Ασκήσεις Κατανόησης: 3

1. (15%) Να δώσετε μία συνδυαστική απόδειξη για το παρακάτω:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

Το αριστερό μέλος μπορεί να δοθεί ως το πλήθος των συνδυασμών n+1 αντικειμένων από συνολικά 2n+2 διαφορετικά αντικείμενα στο σύνολο S χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά. Έστω 2 αντικείμενα $α_1$ και $α_2$ του συνόλου S. Θα πάρουμε περιπτώσεις ως προς αυτά τα αντικείμενα για να δείξουμε την ισότητα.

(i) Το πλήθος των συνδυασμών n+1 αντικειμένων από συνολικά 2n+2 διαφορετικά αντικείμενα είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών n+1 αντικειμένων από 2n αντικείμενα όταν τα $α_1$ και $α_2$ δεν έχουν επιλεγεί.

(ii) συν το πλήθος των συνδυασμών n αντικειμένων από 2n αντικείμενα όταν επιλέγουμε στο συνδυασμό το $α_1$ αλλά όχι και τα δύο.

(iii) συν το πλήθος των συνδυασμών n αντικειμένων από 2n αντικείμενα όταν επιλέγουμε στο συνδυασμό το $α_2$ αλλά όχι και τα δύο.

(iv) συν το πλήθος των συνδυασμών n-1 αντικειμένων από 2n όταν έχουμε επιλέξει στο συνδυασμό τα $α_1$ και $α_2$.

Το "συν" προκύπτει από τον κανόνα αθροίσματος μιας και οι τέσσερις περιπτώσεις είναι ξένες μεταξύ τους.

2. (30%) (Κάθε ερώτημα έχει βάρος 10%)

1. $\sum_{i=x}^{y} 2i+1$
2. $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{j+2}\right)^i$

Επίσης, να υπολογίσετε προσεγγιστικά (άνω και κάτω φράγμα) το άθροισμα: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i}$.

1.

$$\sum_{i=x}^{y} 2i+1 = 2\sum_{i=x}^{y} i + \sum_{i=x}^{y} 1$$

Θέτουμε $j = i - x$ και κάνουμε αντικατάσταση. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$2\sum_{j=0}^{y-x}(j+x)+y-x+1=2\sum_{j=0}^{y-x}j+\ 2x\sum_{j=0}^{y-x}1+y-x+1$$

$$=\frac{2(y-x)(y-x+1)}{2}+\ 2x(y-x+1)+y-x+1=$$

$$=(y-x+1)(y-x+2x+1)=(y+x+1)(y-x+1)$$

2.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{j}{j+2}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\frac{j+2-j}{j+2}}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(J+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+2n\right)=n+\frac{n(n+1)}{4}$$

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης: Έστω $f(x)=\sqrt[3]{x}$, η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση. Ισχύει ότι:

$$\int_{0}^{n}x^{\frac{1}{3}}\,dx\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}\leq\int_{1}^{n+1}x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Ισχύει ότι:

$$\int_{0}^{n}x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{0}^{n}=\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_{1}^{n+1}x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{1}^{n+1}=\frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}$$

Άρα:

$$\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}\leq\frac{3}{4}(n+1)^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}$$

3. (15%) Έστω ότι επιλέγουμε αυθαίρετα 50.001 διαφορετικούς αριθμούς στο διάστημα 100.001 έως 200.000 (αφορά μόνο ακέραιους αριθμούς σε αυτό το διάστημα). Να δείξετε ότι οπωσδήποτε δύο από τους αριθμούς που επιλέξαμε είναι σχετικά πρώτοι.

Υπόδειξη: Φτιάξτε περιστερώνες που αντιστοιχούν σε διαδοχικούς αριθμούς

Ζευγαρώνω τους αριθμούς ως εξής: ο 100.001 με τον 100.002, ο 100.003 με τον 100.004 και γενικά ο x με τον x+1, άρα συνολικά θα έχουμε 50.000 τέτοια ζευγάρια, οπότε κατασκευάζουμε 50.000 περιστερώνες Οι 50.001 αριθμοί που επιλέγουμε θα είναι τα περιστέρια. Αυτό σημαίνει ότι 2 περιστέρια θα καταλήξουν στον ίδιο περιστερώνα και άρα δύο αριθμοί θα είναι σίγουρα συνεχόμενοι. Έστω ότι αυτοί οι αριθμοί είναι οι a και a+1. Θα δείξουμε ότι είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους. Πράγματι αν, ΜΚΔ(a,a+1)=d>1 τότε d|a και d|a+1. Άρα το d διαιρεί και οποιονδήποτε γραμμικό τους συνδυασμό και άρα διαιρεί και το a+1– a = 1, το οποίο είναι αδύνατο αφού κανένας αριθμός πλην του 1 δεν διαιρεί το 1. Άρα, πράγματι αυτοί οι δύο αριθμοί είναι σχετικά πρώτοι και αποδείξαμε το ζητούμενο.

4. (40%) (Κάθε ερώτημα έχει βάρος 10%)

1) Ο δάσκαλος μιας τάξης που αποτελείται από 20 μαθητές (ανάμεσα στους οποίους είναι ο Σωτήρης και η Μάρθα) πρόκειται να αναθέσει μια εργασία σε ομάδα 5 μαθητών. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα των 5 μαθητών, έτσι ώστε:

(i) να συμμετέχει μόνο ο Σωτήρης αλλά όχι η Μάρθα.

(ii) να συμμετέχει μόνο η Μάρθα αλλά όχι ο Σωτήρης.

(iii) να συμμετέχει ο Σωτήρης ή η Μάρθα αλλά όχι και οι δύο μαζί.

(iv) να συμμετέχει τουλάχιστον ένας από τους Σωτήρη και Μάρθα.

2) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά 5 σύμβολα Α, 5 σύμβολα Β, 10 σύμβολα Γ και 3 σύμβολα Δ ώστε να μην υπάρχουν γειτονικά σύμβολα Γ.

3) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 5 ίδια σορτσάκια, 7 ίδιες μπλούζες και 4 ίδια μπουφάν σε 2 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον ένα ρούχο από κάθε είδος;

4) Βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων όλων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ, ΒΕΛΟΣ.

Λύση

1) (i) Η ομάδα περιλαμβάνει το Σωτήρη αλλά όχι τη Μάρθα. Σε αυτή την περίπτωση οι τρόποι για να συμπληρωθεί η πενταμελής ομάδα ισούνται με τους τρόπους επιλογής ενός υποσυνόλου (μη διατεταγμένη πλειάδα) τεσσάρων από τους υπόλοιπους 18 μαθητές, εκτός του Σωτήρη που γνωρίζουμε ότι ανήκει στην ομάδα, και της Μάρθας που θα πρέπει να μείνει εκτός ομάδας. Υπάρχουν C(18,4) τρόποι να γίνει αυτό.

(ii) Η ομάδα περιλαμβάνει μόνο τη Μάρθα. Ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό όπως και στην περίπτωση (i), οι ομάδες που περιλαμβάνουν τη Μάρθα αλλά όχι το Σωτήρη είναι C(18,4) = 3.060.

(iii) Η ομάδα περιλαμβάνει τις ομάδες που έχουν μόνο τη Μάρθα ή μόνο το Σωτήρη (αποκλειστική διάζευξη). Αφού θα επιλεγεί ακριβώς μια ομάδα μεταξύ των δυο ξένων μεταξύ τους συνόλων όπως αυτά μετρήθηκαν στα i και ii, από τον κανόνα του αθροίσματος γνωρίζουμε ότι συνολικά υπάρχουν C(18,4) + C(18,4) = 6.120 διαφορετικές ομάδες που μπορούν να προκύψουν.

(iv) Ζητούνται οι ομάδες που περιλαμβάνουν το Σωτήρη ή τη Μάρθα, ή και τους δυο (απλή διάζευξη). Θα απαριθμήσουμε τις ομάδες που περιλαμβάνουν και το Σωτήρη και τη Μάρθα ταυτόχρονα. Σε αυτή την κατηγορία οι διαφορετικοί τρόποι για να καταρτιστεί η ομάδα ισούνται με τους τρόπους επιλογής υποσυνόλου τριών από τα υπόλοιπα 18 άτομα. Άρα, υπάρχουν C(18,3) = 816 ομάδες αυτής της κατηγορίας.

Αφού το ζητούμενο είναι η επιλογή μιας ομάδας από τις αμοιβαία αποκλεισμένες περιπτώσεις i, ii και αυτή που αναφέρθηκε ακριβώς πιο πάνω και πάλι τον κανόνα του αθροίσματος καταλήγουμε ότι οι πενταμελείς ομάδες που μπορούν να καταρτιστούν και περιλαμβάνουν <u>τουλάχιστον έναν</u> από τους Σωτήρη και Μάρθα, είναι: 2*C(18,4) + C(18,3) = 2 * 3.060 + 816 = 6.936.

2) Ξεκινάμε με την τοποθέτηση όσο το δυνατόν περισσότερων γραμμάτων στην ευθεία χωρίς περιορισμό, δηλαδή τοποθετούμε τα σύμβολα της συλλογής { 5Α, 5Β, 3Δ } στην ευθεία. Αυτό είναι ίσο με 13! / [5!5!3!] = 72.072 διαφορετικούς τρόπους.

Η παραπάνω τοποθέτηση δημιουργεί N=14 διαστήματα στην ευθεία (διακεκριμένες υποδοχές), στα οποία πρέπει να τοποθετηθούν τα K=10 όμοια σφαιρίδια (αντίγραφα του Γ). Αφού δεν επιτρέπεται η εμφάνιση γειτονικών Γ, θα πρέπει κάθε υποδοχή να δεχθεί το πολύ 1 σφαιρίδιο, δηλαδή, οι υποδοχές έχουν χωρητικότητα 1. Οι τρόποι τοποθέτησης των αντιγράφων του Γ είναι λοιπόν C(N,K) = C(14,10) = 1.001.

Από τον κανόνα του γινομένου (λόγω ανεξαρτησίας των δυο πειραμάτων), έχουμε τελικά $\frac{13!}{5!5!3!}\binom{14}{10} = 72.144.072$ τρόπους για την τοποθέτηση της συλλογής { 5Α, 5Β, 10Γ, 3Δ } ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικές εμφανίσεις του Γ.

3) Αφού κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα ρούχο από κάθε είδος, δίνουμε από 1 σορτσάκι, 1 μπλούζα και 1 μπουφάν σε κάθε παιδί. Απομένουν 3 σορτσάκια, 5 μπλούζες και 2 μπουφάν να μοιραστούν στα 2 παιδιά. Τα 3 όμοια σορτσάκια έχουμε να τα κατανείμουμε σε 2 διακεκριμένα παιδιά και αυτό μπορεί να γίνει με C(2+3-1,3) τρόπους. Όμοια, για τις μπλούζες έχουμε C(2+5-1,5) τρόπους κατανομής και C(2+2-1,2) για τα μπουφάν. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε C(4,3) ·C(6,5) ·C(3,2) = 4·6·3 = 72 διαφορετικούς τρόπους.

4) Έστω ότι Π, Τ και Β είναι τα σύνολα των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων που περιέχουν αντίστοιχα τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ και ΒΕΛΟΣ. Άρα το σύνολο των μεταθέσεων που περιέχει τουλάχιστον μία από αυτές τις λέξεις θα είναι η ένωσή τους:

$$|\Pi \cup T \cup B|$$

Από εγκλεισμό-αποκλεισμό προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}|\Pi \cup T \cup B| &= |\Pi| + |T| + |B| - |\Pi \cap T| - |\Pi \cap B| - |T \cap B| + |\Pi \cap T \cap B| \\ &= 20! + 20! + 20! - 16! - 16! - 16! + 12! = 3 \cdot 20! - 3 \cdot 16! + 12!\end{aligned}$$

Το $|\Pi|$ είναι 20! αφού τη λέξη ΠΥΓΜΗ μπορούμε να την θεωρήσουμε ως ένα γράμμα (αφού και τα 5 γράμματα θα πρέπει να είναι συνεχόμενα). Επομένως έχουμε τις μεταθέσεις των 19 γραμμάτων συν το ένα καινούργιο που αντιστοιχεί στη λέξη. Ομοίως δουλεύουμε και στα υπόλοιπα.