<u>Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας</u>

<u>Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλεύεστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

<u>Ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- συνεργασθείτε με άλλους στις εργασίες και δεν ενημερώσετε τον διδάσκοντα
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2023-2024 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε latex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 3/12/2023

(Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες. Στην 1η σελίδα θα πρέπει να γράφετε το όνομά σας και το ΑΕΜ σας)

<u>Άσκηση 1</u>

Θεωρήστε τις ακόλουθες προτάσεις σε φυσική γλώσσα:
Π1: «Αν έχω λύσει τις ασκήσεις, τότε θα περάσω τα Διακριτά»
Π2: «Αν δεν αρρωστήσω, τότε θα έχω λύσει τις ασκήσεις»
Π3: «Δεν έχω περάσει τα Διακριτά Μαθηματικά»
Π4: «Αρρώστησα»

α) Να εκφράσετε τις παραπάνω δηλώσεις μέσω προτασιακής λογικής με βάση τα εξής προτασιακά σύμβολα:
p: «έχω λύσει τις ασκήσεις»
q: «έχω περάσει τα Διακριτά»
r: «αρρώστησα»

β) Να εξετάσετε αν η πρόταση Π4 μπορεί να προκύψει ως συμπέρασμα από τις προτάσεις Π1, Π2 και Π3 χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας και την έννοια της κρίσιμης γραμμής.

γ) Να δείξετε ότι η πρόταση Π4 μπορεί να εξαχθεί ως συμπέρασμα από τις προτάσεις Π1, Π2 και Π3 χρησιμοποιώντας τις λογικές προτάσεις από το ερώτημα (α) καθώς και γνωστούς κανόνες εξαγωγής συμπεράσματος.

<u>Άσκηση 2</u>

Έστω a και b ακέραιοι. Να δείξετε ότι αν $a^3 + b^3$ είναι περιττός τότε ο a είναι περιττός ή ο b είναι περιττός με δύο τρόπους: α) Έμμεση απόδειξη και β) Αντίφαση.

<u>Άσκηση 3</u>

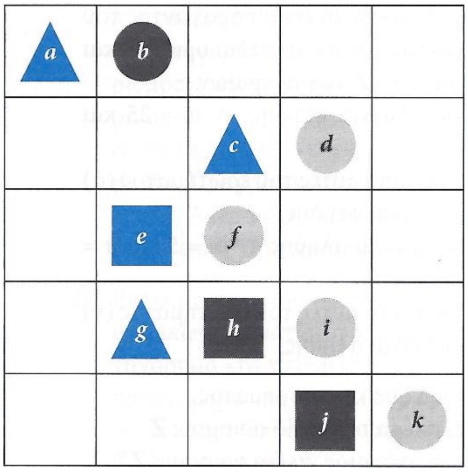
Οι αρμονικοί αριθμοί $H_k, k = 1,2,3, \dots$ ορίζονται από τη σχέση:

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

Να δείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Άσκηση 4



Ο κόσμος του Tarski, παρέχει εικόνες διαφόρων μεγεθών, σχημάτων και χρωμάτων που βρίσκονται πάνω σε ένα πλέγμα. Η διευθέτηση μπορεί να περιγραφεί με λογικούς τελεστές καθώς και με κατάλληλα επιλεγμένα κατηγορήματα. Δίνεται ο διπλανός πίνακας Tarski, όπου τα γράμματα εντός κάθε σχήματος χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για λόγους αναφοράς στο συγκεκριμένο σχήμα. Το πεδίο ορισμού όλων των μεταβλητών αποτελείται από όλα τα αντικείμενα του κόσμου του Tarski. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να κάνετε τα εξής: α) υποδείξτε αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής για τον συγκεκριμένο πίνακα Tarski και αιτιολογήστε την απάντησή σας και β) γράψτε την πρόταση που δίνεται χρησιμοποιώντας τα παρακάτω κατηγορήματα και κατάλληλους ποσοδείκτες.

i. Υπάρχει ένα τρίγωνο x ώστε για όλα τα τετράγωνα y, το x είναι επάνω από το y.
ii. Υπάρχει ένα τρίγωνο x ώστε για όλους τους κύκλους y, το x είναι επάνω από τον y.
iii. Για όλους τους κύκλους x, υπάρχει ένα τετράγωνο y ώστε το y είναι στα δεξιά του x.
iv. Για κάθε αντικείμενο x, υπάρχει ένα αντικείμενο y ώστε αν $x \neq y$ τότε τα x και y έχουν διαφορετικά χρώματα.
v. Υπάρχει ένα αντικείμενο y ώστε για όλα τα αντικείμενα x, αν $x \neq y$ τότε τα x και y έχουν διαφορετικά χρώματα.
vi. Για όλους τους κύκλους x και για όλα τα τρίγωνα y, ο x είναι στα δεξιά του y.
vii. Υπάρχει ένας κύκλος x και υπάρχει ένα τετράγωνο y ώστε τα x και y έχουν το ίδιο χρώμα.
viii. Υπάρχει ένας κύκλος x και υπάρχει ένα τρίγωνο y ώστε τα x και y έχουν το ίδιο χρώμα.

Τα κατηγορήματα που θα χρησιμοποιήσετε είναι:
$Τρίγωνο(x)$: το x είναι ένα τρίγωνο
$Τετράγωνο(x)$: το x είναι ένα τετράγωνο
$Κύκλος(x)$: το x είναι ένας κύκλος
$Επάνω(x, y)$: το x είναι πάνω από το y (όχι αναγκαστικά στην ίδια στήλη)
$Δεξιά(x, y)$: το x είναι δεξιά από το y (όχι αναγκαστικά στην ίδια γραμμή)
$ΊδιοΧρώμα(x, y)$: τα αντικείμενα x και y έχουν ίδιο χρώμα

Ενδεικτικές Λύσεις

Άσκηση 1

α)
Π1: $p \to q$
Π2: $\neg r \to p$
Π3: $\neg q$
Π4: r

β)
Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας.

p	q	r	$p \to q$	$\neg r \to p$	$\neg q$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Η μοναδική γραμμή όπου οι προτάσεις Π1, Π2 και Π3 είναι αληθείς είναι η πράσινη γραμμή. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την κρίσιμη γραμμή, το προτασιακό σύμβολο r είναι αληθές. Άρα, όταν οι προτάσεις Π1, Π2 και Π3 είναι αληθείς τότε και η πρόταση Π4 είναι αληθής. Άρα το συμπέρασμα θα ήταν έγκυρο.

γ)
1. Από Π3, Π1 και Modus Tollens προκύπτει ότι $\neg p$
2. Από πρόταση (1), Π2 και Modus Tollens προκύπτει r

Άρα αποδείχτηκε ότι η πρόταση Π4 προκύπτει από τις άλλες 3.

Άσκηση 2

α) Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι το εξής:
Να δείξετε ότι αν ο a είναι άρτιος και ο b είναι άρτιος τότε ο $a^3 + b^3$ είναι άρτιος.
Αφού a άρτιος σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε $a = 2k$. Ομοίως, $b = 2m$ για ακέραιο m.
Άρα:

$$a^3 + b^3 = (2k)^3 + (2m)^3 = 2(4k^3 + 4m^3)$$

το οποίο σημαίνει ότι και ο $a^3 + b^3$ είναι άρτιος και άρα το θεώρημα αποδείχτηκε.

β) Έστω ότι το θεώρημα δεν ισχύει (είναι ψευδές). Άρα θα θεωρήσουμε ως αληθή την εξής πρόταση:
Ο $a^3 + b^3$ είναι περιττός και ο a είναι άρτιος και ο b είναι άρτιος.
Αφού a άρτιος σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε $a = 2k$. Ομοίως, $b = 2m$ για ακέραιο m.
Άρα:

$$a^3 + b^3 = (2k)^3 + (2m)^3 = 2(4k^3 + 4m^3)$$

το οποίο σημαίνει ότι και ο $a^3 + b^3$ είναι άρτιος. Άτοπο αφού έχουμε θεωρήσει ότι ο $a^3 + b^3$ είναι περιττός και άρα το θεώρημα αποδείχτηκε.

Άσκηση 3

Έστω η πρόταση $P(n) = "H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}"$
Βάση της επαγωγής: $P(0)$ ισχύει αφού $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2} = 1$ που ισχύει.
Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι $P(n)$ είναι αληθές, δηλαδή ότι ισχύει $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
Θα δείξουμε ότι και $P(n+1)$ είναι αληθές. Θα δείξουμε δηλαδή ότι $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$.
Πράγματι:

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} =$$
$$= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Από επαγωγική υπόθεση αυτό το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από:

$$\geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

Άρα αποδείχτηκε ότι $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$ με βάση την επαγωγική υπόθεση. Άρα με μαθηματικη΄επαγωγή αποδείξαμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4

i. Αληθές. Το τρίγωνο a είναι πάνω από κάθε τετράγωνο (*e*, *h*, και *j*). Η λογική πρόταση είναι:
$$\exists x \left(Τρίγωνο(x) \land \left(\forall y \big(Τετράγωνο(y) \rightarrow Επάνω(x, y) \big) \right) \right)$$
ii. Ψευδές. Ο κύκλος b είναι στην πρώτη γραμμή και δεν έχει κάποιο τρίγωνο από πάνω του. Η λογική πρόταση είναι:
$$\exists x \left(Τρίγωνο(x) \land \left(\forall y \big(Κύκλος(y) \rightarrow Επάνω(x, y) \big) \right) \right)$$
iii. Ψευδές. Ο κύκλος k δεν έχει κάποιο τετράγωνο στα δεξιά του. Η λογική πρόταση είναι:
$$\forall x \left(Κύκλος(x) \rightarrow \left(\exists y \big(Τετράγωνο(y) \land Δεξιά(y, x) \big) \right) \right)$$
iv. Αληθές. Δεδομένης της κατανομής των χρωμάτων, για κάθε αντικείμενο μπορούμε να βρούμε ένα διαφορετικό αντικείμενο που να έχει άλλο χρώμα. Η λογική πρόταση είναι:

$$\forall x \exists y \big((x \neq y) \to \neg Ἴδιο Χρώμα(x, y) \big)$$

v. Ψευδές. Η πρόταση αναφέρει ότι υπάρχει ένα αντικείμενο που έχει διαφορετικό χρώμα από όλα τα υπόλοιπα. Δεδομένης της κατανομής των χρωμάτων, αυτό δεν ισχύει. Η λογική πρόταση είναι:

$$\exists y \forall x \big((x \neq y) \to \neg Ἴδιο Χρώμα(x, y) \big)$$

vi. Ψευδές. Ο κύκλος b δεν είναι δεξιά του τριγώνου c. Για όλους τους κύκλους x και για όλα τα τρίγωνα y, ο x είναι στα δεξιά του y. Η λογική πρόταση είναι:

$$\forall x \forall y \Big(\big(Κύκλος(x) \land Τρίγωνο(y) \big) \to Δεξιά(x, y) \Big)$$

vii. Αληθές. Ο κύκλος b έχει το ίδιο χρώμα με το τετράγωνο h. Υπάρχει ένας κύκλος x και υπάρχει ένα τετράγωνο y ώστε τα x και y έχουν το ίδιο χρώμα. Η λογική πρόταση είναι:

$$\exists x \exists y \big(Κύκλος(x) \land Τετράγωνο(y) \land Ἴδιο Χρώμα(x, y) \big)$$

viii. Ψευδές. Όλα τα τρίγωνα έχουν γαλάζιο χρώμα ενώ οι κύκλοι έχουν άσπρο και μαύρο χρώμα. Η λογική πρόταση είναι:

$$\exists x \exists y \big(Κύκλος(x) \land Τρίγωνο(y) \land Ἴδιο Χρώμα(x, y) \big)$$