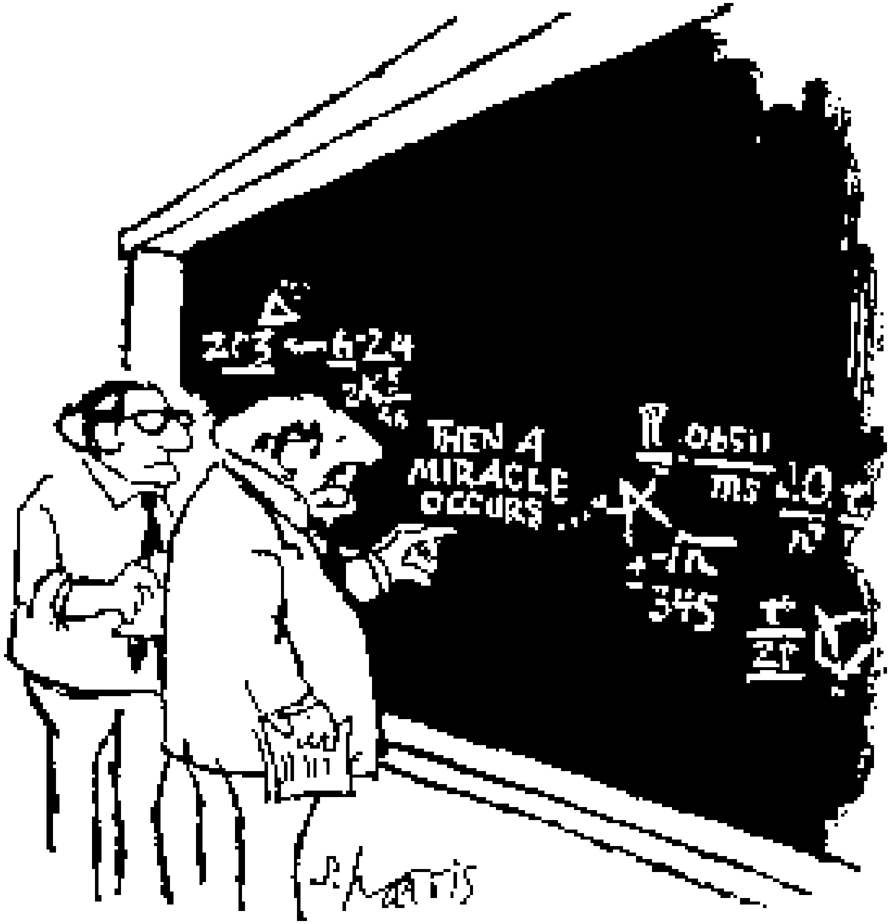


“ I think you should be more explicit here in step 2.”

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Προτασιακός Λογισμός – Γρήγορα ☺

Η Πριγκίπισσα και το

Αν ρώταγα ένα μέλος της φυλής που δεν ανήκεις για το ποιον δρόμο πρέπει να πάρω για το κάστρο τι θα μου έλεγε;

Μία πριγκίπισσα επισκέπτεται ένα νησί που κατοικείται από 2 φυλές. Τα μέλη της μίας φυλής λένε πάντα αλήθεια ενώ τα μέλη της άλλης πάντα ψέματα.

Η πριγκίπισσα φτάνει σε δύο μονοπάτια. Θα πρέπει να ξέρει ποιο μονοπάτι θα ακολουθήσει έτσι ώστε να αποφύγει το δράκο που βρίσκεται στο ένα μονοπάτι και να σώσει τον πρίγκιπα από την κακή μάγισσα στο κάστρο που βρίσκεται στο άλλο μονοπάτι.

Στην αρχή των δύο μονοπατιών υπάρχει 1 μέλος από κάθε φυλή χωρίς όμως να ξέρει ποιος λέει αλήθεια και ποιος ψέματα. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει η πριγκίπισσα για να βρει το δρόμο προς το κάστρο;

Κάτι για να σκεφτόμαστε...

Κάτω από μία καρυδιά κάθονται 3 άνθρωποι. Ο Κωστίκας (*Κ*), ο Γιωρίκας (*Γ*) και ο Πανίκας (*Π*). Ας υποθέσουμε ότι καθένας από αυτούς μπορεί να λέει μόνο αλήθεια ή ψέματα.

- Ο *Κ* λέει, «Όλοι μας είμαστε ψεύτες»
- Ο *Γ* λέει «Ακριβώς ένας λέει αλήθεια»

Ποιος από τους τρεις λέει ψέματα και ποιος αλήθεια;

(μπορεί η πληροφορία να μην είναι αρκετή.....)

Λογική

«Λογική είναι η επιστήμη των απαραίτητων κανόνων της σκέψης, χωρίς τους οποίους δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κατανόηση ή συλλογισμός.»

Immanuel Kant, 1785

«Αν ένα γεγονός είναι ενάντια στη κοινή λογική, αλλά παρόλα αυτά είμαστε υποχρεωμένοι να το δεχθούμε και να ασχοληθούμε μαζί του, τότε μαθαίνουμε να αλλάζουμε την έννοια της κοινής λογικής.»

P. J Davis and R. Hersh, 1981

Λογικές προτάσεις

- Λογική πρόταση ή απλά ***πρόταση*** (proposition-statement):
  - Δήλωση αποτελούμενη από σύμβολα ή λέξεις και η οποία είναι είτε ***ψευδής*** (False) είτε ***αληθής*** (True) αλλά όχι και τα δύο
- Η πρόταση έχει μία μόνο ***τιμή αληθείας*** (truth value)
- Συμβολισμός: $F - \Psi - 0,\ T - A - 1$

Παραδείγματα

- Ο αριθμός 3 διαιρεί τέλεια τον αριθμό 10 (F)
- Ο κροκόδειλος μπορεί να πετάξει (F)
- $2^7=128$ (T)
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών (*εικασία του Goldbach*) (F ή T;)

Δεν θεωρούνται προτάσεις:

$x \in \mathbf{N}$

$x^2 = -1$

Ποιοι είναι οι διαιρέτες του 123;

Να δείξετε τη σχέση:

Σύνθετες προτάσεις

- ***Σύνθετες*** (compound) ***προτάσεις:*** προκύπτουν από σύνδεση άλλων προτάσεων με λογικούς συνδέσμους (υποδηλώνει μεταξύ τους σχέση)
- Σύνδεσμοι: ***λογικές πράξεις*** ή ***λογικοί τελεστές*** (logical operators).
- Οι λογικές πράξεις ορίζονται με τη βοήθεια του ***πίνακα αληθείας*** (truth table)

Προτασιακή Λογική

Ο τομέας της λογικής που ασχολείται με προτάσεις.

Σύζευξη (conjunction)

- "*p* και *q*"

Είναι αντιμεταθετική;

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Σύζευξη;

Διάζευξη (disjunction)

- "p ή q"

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Διάζευξη;

Αποκλειστική Διάζευξη (disjunction)

- "*p* ή *q αλλά όχι και τα δύο*"

p	q	$p \oplus q$
F	*F*	*F*
F	*T*	*T*
T	*F*	*T*
T	*T*	*F*

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Αποκλειστική Διάζευξη;

Λογικές Πράξεις: Άρνηση (negation)

- "όχι " p :

Πίνακας Αληθείας

p	$\neg p$
F	T
T	F

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή»

«Είμαι από τον Άρη.»

Άρνηση;

Συνεπαγωγή (implication)

- «*p* συνεπάγεται την *q*»
- «Αν *p* τότε *q*»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

$$p \rightarrow q$$

Συνεπαγωγή (implication)

Αν εκλεγώ θα μειώσω τους φόρους.

- «*p* συνεπάγεται την *q*»
- «Αν *p* τότε *q*»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \wedge q) \rightarrow q$ θέλουμε να είναι πάντα αληθής

<u>*Ένα ανέκδοτο*</u>:
Κάποιος θεώρησε λάθος την ιδέα ότι ξεκινώντας από λάθος προτάσεις μπορείς να καταλήξεις σε μία οποιαδήποτε πρόταση και προκάλεσε τον Β. Russell να δείξει ότι αν 4=5 τότε ο B.R. είναι ο πάπας. Τί νομίζετε ότι είπε;

Έστω 4=5. Τότε 1=2. Έγω και ο πάπας είμαστε δύο, άρα εγώ και ο πάπας είμαστε ένα.

Συνεπαγωγή

$$p \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q)$$

Συνεπαγωγή

Αν σήμερα είναι Πάσχα, τότε αύριο είναι Δευτέρα.

1. Η *αντίστροφη* της $p \rightarrow q$ είναι η $q \rightarrow p$.
2. Η *αντίθετη* της $p \rightarrow q$ είναι η $\neg p \rightarrow \neg q$.
3. Η *αντιθετοαντίστροφη* της $p \rightarrow q$ είναι η $\neg q \rightarrow \neg p$.

Μία συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της. (απόδειξη με πίνακα αληθείας ή με ιδιότητες)

Ισοδυναμία (equivalence)

«p είναι ισοδύναμη με q»

είναι ισοδύναμο με $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p=“Είμαι ενήλικας”
q=“Είμαι ≥18 χρονών”

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη

Η r είναι μία ***ικανή συνθήκη*** για την s

«αν r τότε s»

Η r είναι μία ***αναγκαία συνθήκη*** για την s

«αν όχι r τότε όχι s»

«αν s τότε r»

«s μόνο αν r»

Παράδειγμα: «Αν ο Γιάννης έχει δικαίωμα ψήφου, τότε είναι τουλάχιστον 18 ετών.»

Ικανή και Αναγκαία

- Ικανή συνθήκη για να είναι ο x άρτιος είναι να διαιρείται από το 4. Είναι αναγκαία;
- Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο x άρτιος είναι να διαιρείται από το 2. Είναι ικανή;
- Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $x \geq 3$ πρώτος είναι να μη διαιρείται από το 2. Είναι ικανή;

Προτεραιότητα Λογικών Τελεστών

Γενικά καθορίζουμε την προτεραιότητα με τις παρενθέσεις. Όταν δεν το κάνουμε αυτό τότε οι τελεστές με σειρά προτεραιότητας από υψηλότερη προς χαμηλότερη είναι:

1. Άρνηση
2. Σύζευξη
3. Διάζευξη
4. Συνεπαγωγή
5. Ισοδυναμία

Σύνθετες προτάσεις

- Προτάσεις $p_1, \ldots, p_n$

- Λογικές πράξεις $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- Σύνθετες προτάσεις $\mathrm{P}(p_1, \ldots, p_n)$

Από Φυσική Γλώσσα

«Δεν μπορείτε να ανεβείτε στο τρενάκι του λούνα παρκ, αν έχετε ύψος κάτω από 1.2 μέτρα, εκτός, αν είστε παραπάνω από 16 χρονών»

Λογική πρόταση;

q : «μπορείτε να ανεβείτε στο τρενάκι του λούνα παρκ»

r : «έχετε ύψος κάτω από 1.2 μέτρα»

s : «είστε παραπάνω από 16 χρονών»

$$(r \land \neg s) \rightarrow \neg q$$

Πίνακας Αληθείας Σύνθετης Πρότασης

Όταν μια σύνθετη πρόταση αποτελείται από n απλές προτάσεις, ο πίνακας αληθείας αποτελείται από 2^n γραμμές

Παράδειγμα

$$P(p,q,r) = \neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg p \vee r$	$\neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$
T	T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	F

Ταυτολογία και αντίφαση

- ***Ταυτολογία*** (tautology):
  - Σύνθετη πρόταση η οποία παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας *T*
- ***Αντίφαση*** (contradiction):
  - Σύνθετη πρόταση που παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας *F*

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Ίσες προτάσεις

Δεν είναι λογικός σύνδεσμος. Η $p \equiv q$ δεν είναι λογική πρόταση.

- ***Ίσες ή λογικά ισοδύναμες*** σύνθετες προτάσεις:

$$P(p_1,\ldots,p_n) \equiv Q(p_1,\ldots,p_n)$$

- Όταν οι πίνακες αληθείας τους είναι ίδιοι
- Αποδεικνύεται ότι η ισότητα δύο προτάσεων ισχύει αν και μόνο αν η πρόταση

$$P(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow Q(p_1,\ldots,p_n)$$

είναι ταυτολογία

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

Λογικές Ισοδυναμίες

Νόμος	**Περιγραφή**
Ταυτότητας	$p \leftrightarrow p$
Διπλής άρνησης	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
Αποκλείσεως τρίτου	$p \vee \neg p \leftrightarrow T$
Αντιφατικότητας	$\neg(p \wedge \neg p) \leftrightarrow T$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Αντιμεταθετικότητας	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
Προσεταιριστικότητας	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Αντιθετικός	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Επιμεριστικός	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Αναδιάταξης	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$
Εξαγωγής	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Παράδειγμα (από εξετάσεις):

(1 Μονάδα)

Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία χωρίς τη χρήση πίνακα αληθείας, αναγράφοντας τις ιδιότητες που χρησιμοποιείτε σε κάθε βήμα.

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$$

Παράδειγμα

(Ερώτημα από Πρόοδο)

Θέμα 8ο: (1 Μονάδα) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτημα.

Α) Έστω οι παρακάτω προτάσεις: p: «Η Γωγώ εργάζεται μέχρι αργά», q: «Ο Μήτσος εργάζεται μέχρι αργά» και r: «θα φάνε στο σπίτι». Για κάθε πρόταση που δίνεται να κυκλώσετε την αντίστοιχη λογική πρόταση.

«Αν η Γωγώ ή ο Μήτσος δεν εργαστούν μέχρι αργά τότε θα φάνε στο σπίτι.»

α) $\neg(p \vee q) \rightarrow r$ β) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$

γ) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ δ) $r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

«Η Γωγώ και ο Μήτσος δεν εργάζονται μέχρι αργά.»

α) $\neg(p \vee q)$ β) $\neg p \vee \neg q$ γ) $p \wedge q$ δ) $p \rightarrow \neg q$

«Θα φάνε στο σπίτι μόνο αν η Γωγώ δεν εργάζεται μέχρι αργά.» (αναγκαία συνθήκη)

α) $r \rightarrow p$ β) $\neg p \rightarrow \neg r$ γ) $p \rightarrow \neg r$ δ) $p \rightarrow r$

Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Μέθοδοι Απόδειξης

Θεώρημα: Μία δήλωση που μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει.

Απόδειξη: Το επιχείρημα που αποτελείται από τη σειρά δηλώσεων που χρησιμοποιούμε για να καταλήξουμε στο θεώρημα.

Αξίωμα: Υποθέσεις που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του θεωρήματος.

Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων: τα μέσα που χρησιμοποιούνται για εξαγωγή συμπερασμάτων από άλλες δηλώσεις (βήματα απόδειξης)

Εγκυρότητα Απόδειξης

Αν κάθε φορά που όλες οι υποθέσεις (ή αξιώματα) είναι αληθείς τότε είναι αληθές και το συμπέρασμα.

Δείξτε ότι η παρακάτω απόδειξη δεν είναι έγκυρη:

$$p \rightarrow q \vee \neg r$$
$$q \rightarrow p \wedge r$$
$$\therefore p \rightarrow r$$

Κανόνας Απόσπασης (modus ponens)

$$\frac{(p \wedge (p \to q)) \to q \text{ ή}}{\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

Παράδειγμα:
«Αν σήμερα χιονίσει τότε θα κάνουμε σκι.»
«Σήμερα χιονίζει.»
Άρα: «Θα κάνουμε σκι.»

Μέθοδος Άρνησης (modus tollens)

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p \text{ ή}$$

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Παράδειγμα:

«Αν ο Δίας είναι άνθρωπος, τότε ο Δίας είναι θνητός.»

«Ο Δίας δεν είναι θνητός.»

Άρα: «Ο Δίας δεν είναι άνθρωπος.»

Κανόνες

$p \to (p \vee q)$	Πρόσθεση (γενίκευση)
$(p \wedge q) \to p$	Απλοποίηση (ειδίκευση)
$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	Σύζευξη
$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus Ponens
$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	Modus Tollens
$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα)
$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$	Διαζευκτικός Συλλογισμός (Απαλοιφή)
$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$	Διαχωρισμός

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα τότε θα κολυμπήσουμε.»

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

∴ « Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα δεν είναι έγκυρο.

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν δεν έχει ήλιο τότε δεν θα κολυμπήσουμε.»

(Θα κολυμπήσουμε μόνο αν έχει ήλιο)

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

$\therefore$ « Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα είναι έγκυρο.

Ποιο να Ανοίξω; – Το Χρωστάω

Υποθέσεις:

1. Μία και μόνο μία από τις δύο προτάσεις είναι αληθής.
2. Έστω ότι το σεντούκι μπορεί να είναι σε μία από τις τρεις καταστάσεις: άδειο, γεμάτο με θησαυρό και γεμάτο με σκορπιούς

Λογικές Πλάνες

Σφάλμα κατά τον συλλογισμό που μας οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα.

1. Σφάλμα αντιστρόφου:

«Αν ο Κώστας αντιγράφει, τότε κάθεται στην τελευταία σειρά.»

«Ο Κώστας κάθεται στην τελευταία σειρά.»

∴ «Ο Κώστας αντιγράφει.»

2. Σφάλμα αντιθέτου:

«Αν τα επιτόκια αυξηθούν, οι τιμές στο χρηματιστήριο θα πέσουν.»

«Τα επιτόκια δεν αυξάνονται.»

∴ «Οι τιμές στο χρηματιστήριο δεν θα πέσουν.»

Ο Κωστίκας, ο Γιωρίκας και ο Πανίκας...

- Για κάθε όνομα μία boolean μεταβλητή έτσι ώστε αν λέει ψέματα να είναι 0, αν λέει αλήθεια να είναι 1.
- Η πρόταση Ρ=«Όλοι μας λέμε ψέματα» είναι η Ρ=Κ΄Γ΄Π΄.
- Η πρόταση Σ=«Ακριβώς ένας λέει αλήθεια» είναι η Σ=ΚΓ΄Π΄+Κ΄ΓΠ΄+Κ΄Γ΄Π.

- Φτιάχνουμε τον πίνακα αληθείας για όλους τους συνδυασμούς ΡΣ(ΚΓ), Ρ΄Σ(Κ΄Γ), Ρ΄Σ΄(Κ΄Γ΄), ΡΣ΄(ΚΓ΄). Αν υπάρχει ένα **1** λύθηκε αλλιώς ....

Άλλος Τρόπος

Έστω ότι ο Κ λέει αλήθεια.

∴ Όλοι λένε ψέματα (από αυτό που λέει ο Κ)

∴ Αντίφαση: Ο Κ λέει αλήθεια και ψέματα

∴ Η υπόθεση είναι εσφαλμένη

∴ Άρα ο Κ λέει ψέματα

…

Ποιος σκότωσε τον λόρδο Lordaton;

«Ο λόρδος Lordaton, το θύμα, σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι με ένα μπρούτζινο κηροπήγιο.»

«Είτε η λαίδη Lordaton είτε η υπηρέτρια Sara, ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου.»

«Αν η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε ο μπάτλερ σκότωσε το λόρδο Lordaton με μία μοιραία δόση στρυχνίνης.»

«Αν η λαίδη Lordaton ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σοφέρ σκότωσε τον λόρδο Lordaton.»

«Αν η μαγείρισσα δεν ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε η Sara δεν ήταν στο καθιστικό όταν διαπράχτηκε ο φόνος.»

«Αν η Sara ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σερβιτόρος σκότωσε το λόρδο Lordaton.»

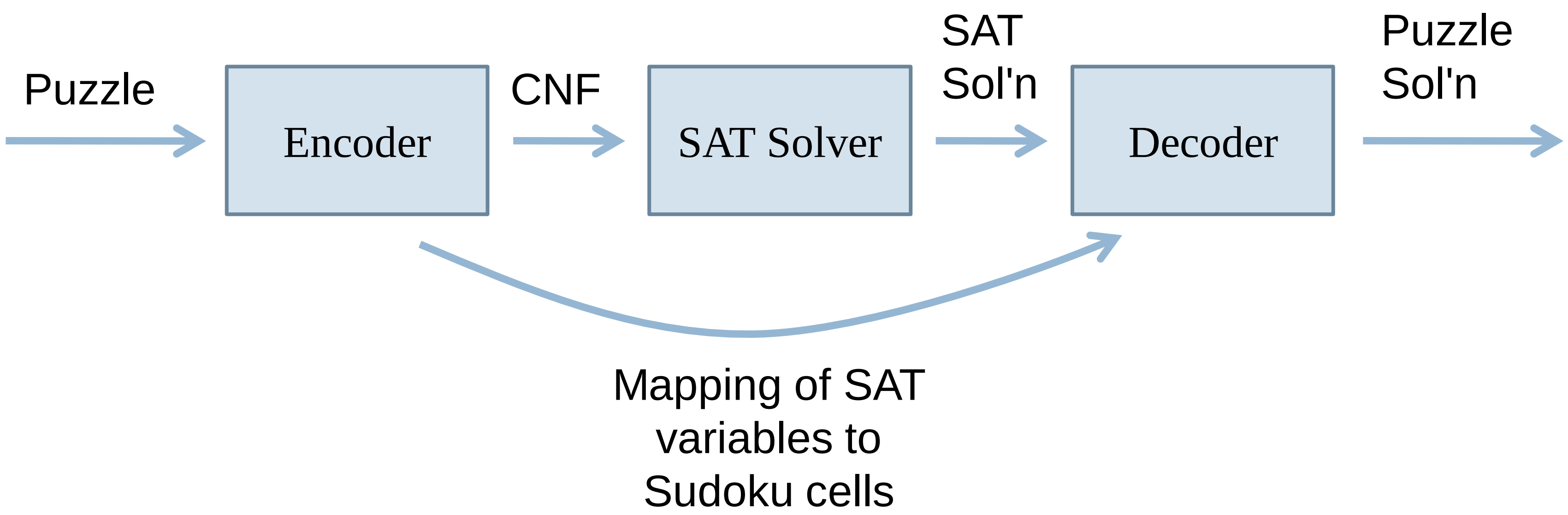
Για Πλάκα…

What is Sudoku?

		6	1		2	5		
	3	9				1	4	
				4				
9		2		3		4		1
	8						7	
1		3		6		8		9
				1				
	5	4				9	1	
		7	5		3	2		

- Played on a $n \times n$ board.
- A single number from 1 to n must be put in each cell; some cells are pre-filled.
- Board is subdivided into $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ blocks.
- Each number must appear exactly once in each row, column, and block.
- Designed to have a unique solution.

Puzzle-Solving Process



Naive Encoding (1a)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$".
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c.

Example of Variable Encoding

3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1

Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the digit d is in the cell at row r, column c.

$$x_{1,1,3} = \texttt{true},\ x_{1,2,2} = \texttt{true},\ x_{1,3,1} = \texttt{true},\ x_{1,4,4} = \texttt{true}$$

$$x_{2,1,4} = \texttt{true},\ x_{2,2,1} = \texttt{true},\ x_{2,3,2} = \texttt{true},\ x_{2,4,3} = \texttt{true}$$

$$x_{3,1,1} = \texttt{true},\ x_{3,2,4} = \texttt{true},\ x_{3,3,3} = \texttt{true},\ x_{3,4,2} = \texttt{true}$$

$$x_{4,1,2} = \texttt{true},\ x_{4,2,3} = \texttt{true},\ x_{4,3,4} = \texttt{true},\ x_{4,4,1} = \texttt{true}$$

All others are false.

digit

column

row

Naive Encoding (1b)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$".
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c.

- "Number *d* must occur exactly once in column *c*" $\Rightarrow$ "Exactly one of $\{x_{1,c,d}, x_{2,c,d}, \ldots, x_{n,c,d}\}$ is true".
- How do we encode the constraint that ***exactly one*** variable in a set is true?

Naive Encoding (2)

- How do we encode the constraint that ***exactly one*** variable in a set is true?
- We can encode "**exactly one**" as the conjunction of "**at least one**" and "**at most one**".

- Encoding "**at least one**" is easy: simply take the logical OR of all the propositional variables.
- Encoding "**at most one**" is harder in CNF. Standard method: "no two variables are both true".
- I.e., enumerate every possible pair of variables and require that one variable in the pair is false. This takes O(n^2) clauses.
- [Example on next slide]

Naive Encoding (3)

- Example for 3 variables ($x1$, $x2$, $x3$).
- "At least one is true":

$$x1 \lor x2 \lor x3.$$

- "At most one is true":

$$(\sim x1 \lor \ \sim x2) \ \& \ (\sim x1 \lor \ \sim x3) \ \& \ (\sim x2 \lor \ \sim x3).$$

- "Exactly one is true":

$$(x_1 \lor x_2 \lor x_3) \ \& \ (\sim x_1 \lor \sim x_2) \ \& \ (\sim x_1 \lor \sim x_3) \ \& \ (\sim x_2 \lor \sim x_3).$$

Naive Encoding (4)

The following constraints are encoded:

- Exactly one digit appears in each cell.
- Each digit appears exactly once in each row.
- Each digit appears exactly once in each column.
- Each digit appears exactly once in each block.

Each application of the above constraints has the form: "exactly one of a set variables is true".

All of the above constraints are independent of the prefilled cells.

Problem with Naive Encoding

- We need n^3 total variables.
  (n rows, n cols, n digits)
- And $O(n^4)$ total clauses.
  - To require that the digit "1" appear exactly once in the first row, we need $O(n^2)$ clauses.
  - Repeat for each digit and each row.
- For n = 9 (9×9), the naive encoding is OK.
- For large n, it is a problem.