

Έλεγχος εγκυρότητας τύπου επιχειρήματος

1. Προσδιορίζουμε τις υποθέσεις και το συμπέρασμα του τύπου επιχειρήματος.
2. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα αληθείας που δείχνει τις τιμές αληθείας όλων των υποθέσεων και του συμπεράσματος.
3. Αν ο πίνακας αληθείας περιέχει μια γραμμή στην οποία όλες οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές, τότε υπάρχει πιθανότητα ένα επιχειρήμα με το δοθέντα τύπο να έχει αληθείς υποθέσεις και ένα ψευδές συμπέρασμα, και έτσι ο τύπος του επιχειρήματος να μην είναι έγκυρος. Διαφορετικά, σε κάθε περίπτωση όπου όλες οι υποθέσεις είναι αληθείς, και το συμπέρασμα θα είναι επίσης αληθές, και επομένως ο τύπος του επιχειρήματος θα είναι έγκυρος.

Παράδειγμα 1.3.1 Μη έγκυρος τύπος επιχειρήματος

Αποδείξτε ότι ο παρακάτω τύπος επιχειρήματος δεν είναι έγκυρος.

$$p \rightarrow q \vee \sim r$$

$$q \rightarrow p \wedge r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

Λύση Κατασκευάζουμε έναν πίνακα αληθείας, όπως ο παρακάτω πίνακας, υποδεικνύοντας τις στήλες που αντιστοιχούν στις υποθέσεις και στο συμπέρασμα. Παρόλο που υπάρχουν διάφορες καταστάσεις στις οποίες τόσο οι υποθέσεις όσο και το συμπέρασμα είναι αληθή (γραμμές 1, 7, και 8), υπάρχει μία κατάσταση (αυτή που φαίνεται στη γραμμή 4) όπου οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει όταν ο τύπος του επιχειρήματος είναι έγκυρος, και συνεπώς ο τύπος του επιχειρήματος δεν είναι έγκυρος.

p	q	r	υποθέσεις			συμπέρασμα		
			$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \wedge r$	$p \rightarrow q \vee \sim r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
A	A	A	Ψ	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A	A

Σε αυτή τη γραμμή είναι πιθανό ένα επιχειρήμα αυτού του τύπου να έχει αληθείς υποθέσεις και ψευδές συμπέρασμα. Άρα αυτός ο τύπος επιχειρήματος δεν είναι έγκυρος.

Παρατηρούμε ότι αν θέλουμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος γρήγορα, δεν χρειάζεται να συμπληρώσουμε όλες τις τιμές αληθείας για το συμπέρασμα, παρά μόνο αυτές τις γραμμές στις οποίες όλες οι υποθέσεις είναι αληθείς. Οι γραμμές αυτές ονομάζονται **κρίσιμες γραμμές**. Οι τιμές αληθείας στις άλλες γραμμές είναι άσχετες με την εγκυρότητα ή μη του επιχειρήματος. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.3.2 Έγκυρος τύπος επιχειρήματος

Δείξτε ότι ο παρακάτω τύπος επιχειρήματος είναι έγκυρος:

$$\begin{aligned} & p \vee (q \vee r) \\ & \sim r \\ \therefore & p \vee q \end{aligned}$$

Λύση Κατασκευάζουμε έναν πίνακα αληθείας, όπως ο πίνακας που ακολουθεί, υποδεικνύοντας τις στήλες που αντιστοιχούν στις υποθέσεις και στο συμπέρασμα.

			υποθέσεις			συμπέρασμα
p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\sim r$	$p \vee q$
A	A	A	A	A	Ψ	
A	A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	A	A	A	Ψ	
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	A	A	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	A	A	Ψ	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	

κρίσιμες γραμμές

Σε κάθε περίπτωση όπου οι υποθέσεις είναι και οι δύο αληθείς, το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές, άρα ο τύπος επιχειρήματος είναι έγκυρος.

Modus Ponens και Modus Tollens

Ο τύπος επιχειρήματος που περιέχει δύο υποθέσεις και ένα συμπέρασμα ονομάζεται **συλλογισμός**. Η πρώτη υπόθεση λέγεται πρωτεύων συλλογισμός, ενώ η δεύτερη δευτερεύων συλλογισμός αντίστοιχα. Ο δημοφιλέστερος τύπος συλλογισμού στη λογική ονομάζεται **modus ponens**. Έχει τον εξής τύπο:

$$\begin{aligned} & \text{Αν } p \text{ τότε } q. \\ & p \\ \therefore & q \end{aligned}$$

Να ένα επιχειρήμα αυτού του τύπου:

Αν το άθροισμα των ψηφίων του 371.487 διαιρείται με το 3,
τότε το 371.487 διαιρείται με το 3.

Το άθροισμα των ψηφίων του 371.487 διαιρείται με το 3.

\therefore Το 371.487 διαιρείται με το 3.

Ο όρος *modus ponens* στα Λατινικά σημαίνει «μέθοδος κατάφασης» ή «επιβεβαίωσης» (το συμπέρασμα είναι μια επιβεβαίωση). Πολύ πριν δούμε τον πρώτο μας πίνακα αληθείας, αναμφισβήτητα μας έπειθαν επιχειρήματα αυτού του τύπου. Ωστόσο, είναι χρήσιμο να αποδείξουμε ότι το *modus ponens* αποτελεί έγκυρη μορφή επιχειρήματος, αν όχι για οποιονδήποτε άλλο λόγο, μόνο και μόνο για να επιβεβαιώσουμε ότι υπάρχει συμφωνία μεταξύ του τυπικού ορισμού της εγκυρότητας και του τρόπου με τον οποίο την αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά. Γι' αυτό το σκοπό, θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα αληθείας για τις υποθέσεις και το συμπέρασμα.