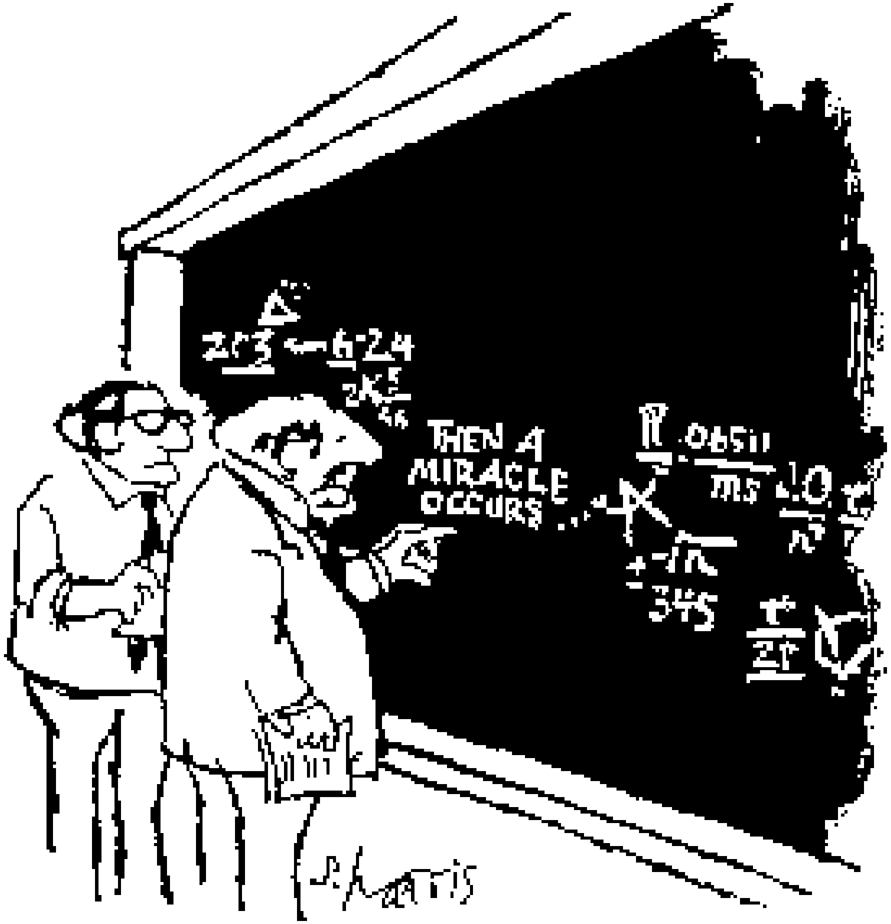
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τεχνικές Απόδειξης



" I think you should be more explicit here in step 2."

Η Απόδειξη

Μια απόδειξη είναι ένα έγκυρο σύνολο επιχειρημάτων που καθιερώνει την αλήθεια μιας δήλωσης-πρότασης.

Μια απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιήσει:

- τις **υποθέσεις** (αν υπάρχουν),
- τα **αξιώματα** που θεωρούνται ότι αληθεύουν (χωρίς απόδειξη),
- και προηγουμένως **αποδεδειγμένα θεωρήματα ή προτάσεις**.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα συστατικά και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, καταγράφεται βήμα προς βήμα η απόδειξη που καθιερώνει την αλήθεια της δήλωσης-πρότασης.

Είδη αποδεικτικών προτάσεων

Θεώρημα (theorem): Είναι μία δήλωση-πρόταση η οποία μπορεί να αποδειχθεί. Στα μαθηματικά ονομάζουμε θεωρήματα τις προτάσεις που έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Πρόταση (proposition): Είναι όπως το θεώρημα αλλά είναι λιγότερο σημαντική.

Λήμμα (lemma): Είναι μία πρόταση η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βοηθητική για την απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος ή πρότασης.

Πόρισμα (corollary): Είναι μία πρόταση η οποία παράγεται άμεσα ή σχεδόν άμεσα από κάποιο θεώρημα ή πρόταση.

Εικασία (conjecture): Είναι μία πρόταση η οποία φαίνεται να αληθεύει για μερικές περιπτώσεις και υποθέτουμε ότι αληθεύει για όλες χωρίς όμως να υπάρχει απόδειξη γι’ αυτό. Αν μία εικασία αποδειχθεί τότε γίνεται θεώρημα.

Παραδείγματα

Θεώρημα (theorem): [Πυθαγόρειο] Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α τότε: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Πρόταση (proposition): Αν $x^2 = \alpha^2$ τότε $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

Λήμμα (lemma): Το τετράγωνο κάθε κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

Πόρισμα (corollary): Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $ΒΓ^2 \neq ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ τότε η γωνία Α δεν είναι ορθή.

Εικασία (conjecture): Μία από τις πιο διάσημες «πρώην» εικασίες είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat: «**Καμία τριάδα *α, β, γ* θετικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης: $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$ για κάθε ακέραιο *n* > 2**» (γενίκευση του Πυθαγορείου). Η εικασία έγινε το 1637 από τον Fermat στο περιθώριο των σημειώσεών του και αποδείχθηκε το 1995 από τον Andrew Wiles.

Pierre de Fermat

Andrew Wiles

Μέθοδοι Απόδειξης Θεωρημάτων

Άμεση Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι Αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός.

Έμμεση Απόδειξη

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \to q$, αρκεί να δείξουμε ότι η αντιθετοαντίστροφή της $\neg q \to \neg p$ ***είναι* Αληθής**.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο $3n+2$ είναι περιττός τότε και ο n είναι περιττός.

Απόδειξη με Αντίφαση

Έστω ότι μπορεί να βρεθεί μία αντίφαση (F) q έτσι ώστε $\neg p \rightarrow q$ να είναι Αληθής. Άρα η πρόταση $\neg p$ είναι Ψευδής και άρα η p θα πρέπει να είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ο αριθμός $2^{1/2}$ είναι άρρητος χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

Σχετικά με την Απόδειξη με Αντίφαση

- Μπορείτε να αποδείξετε ότι δεν ισχύει κάτι με απόδειξη αντίφασης
  - Βρίσκετε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι κάτι είναι ψευδές (Αντιπαράδειγμα – σχετίζεται με τον καθολικό ποσοδείκτη)
- ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙΤΕ να αποδείξετε την καθολικότητα μίας πρότασης με παράδειγμα

Παράδειγμα: αποδείξτε αν ισχύει ή όχι ότι όλοι οι φυσικοί είναι άρτιοι:

- Απόδειξη με αντίφαση: το 1 δεν είναι άρτιος
- **(Λάθος)** απόδειξη με παράδειγμα: το 2 είναι άρτιος

Παράδειγμα

Θέμα 6ο: (1,5 Μονάδες)

Να αποδειχθεί ότι αν ο n είναι ακέραιος και ο n^3+5 είναι περιττός, τότε ο n είναι άρτιος χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους απόδειξης: α) έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο) και β) απόδειξη με αντίφαση.

Στρατηγική

Συνήθως τα θεωρήματα έχουν τη μορφή συνεπαγωγών: $p \rightarrow q$

1η Προσπάθεια: *Άμεση*

2η Προσπάθεια: *Έμμεση*

3η Προσπάθεια: *Αντίφαση*

4η Προσπάθεια: *Εξάντληση;;; – Άλλες Μέθοδοι;;;*

Αποδείξεις κατά Περίπτωση

Για να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή τη μορφής

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

χρησιμοποιούμε την ταυτολογία:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q) \leftrightarrow (p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$$

Παραδείγματα:

1. Να χρησιμοποιηθεί απόδειξη κατά περίπτωση για να δειχτεί ότι $|xy|=|x||y|$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδείξεις Ισοδυναμίας

Για να αποδείξουμε θεώρημα που είναι ισοδυναμία, δηλαδή της μορφής $p \leftrightarrow q$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτολογία:

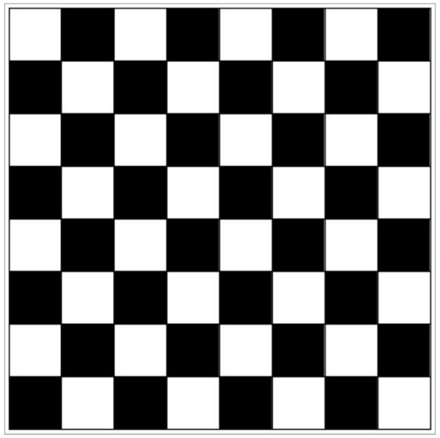
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

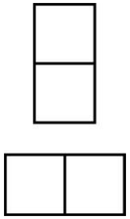
<u>Παράδειγμα:</u> Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι περιττός *αν και μόνο αν* ο n^2 είναι περιττός.

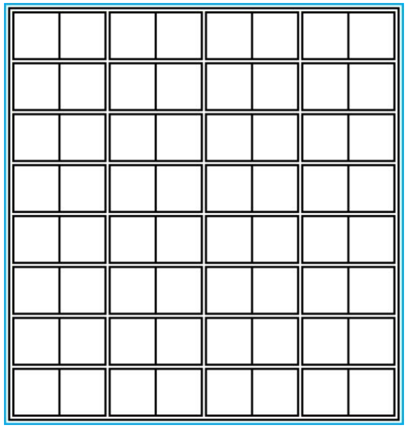
Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2;

Λύση: Ναι! Το παρακάτω παράδειγμα είναι μία κατασκευαστική απόδειξη.







Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε μία γωνία;

Λύση:

(Έστω ότι μπορεί να καλυφθεί)

Η σκακιέρα έχει $64 - 1 = 63$ τετράγωνα.

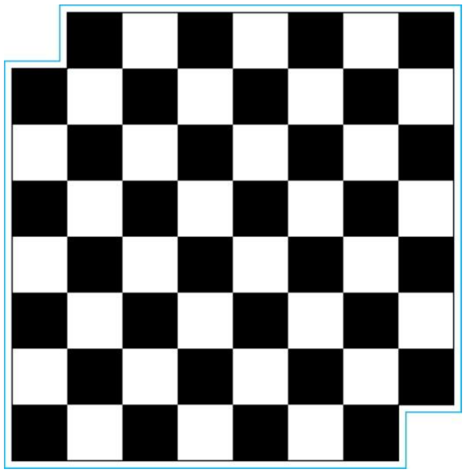
Αφού κάθε ντόμινο έχει 2 τετράγωνα, η σκακιέρα θα πρέπει να έχει άρτιο πλήθος τετραγώνων.

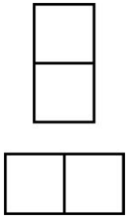
Το 63 δεν είναι άρτιος.

Άτοπο.

Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε δύο αντιδιαμετρικές γωνίες;





Αποδείξεις για Ποσοτικοποιημένες Προτάσεις

Αποδείξεις Ύπαρξης:

Πολλά θεωρήματα κάνουν ισχυρισμούς ότι υπάρχουν αντικείμενα συγκεκριμένου τύπου.

$$\exists x P(x)$$

Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: εύρεση στοιχείου a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής.

Μη Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: δεν βρίσκουμε στοιχείο a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής, αλλά με άλλο τρόπο (π.χ. αντίφαση) βρίσκουμε ότι η $\exists x P(x)$ είναι Αληθής.

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα:</u> Να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κύβων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

$$1729=10^3+9^3=12^3+1^3$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να δειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y έτσι ώστε ο x^y να είναι ρητός.

<u>Παράδειγμα:</u> Αποδείξτε ότι ένας από τους δύο αριθμούς $2\times10^{500}+15$ και $2\times10^{500}+16$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Αποδείξεις Μοναδικότητας

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ύπαρξη μοναδικού σημείου με συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ο τρόπος απόδειξης είναι:

1. Ύπαρξη: αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στοιχείο x με την ιδιότητα
2. Μοναδικότητα: Δείχνουμε ότι αν $x \neq y$, τότε το y δεν έχει την ιδιότητα.

$$\exists x(P(x) \land \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))) \qquad ή \qquad \exists ! x(P(x))$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι κάθε ακέραιος έχει έναν μοναδικό προσθετικό αντίθετο.

Αντιπαράδειγμα

Μπορούμε να δείξουμε ότι η δήλωση της μορφής $\forall x P(x)$ είναι ψευδής αν μπορούμε να βρούμε μία τιμή a για την οποία η $P(a)$ να είναι ψευδής (το αντιπαράδειγμα).

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η δήλωση «Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων» είναι Ψευδής.

Παράδειγμα: Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί. (κάντε το παίρνοντας το συμπλήρωμα)

Εξάντληση

Όταν η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε δεν γίνεται με τις προηγούμενες μεθόδους:

Εξαντλητική Απόδειξη (Exhaustive Proof)

- Αποδεικνύουμε το ζητούμενο εξετάζοντας κάθε μία τιμή της μεταβλητής (ή συνδυασμούς των μεταβλητών) στο πεδίο ορισμού της πρότασης.

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \leq 4$ ισχύει: $(n+1)^3 \geq 3^n$

Χωρίς Βλάβη Γενικότητας

Να δείξετε ότι αν x και y ακέραιοι και τα $x \cdot y$ και $x+y$ είναι άρτιοι, τότε τα x και y είναι άρτιοι.

Απόδειξη:

Έμμεση. Έστω ότι x και y δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε ο ένας οι και οι δύο είναι περιττοί. *Χωρίς βλάβη γενικότητας*, έστω ότι ο x είναι περιττός.

Τότε: $x = 2m + 1$ για κάποιον ακέραιο m.

Περίπτωση 1: ο y άρτιος. Τότε $y = 2n$ για κάποιον ακέραιο n, και άρα

$$x+y = (2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1 \text{ είναι περιττός}$$

Περίπτωση 2: *ο* y περιττός. Τότε $y = 2n + 1$ για κάποιον ακέραιο n, και άρα $x \cdot y = (2m + 1)\,(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$ είναι περιττός

Η περίπτωση για να είναι ο y περιττός είναι παρόμοια.

Καθολικές Προτάσεις

Για να αποδείξουμε θεωρήματα της μορφής $\forall x P(x)$, υποθέτουμε αυθαίρετο x και δείχνουμε ότι η $P(x)$ είναι αληθής. Λόγω καθολικής γενίκευσης θα ισχύει ότι $\forall x P(x)$.

Παράδειγμα: Ένας ακέραιος x είναι άρτιος αν και μόνο αν ο x^2 είναι άρτιος.

Λύση: Θ.δ.ο. $\forall x$ [x άρτιος $\leftrightarrow$ x^2 άρτιος]

Ασκήσεις

- Έστω η λογική πρόταση $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$.
  1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x, y, z): \left((x^2 = y^2 = z^2) \rightarrow (x = y = z)\right)$$

  2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x, y, z): \left((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)\right)$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \exists y \exists z P(x,y,z)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re^{+}, z \in \Re^{-}, z \neq 0)$;

$$P(x,y,z): \left((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z)\right)$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x,y,z): \left((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z)\right)$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \forall y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 0$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\forall x \exists y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x + y = 0$$

Μαθηματική Επαγωγή

Αποδείξεις Ιδιοτήτων για Διακριτά Αντικείμενα

9/11/2023

Χρήση

Η Μαθηματική Επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο για την απόδειξη αποτελεσμάτων που έχουν ληφθεί με κάποιο άλλο τρόπο.

- Δεν αποτελεί εργαλείο ανακάλυψης τύπων ή θεωρημάτων

Μία Ισοδύναμη Ιδιότητα με τη Μαθηματική Επαγωγή

Η Ιδιότητα (Αξίωμα) της *Καλής Διάταξης*:

Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των θετικών ακέραιων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

- Ιδιότητα $P(n)$ στους φυσικούς αριθμούς
- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall n\, P(n)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων

$$\left[P(1) \wedge \forall s(P(s) \rightarrow P(s+1))\right] \rightarrow \forall n P(n)$$

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in N$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ είναι αληθής τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η P(n) είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

Παράδειγμα

$P(n)=\{n^3+2n$ διαιρείται από το 3, $n \in N-\{0\}\}$

$P(1)=1+2=3$ – ***Αληθές***

Έστω ότι ισχύει το $P(n\text{-}1)$

$P(n-1)= (n-1)^3+2(n-1)=n^3-3n^2+3n-1+2n-2=$

$n^3-3n^2+5n-3=3\kappa$ *για* $\kappa \in N$

$P(n)= (n^3-3n^2+5n-3)+(3n^2-3n+3)=3\kappa+3(n^2-n+1)$

Αποδείχτηκε.

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. (Ανισότητα Bernoulli) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι αν $h > -1$ τότε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n ισχύει ότι:

$$1 + nh \leq (1+h)^n$$

Ισχυρή Επαγωγή

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in N$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν οι $P(k)$, $P(k+1)$,…, $P(n)$ είναι αληθείς τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η P(n) είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

$$\left[P(1) \wedge \forall k((P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1))\right] \rightarrow \forall n P(n)$$

Άσκηση

Rosen (Παράδειγμα 3) Θεωρήστε ένα παιχνίδι όπου δύο παίκτες με τη σειρά αφαιρούν ένα θετικό πλήθος σπίρτων από έναν εκ των δύο σωρών με σπίρτα που υπάρχουν. Ο παίκτης που θα αφαιρέσει το τελευταίο σπίρτο κερδίζει. Να δείξετε ότι, αν οι δύο σωροί έχουν το ίδιο πλήθος σπίρτων στην αρχή, ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντοτε να νικήσει.

Ποιο είναι το Σφάλμα;

Απόδειξη ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα:

Έστω P(*n*) η πρόταση «Ένα σύνολο *n* αλόγων έχουν το ίδιο χρώμα»

P(1) προφανώς ισχύει.

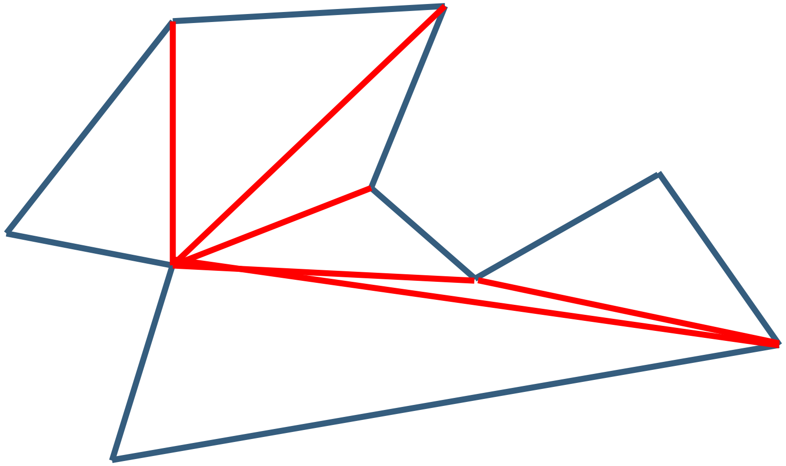
Έστω P(*k*). Θεωρήστε οποιοδήποτε αριθμημένο σύνολο *k*+1 αλόγων. Τα πρώτα *k* άλογα έχουν το ίδιο χρώμα όπως και τα τελευταία *k* άλογα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή αυτά τα δύο σύνολα επικαλύπτονται σημαίνει ότι και τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο χρώμα και άρα η P(*k*+1) είναι αληθής.

Άσκηση σε Ισχυρή Επαγωγή

Ποια χρηματικά ποσά μπορούν να σχηματιστούν με κέρματα αξίας 2 ευρώ και χαρτονομίσματα αξίας 5 ευρώ;

Ισχυρή Επαγωγή και Υπολογιστική Γεωμετρία

Απλό Πολύγωνο



Τριγωνοποίηση

Θεώρημα: *Ένα απλό πολύγωνο με n πλευρές, όπου $n \geq 3$ ακέραιος, μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε $n-2$ τρίγωνα.*

Λήμμα: *Κάθε απλό πολύγωνο με τουλάχιστον 4 πλευρές, έχει μία εσωτερική διαγώνιο.*

(χωρίς απόδειξη)