έστω λοιπόν ότι n ο αριθμός των ανδρών. Ας θεωρήσουμε ότι Α1 και Α2 είναι οι δύο άνδρες που δε θα πρέπει να είναι μαζί. Τότε προφανώς οι υπόλοιποι άνδρες είναι σε αριθμό n-2. Ας θεωρήσουμε λοιπόν 2 σύνολα ανδρών. Το σύνολο που αποτελείται από τους n-2 άνδρες και τον Α1, και το σύνολο που αποτελείται από τους n-2 άνδρες και τον Α2. Τότε αν θεωρήσουμε ξεχωριστά τα δύο σύνολα και πάρουμε τους συνδυασμούς k ανδρών από κάθε σύνολο κανένας από τους συνδυασμούς αυτούς δεν θα περιλαμβάνει ταυτόχρονα τους Α1 και Α2. Για κάθε ένα από τα σύνολα n-1 ανδρών οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

$$C(n-1,k)=\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}$$

Για να βρούμε λοιπόν το τελικό αποτέλεσμα θα πρέπει να προσθέσουμε τους συνδυασμούς που προκύπτουν από τα δύο σύνολα και να αφαιρέσουμε τους συνδυασμούς που είναι κοινοί. Αυτοί όμως είναι οι συνδυασμοί k ανδρών από τους n-2 άνδρες που είναι κοινοί και για τα δύο σύνολα. Άρα οι κοινοί συνδυασμοί είναι:

$$C(n-2,k)=\frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}$$

Με βάση τα παραπάνω το ζητούμενο προκύπτει από τον παρακάτω τύπο:

$$2\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}-\frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}$$

Αντικαθιστώντας τα νούμερα παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$2\frac{11!}{7!\cdot(4)!}-\frac{10!}{7!\cdot 3!}=2x330-120=540$$

Λύση Β:

Μπορούμε να διαλέξουμε τους k άνδρες με τρεις τρόπους:

- Τον Α1 και k-1 από τους υπόλοιπους n-2 (εξαιρούμε και τον Α2 από τους υπόλοιπους)
- Τον Α2 και k-1 από τους υπόλοιπους n-2 (εξαιρούμε και τον Α1 από τους υπόλοιπους)
- Κανέναν από τους Α1 και Α2, άρα k από τους υπόλοιπους n-2

Άρα υπάρχουν $\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$ τρόποι

Για n=12 και k=7 ο παραπάνω τύπος δίνει και πάλι 540 δυνατούς τρόπους επιλογής.

Σημείωση: Η άσκηση θα θεωρηθεί απόλυτα σωστή και αν υπολογίσετε τον αριθμό των συνδυασμών που προκύπτουν αν μία θέση από τις 7 είναι πιασμένη υποχρεωτικά από έναν από τους δύο συγκεκριμένους άντρες. Στην περίπτωση αυτή οι δύο άντρες Α1 και Α2 δεν είναι ποτέ μαζί, ούτε στους 7 που επιλέγουμε ούτε στους 5 που μένουν Άρα ισχύουν μόνο οι 2 από τους παραπάνω τρεις τρόπους επιλογής και οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

$$2\cdot\binom{n-2}{k-1}=\frac{2\cdot(n-2)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k)!}=\frac{2\cdot 10!}{6!4!}=420 \text{ τρόποι}$$

<u>Άσκηση 4</u>

α) Έστω ότι Π, Τ και Β είναι τα σύνολα των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων που περιέχουν αντίστοιχα τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ και ΒΕΛΟΣ. Άρα το σύνολο των μεταθέσεων που περιέχει τουλάχιστον μία από αυτές τις λέξεις θα είναι η ένωσή τους:

$$|\Pi \cup T \cup B|$$

Από εγκλεισμό-αποκλεισμό προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}|\Pi \cup T \cup B| &= |\Pi| + |T| + |B| - |\Pi \cap T| - |\Pi \cap B| - |T \cap B| + |\Pi \cap T \cap B| \\ &= 20! + 20! + 20! - 16! - 16! - 16! + 12! = 3 \cdot 20! - 3 \cdot 16! + 12!\end{aligned}$$

Το $|\Pi|$ είναι 20! αφού τη λέξη ΠΥΓΜΗ μπορούμε να την θεωρήσουμε ως ένα γράμμα (αφού και τα 5 γράμματα θα πρέπει να είναι συνεχόμενα). Επομένως έχουμε τις μεταθέσεις των 19 γραμμάτων συν το ένα καινούργιο που αντιστοιχεί στη λέξη. Ομοίως δουλεύουμε και στα υπόλοιπα.

β) Έστω Τ, Σ, Α και Χ τα σύνολα που αντιστοιχούν στις μεταθέσεις 24 γραμμάτων που περιέχουν τις λέξεις ΤΗΝ, ΣΤΗΝ, ΑΣΤΗΝ και ΧΑΣΤΗΝ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $X \subseteq A \subseteq \Sigma \subseteq T$. Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να μετρήσουμε τίποτα παραπάνω από το Τ. Άρα το πλήθος των μεταθέσεων είναι

$$|X \cup A \cup \Sigma \cup T| = |T| = 22!$$

<u>Άσκηση 5</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του περιστερώνα. Τα περιστέρια θα είναι τα υποσύνολα και οι περιστερώνες θα είναι τα αθροίσματα. Το μικρότερο δυνατό άθροισμα θα είναι 10 (ένα σύνολο με το 10) ενώ το μεγαλύτερο θα είναι 99+98+97+...+90=945. Επομένως, υπάρχουν 945-10+1=936 διαφορετικά αθροίσματα.

Το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με 10 στοιχεία είναι 2^{10}. Αφού 1024 > 936 αναγκαστικά θα υπάρχουν δύο υποσύνολα που έχουν ίδιο άθροισμα. Θα πρέπει όμως αυτά τα δύο υποσύνολα που επιλέγουμε να είναι ξένα μεταξύ τους. Έστω ότι τα δύο υποσύνολα Α και Β δεν είναι ξένα. Τότε, αφαιρούμε και από τα δύο σύνολα τα στοιχεία που είναι κοινά. Ισχυριζόμαστε ότι τα νέα σύνολα Α΄ και Β΄ είναι ξένα και έχουν ίδιο άθροισμα.

Πράγματι, έχουν ίδιο άθροισμα αφού τα Α και Β είχαν ίδιο άθροισμα και αφαιρέσαμε ακριβώς τα ίδια στοιχεία και από τα δύο. Επίσης, τα δύο υποσύνολα Α΄ και Β΄ έχουν το καθένα από τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού διαφορετικά τα Α και Β δεν θα είχαν ίσο άθροισμα.