

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αθροίσματα και Γινόμενα

Ο Εισοδηματίας



- Στο τηλεπαιχνίδι «Ο Εισοδηματίας» (2008) ο Αρναούτογλου για πρώτη φορά δίνει δύο επιλογές:
 - Να πάρεις 50.000 Ευρώ κάθε χρόνο για 20 χρόνια ή
 - Να πάρεις 750.000 Ευρώ εφάπαξ.
- Τι πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν γνωρίζει ότι ο πληθωρισμός (η απώλεια αξίας των χρημάτων) είναι 3% και είναι ίσος με το επιτόκιο της τράπεζας;

Ο Εισοδηματίας

Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τις αξίες θα υπολογίσουμε τη σημερινή αξία (με πληθωρισμό p) όλων των χρημάτων που θα πάρουμε στα επόμενα 20 χρόνια:

- Την 2^η χρονιά: $\frac{50.000}{1 + p}$
- ...
- Την 20^η χρονιά: $\frac{50.000}{(1 + p)^{19}}$

- Άρα η συνολική αξία είναι: $\sum_{i=0}^{19} \frac{50.000}{(1 + p)^i}$

Ο Εισοδηματίας (συνέχεια)

- Τι θα πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν του προτείνουν 50.000 ευρώ επ'άπειρον ή 2.000.000 ευρώ εφάπαξ;
- Η συνολική αξία θα είναι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{50.000}{(1+p)^i}$$

Υπολογισμός Αθροίσματος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απλά κάνοντας τις πράξεις (όχι στην περίπτωση απείρου αθροίσματος). Είναι όμως ασύμφορο (όχι μόνο για τον υπολογιστή αλλά και για εμάς)...
- Ο κλειστός τύπος ενός αθροίσματος μας επιτρέπει να βρίσκουμε άμεσα (σε ένα βήμα) την τιμή του αθροίσματος για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής άθροισης. Υπολογιστικά είναι καλύτερος αυτός ο τρόπος

Άθροισμα Γεωμετρικής Σειράς

$$S(k) = x^0 + x^1 + \dots + x^k$$

$$\underline{-xS(k) = -x^1 - x^2 - \dots - x^{k+1}}$$

Πρόσθεση κατά μέλη:

$$S(k) - xS(k) = 1 - x^{k+1} \Rightarrow S(k) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Άθροισμα Απείρων Όρων Γεωμετρικής Σειράς

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} x^i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x^i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}, x < 1\end{aligned}$$

Ο Εισοδηματίας

- Αν του δίνουν 50.000 Ευρώ για 20 χρόνια ή 750.000, τότε:
 - Σε σημερινή αξία θα είναι 766.190. Άρα καλύτερα να τα πάρεις.
- Αν σου δίνουν 50.000 Ευρώ για πάντα ή 2.000.000, τότε:
 - Σε σημερινή αξία θα είναι 1.716.667. Άρα πάρε τα 2.000.000.

Βασικές Ιδιότητες Αθροισμάτων

$$\sum_{k \in K} ca_k = c \sum_{k \in K} a_k$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k$$

Προσεταιριστική
Ιδιότητα

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)}$$

Μεταθετική Ιδιότητα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το άθροισμα: $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bk)$

Μεταθετική Ιδιότητα: $S_n = \sum_{0 \leq n-k \leq n} (a + bn - bk)$

Πρόσθεση των δύο αθροισμάτων
(προσεταιριστική): $2S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (2a + bn)$

Επιμεριστική Ιδιότητα: $S_n = \frac{1}{2} (2a + bn)(n + 1)$

Εξίσωση Αθροίσματος

Ο στόχος είναι να φτάσουμε σε μία μορφή:

$$S_n = f(S_n)$$

Οπότε λύνουμε ως προς S_n και βρίσκουμε τον κλειστό τύπο

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq k \leq n} a_{k+1}$$

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k$$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + xS_n$$

$$S_n = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x}$$

Στοιβάγμα Βιβλίων

Δ. Μαθηματικά

Δ. Μαθηματικά

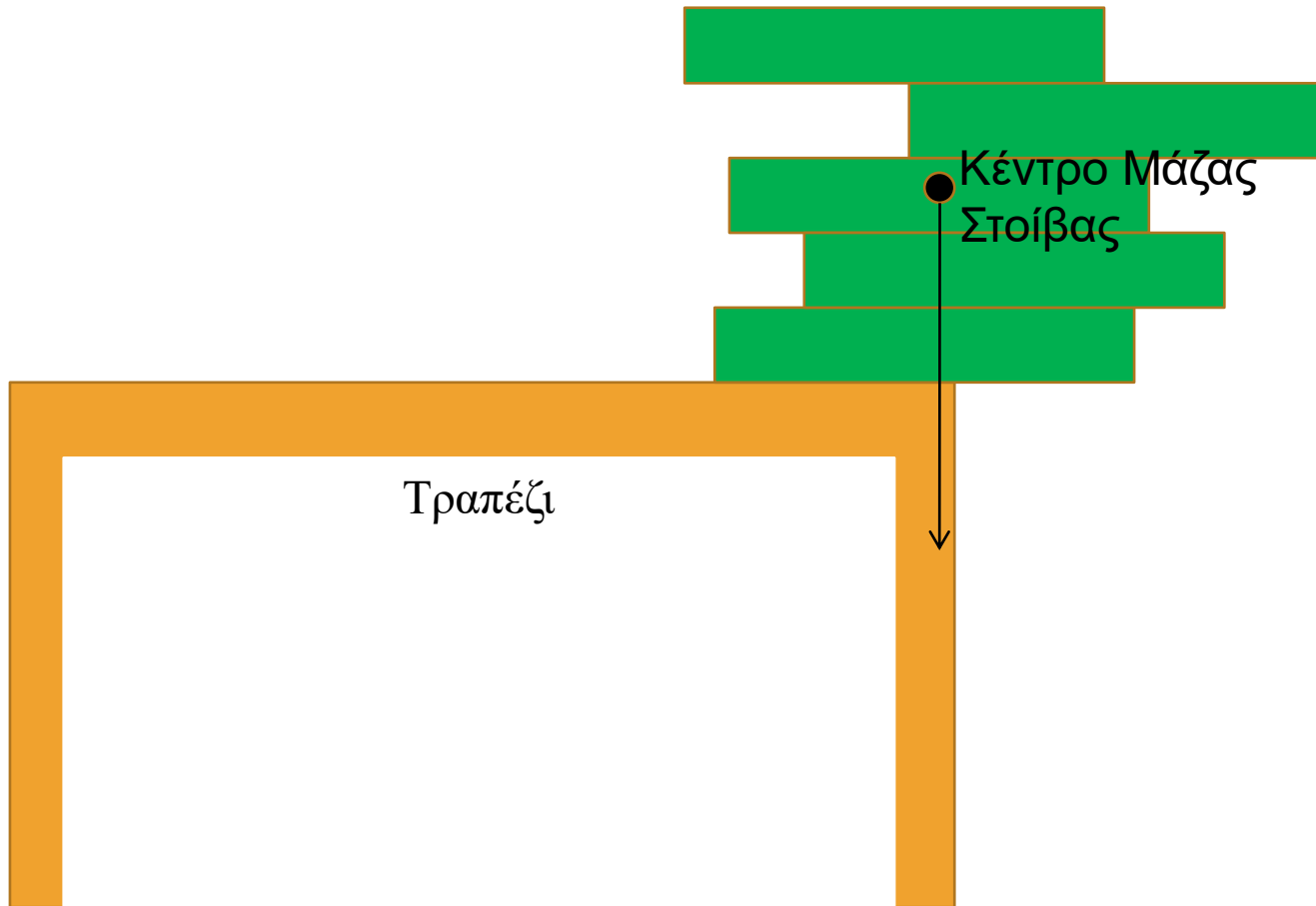
Δ. Μαθηματικά

Δ. Μαθηματικά

Δ. Μαθηματικά

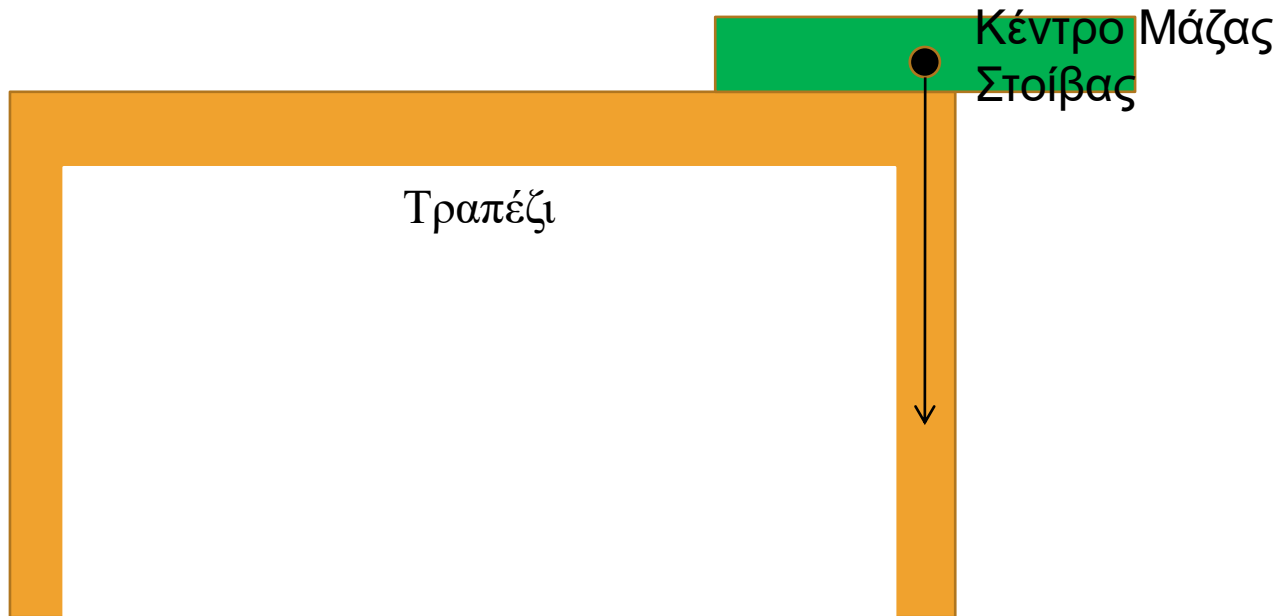
Τραπέζι

Στοιβάγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας



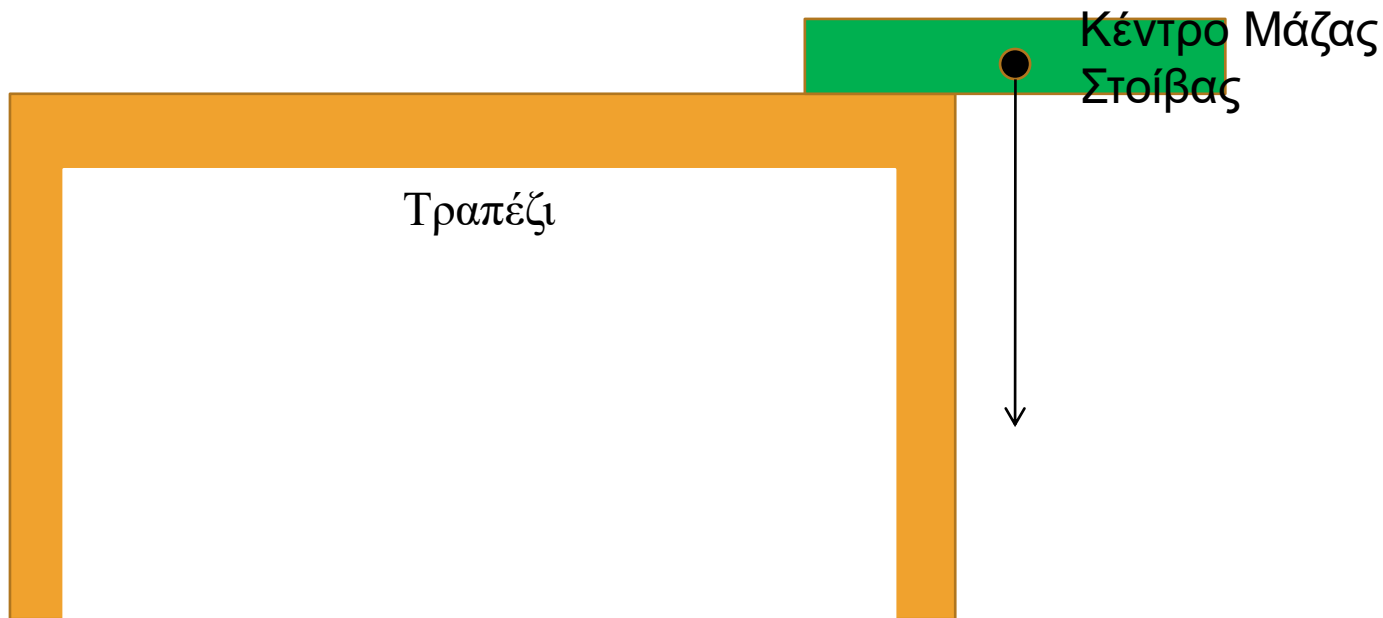
Στοιβάγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εντός του τραπέζιού δεν πέφτει.



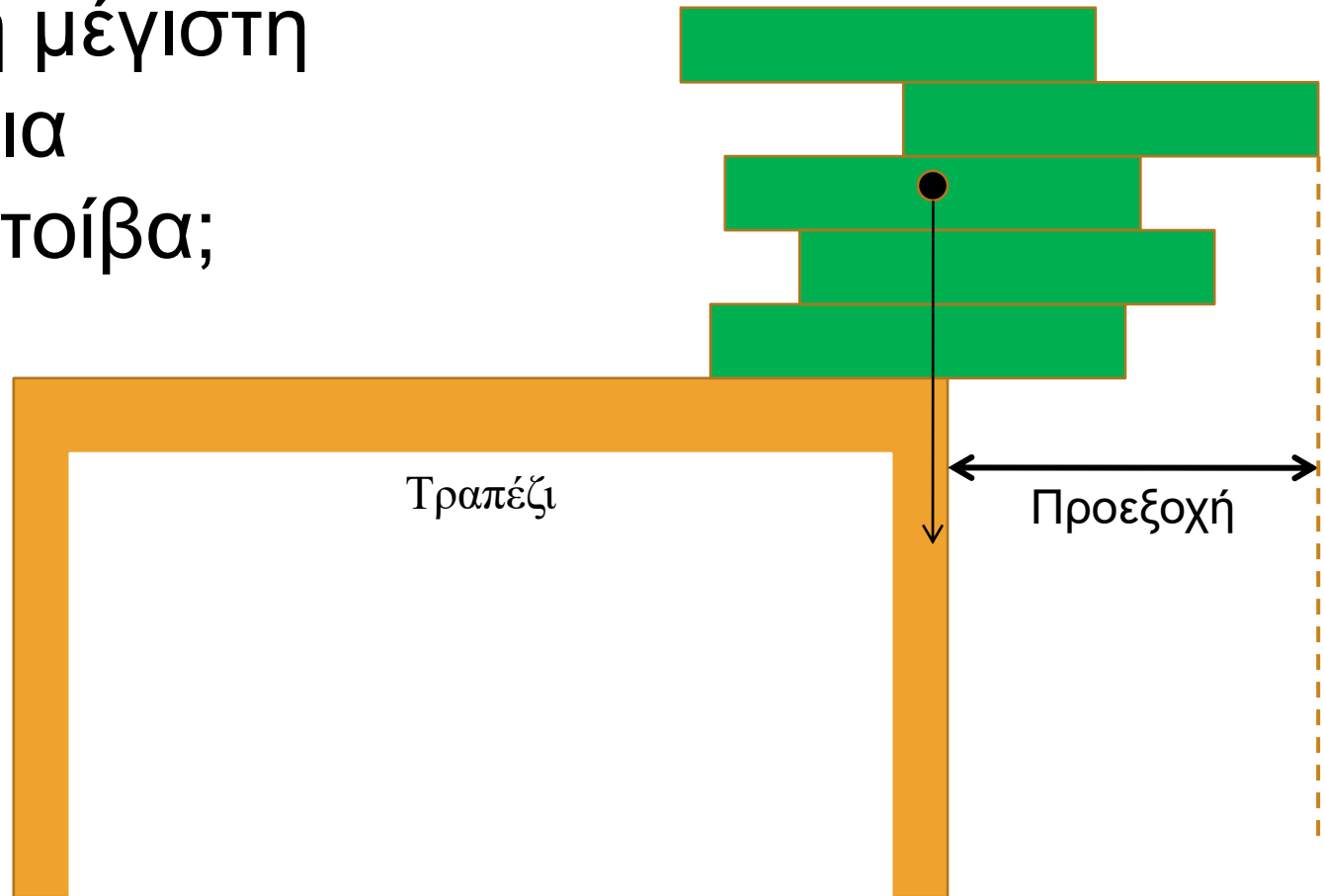
Στοιβάγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εκτός του τραπέζιού τότε θα πέσει.



Στοιβάγμα Βιβλίων – Προεξοχή

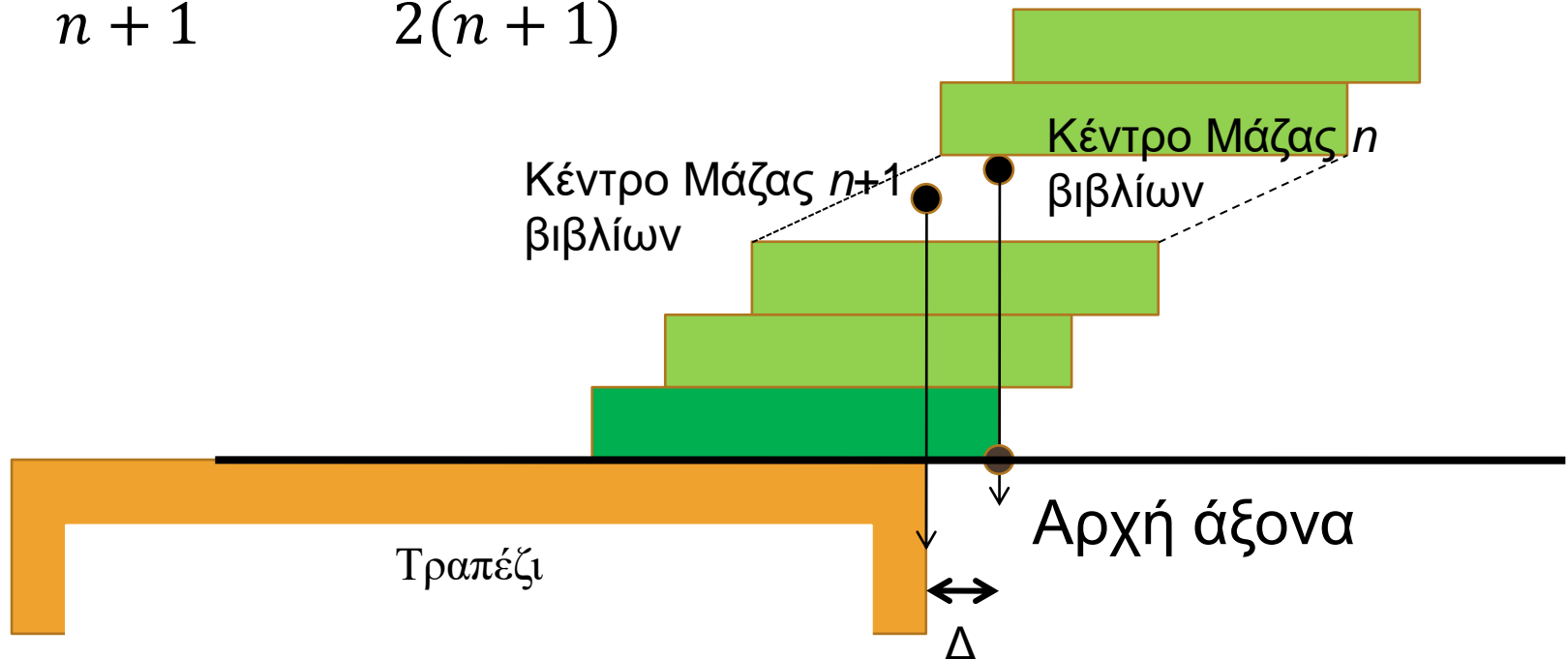
Ποια είναι η μέγιστη προεξοχή για ευσταθής στοίβα;



Στοιβάγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

- Δ = μεταβολή προεξοχής με την πρόσθεση ενός βιβλίου στα n βιβλία
- Συντεταγμένη κέντρου μάζας $(n+1)$ -οστού βιβλίου είναι $1/2$.

$$\Delta = \frac{0 \cdot n + 1/2 \cdot 1}{n + 1} = \frac{1}{2(n + 1)}$$



Αναδρομή

Έστω B_n = προεξοχή n βιβλίων.

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$B_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

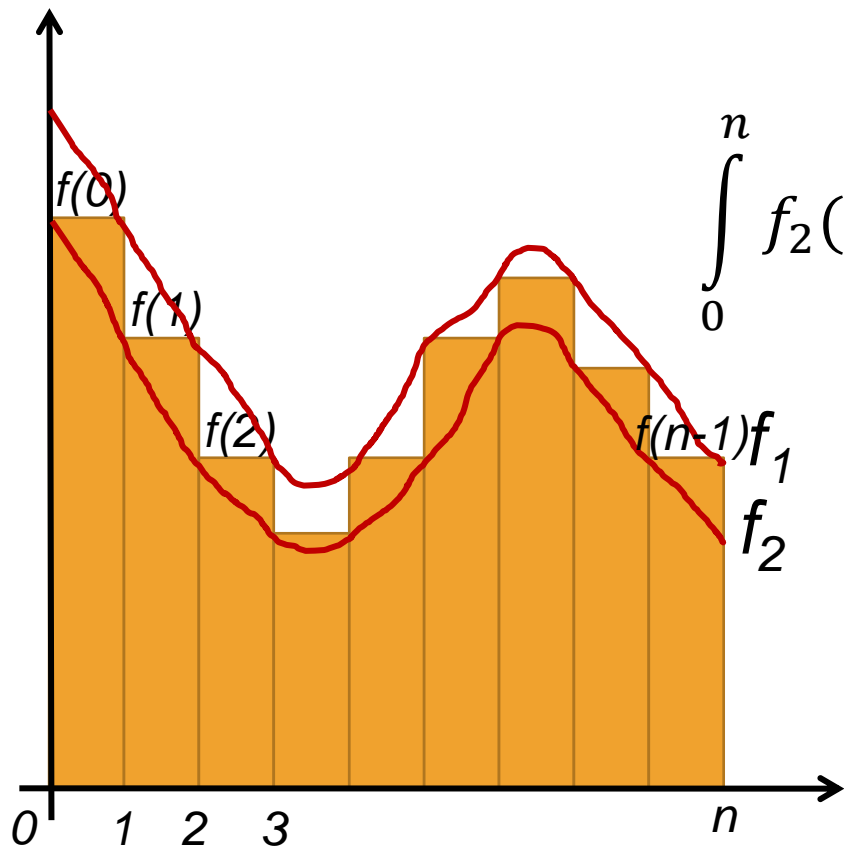
Αρμονικοί Αριθμοί

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

- H_n είναι ο n -οστός αρμονικός αριθμός
- Κλειστός τύπος;;;;;

Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης

$$S_n = \sum_{0 \leq k < n} f(k)$$



$$\int_0^n f_2(x) dx \leq \sum_{0 \leq k < n} f(k) \leq \int_0^n f_1(x) dx$$

Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης

- Για αύξουσες συναρτήσεις:

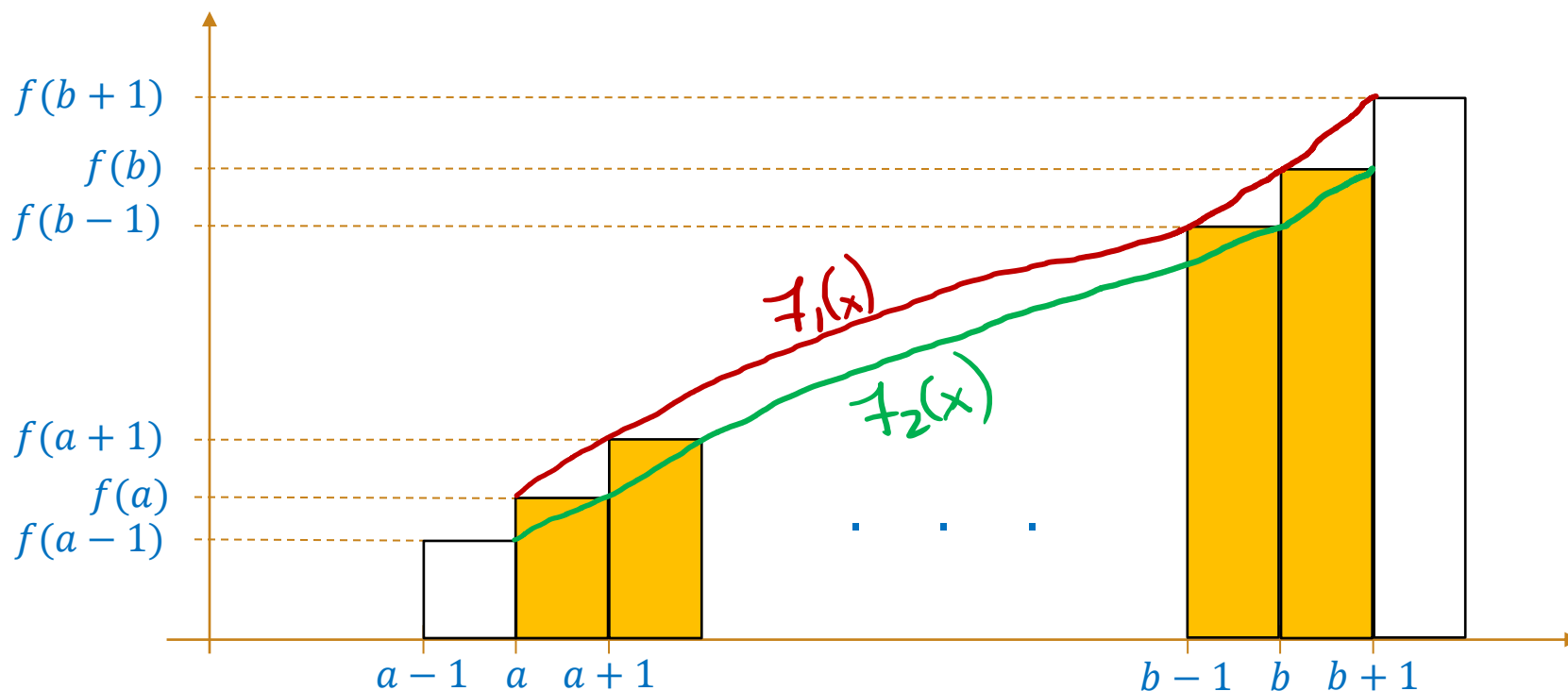
$$\int_{x=a-1}^b f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx$$

- Για φθίνουσες συναρτήσεις:

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a-1}^b f(x)dx$$

Μέθοδος Ολοκλήρωσης: Αύξουσες Συναρτήσεις

$$\int_{x=a-1}^b f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx$$



Πίσω στην Στοιβά Βιβλίων

$$\int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_{x=1}^n \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Για n βιβλία η προεξοχή θα είναι τουλάχιστον $\ln(n+1)/2$ μήκη βιβλίων συνολικά και $(1+\ln n)/2$ το πολύ.

Για προεξοχή ίση με μήκος 10 βιβλίων χρειαζόμαστε τουλάχιστον 22026 βιβλία.

Πρόβλεψη και Απόδειξη με Επαγωγή

- Μαντεύουμε τον κλειστό τύπο
 - Μας δίνει κάποιος τον κλειστό τύπο
 - Τον μαντεύουμε από άλλα παρόμοια αθροίσματα που έχουμε δει
 - Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης για να μαντέψουμε
- Αποδεικνύουμε με επαγωγή τον κλειστό τύπο

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2$$

1. Προσεγγίζουμε με τη μέθοδο ολοκλήρωσης

$$\frac{n^3}{3} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

2. Θεωρούμε ότι η λύση είναι της μορφής $an^3 + bn^2 + cn + d$. Βάζοντας τιμές παίρνουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.
3. Αποδεικνύουμε με επαγωγή το αποτέλεσμα (αφού υπάρχει περίπτωση η πρόβλεψη να είναι λάθος).
 $a=1/3, b=1/2, c=1/6, d=0$.

Τηλεσκοπικές Σειρές

- Αθροίσματα στα οποία οι διαδοχικοί όροι που αθροίζονται αλληλοαναιρούνται:

$$\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) =$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) =$$

$$= -a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \cdots + (a_n - a_n) + a_{n+1} =$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

Γινόμενα

- Τα γινόμενα τα χειριζόμαστε όπως τα αθροίσματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

- Έστω:
$$P_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

- Τότε:
$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^n \ln(a_i)$$

Παράδειγμα $P_n = \prod_{i=1}^n i = n!$

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^n \ln(i)$$

- Από τη μέθοδο ολοκλήρωσης:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Ο τύπος του Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θέμα 14^ο: (1 Μονάδα) (2/2/2017)

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των επιφανειών όλων των απείρων ορθογωνίων με πλευρές $\frac{1}{k}$ και $\frac{1}{k+1}$, όπου $k \geq 1$ είναι ίσο με 1.

Θέμα 13^ο: (0,5 Μονάδες) (16/9/2016)

Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο για το γινόμενο $P_n = \prod_{i=1}^n 2 \cdot 4^i$.

Σεπτέμβρης 23 – 1,2 μονάδες (Μεσαία δυσκολία)

Να βρείτε τον κλειστό τύπο του αθροίσματος:

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{+\infty} j^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2j^{1/3}}\right)^i$$