<u>1. Συνδυασμοί</u>

Η <u>Α</u>λίκη καλεί 6 φίλους στο πάρτυ της: <u>Β</u>ασίλη, <u>Γ</u>ιώργο, <u>Δ</u>ημήτρη, <u>Ε</u>λένη, <u>Ζ</u>ωή και <u>Η</u>λία. Όταν φτάσουν κάνουν χειραψία όλοι μεταξύ τους.

Α) Πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν συνολικά;

Α με όλους τους άλλους : 6 χειραψίες
Β με όλους τους άλλους : 6 χειραψίες
...
Η με όλους τους άλλους : 6 χειραψίες

Συνολικά λοιπόν είναι 6*7=42 χειραψίες. Όμως μετρήσαμε κάθε χειραψία δύο φορές (μία για κάθε άτομο που έπαιρνε μέρος στη χειραψία). Επομένως ο συνολικός αριθμός είναι 42/2=21.

Άλλος τρόπος: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω 2 άτομα από 7 συνολικά:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Β) Η Αλίκη λέει όταν κάθονται στο τραπέζι: «Εγώ θα καθήσω στην κεφαλή του τραπεζιού και οι υπόλοιποι θα αλλάζουν θέση κάθε 5 λεπτά.Το πάρτυ θα τελειώσει όταν έχουμε πάρει όλες τις δυνατές θέσεις.» Πόσο θα κρατήσει το πάρτυ;

Αφού η Αλίκη έχει σταθερή θέση, ο αριθμός των δυνατών τοποθετήσεων των υπολοίπων είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των 6 ατόμων, δηλαδή $6! = 720$. Άρα το πάρτυ θα κρατήσει $720 \cdot \frac{1}{12} = 60\ ώρες$!!!

Γ) Μετά την τούρτα αποφασίζουν να χορέψουν (αγόρια με κορίτσια). Πόσα ζευγάρια μπορούν να γίνουν;

Υπάρχουν 4 αγόρια και 3 κορίτσια.

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{H}\} \quad \mathrm{K} = \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{Z}\}$$

$A \times K = \{(B,A),(B,E),(B,Z),\ldots,(H,A),(H,E),(H,Z)\}$ είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια.

Όμως $|A \times K| = |A| \cdot |K| = 4 \cdot 3 = 12$ ζευγάρια.

Δ) Μετά τον χόρο είπαν να το ρίξουν στο τζόγο. Αποφάσισαν λοιπόν να παίξουν λόττο (επιλογή 6 από 49 νούμερα). Η Ζωή λέει λοιπόν: «Θα παίξουμε έτσι ώστε να κερδίσουμε σίγουρα.» Πόσα δελτία πρέπει να συμπληρώσουν;

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά υπάρχουν:

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13.983.816$ δελτία.

Ε) Αφού απελπίστηκαν είπαν να παίξουν χαρτιά οι Α,Β,Γ,Δ. Το παιχνίδι είναι το Bridge όπου ο καθένας παίρνει 13 χαρτιά. Τη δεύτερη φορά που παίζουν η Αλίκη λέει : «Έχω τα ίδια χαρτιά με την πρηγούμενη φορά». Πόσο πιθανό είναι αυτό;

Οι δυνατές μοιρασιές είναι $\binom{52}{13} = \frac{52!}{39!13!} = 635.013.559.600$. Επομένως η πιθανότητα θα είναι $\frac{1}{635.013.559.600}$.

ΣΤ) Τελικά αποφασίζουν να παίξουν σκάκι.Η Αλίκη δεν παίζει οπότε βγάζει τρεις σκακιέρες. Πόσες είναι οι δυνατές περιπτώσεις χωρισμούς τους σε τρία ζεύγη;

$1^{ο}$ ζευγάρι: $\binom{6}{2} = 15$

$2^{ο}$ ζευγάρι: $\binom{4}{2} = 6$

$3^{ο}$ ζευγάρι: $\binom{2}{2} = 1$

Άρα οι δυνατοί τρόποι είναι $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$. Όμως τώρα έχουμε μετρήσει περισσότερες φορές τα ζευγάρια ανάλογα σε ποια σειρά μπαίνουν (αν είναι $1^{ο}$, $2^{ο}$ ή $3^{ο}$ ζευγάρι). Το συνολικό πλήθος αυτών των δυνατών εμφανίσεων είναι $3! = 6$. Άρα τελικά είναι $\frac{90}{6} = 15$ διαφορετικοί τρόποι.

Άλλος τρόπος:

Ο ένας διαλέγει αντίπαλο ανάμεσα στους υπόλοιπους 5 (5 επιλογές)

(Μένουν 4) Ο ένας διαλέγει αντίπαλο ανάμεσα στους υπόλοιπους 3 (3 επιλογές)

(Μένουν 2) Σχηματίζουν ένα ζευγάρι με έναν τρόπο.

Άρα ο αριθμός ζευγαριών είναι $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

2. Συνδυασμοί

Μία επιτροπή αποτελείται από 15 Ρεπουμπλικάνους και 10 Δημοκρατικούς. Πρόκειται να φτιάξουν μία επιτροπή με 6 γερουσιαστές. Οι Ρεπουμπλικάνοι επιμένουν να έχουν την πλειοψηφία και στην επιτροπή. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μία τέτοια επιτροπή δεδομένων των περιορισμών;

Λύση:

Τρεις περιπτώσεις:

1. Κανένας Δημοκρατικός: $\binom{15}{6} = 5005$ Ρεπουμπλικάνους επιλέγουμε
2. Ένας Δημοκρατικός: $\binom{15}{5}\binom{10}{1} = 30030$
3. Δύο Δημοκρατικοί: $\binom{15}{4}\binom{10}{2} = 61425$

Άρα το σύνολο είναι 5005+30030+61425=96460.

3. Δυωνυμικοί Συντελεστές

Να αποδείξετε α) αλγεβρικά β) με συνδυαστικά επιχειρήματα την παρακάτω ισότητα:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Λύση:

Α)

$$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = n(n-1) + n^2 = 2\binom{n}{2} + n^2$$

B) Το αριστερό μέλος είναι οι τρόποι να επιλέξουμε 2 από 2n στοιχεία.

Για να το μετρήσουμε με άλλο τρόπο, χωρίζουμε τα 2n στοιχεία σε δύο σύνολα των n στοιχείων. Είτε επιλέγουμε και τα δύο στοιχεία από το πρώτο σύνολο $\left(\binom{n}{2}\right)$, ή και τα δύο στοιχεία από το δεύτερο σύνολο $\left(\binom{n}{2}\right)$ ή ένα από το ένα και ένα από το άλλο (n^2).
Άρα συνολικά θα έχουμε $\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n^2$ τρόπους.

4. Μεταθέσεις

Υπάρχουν 16 μπίλιες σε ένα κουτί αριθμημένες από 1 έως 16. Οι μπίλιες από 1 έως 5 είναι κόκκινες, οι 6 έως 8 είναι πράσινες και οι 9 έως 16 είναι μπλε. Επιλέγουμε 4 μπίλιες, με σειρά χωρίς επανατοποθέτηση, και καταγράφουμε το αποτέλεσμα σαν μία διατεταγμένη λίστα από χρώμα και αριθμό. Για παράδειγμα, Κ3,Μ1,Π2,Μ12.

1. Πόσα αποτελέσματα είναι δυνατά;
2. Από αυτά, πόσα έχουν την πρώτη και τελευταία μπίλια κόκκινη;

3. Πόσα αποτελέσματα έχουν την πρώτη και δεύτερη μπίλια με διαφορετικό χρώμα;
4. Πόσα αποτελέσματα έχουν όλα το ίδιο χρώμα;

Λύση:

1. P(16,4)=16*15*14*13=43680

2. 5*4*14*13=3640 Για την πρώτη και την τελευταία έχουμε 5*4 περιπτώσεις και για τις άλλες θέσεις οι υπόλοιπες.

3. 16*15*14*13-(5*4*14*13+3*2*14*13+8*7*14*13)=28756 Αφαιρώ από όλα τα δυνατά αποτελέσματα την περίπτωση οι δύο πρώτες να είναι κόκκινες (πρώτος όρος της παρένθεσης), οι δύο πρώτες πράσινες (δεύτερος όρος) και οι δύο πρώτες μπλε (τρίτος όρος).

4. 5*4*3*2+8*7*6*5=4802 Η μόνη περίπτωση είναι όλες να είναι κόκκινες (πρώτος όρος) ή όλες να είναι μπλε (δεύτερος όρος).

Προσοχή, σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι σφαίρες μπορεί να έχουν ίδιο χρώμα αλλά έχουν διαφορετικές ετικέτες.

5. Μεταθέσεις

Με πόσους τρόπους μπορούν 5 οικογένειες των 4 ατόμων να σταθούν στην ουρά ενός σινεμά δεδομένου ότι κάθε οικογένεια δεν μπορεί να διασπαστεί;

Λύση:
Πρώτα καθορίζουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπαίνουν στη σειρά οι οικογένειες. Υπάρχουν 5!=120 τρόποι για να γίνει αυτό.
Έπειτα καθορίζουμε τη σειρά των μελών κάθε οικογένειας: 4!=24 τρόποι για κάθε οικογένεια.

Από το κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι οι συνολικοί τρόποι θα είναι:
$5!4!^5$=955.514.880

6. Συνδυασμοί

Σε ένα club 10 γυναικών και 8 ανδρών, θέλουν να φτιάξουν μία επιτροπή 5 ανθρώπων. Προφανώς υπάρχουν συνολικά C(18,5) επιτροπές. Σε πόσες από αυτές:

1. Η επιτροπή περιέχει ακριβώς 3 γυναίκες;
2. Η επιτροπή περιέχει τουλάχιστον 3 γυναίκες;
3. Ο Jack και η Jill δεν θέλουν να δουλέψουν μαζί οπότε αποκλείονται από την επιτροπή;

Λύση:

1. Υπάρχουν C(10,3) τρόποι επιλογής γυναικών και C(8,2) για τους άνδρες. Άρα 120*28=3360

2. Παίρνουμε περιπτώσεις με 3 γυναίκες, με 4 και με 5. Άρα:

C(10,3)*C(8,2)+C(10,4)*C(8,1)+C(10,5)=5292

3. Δύο τρόποι για να το βρούμε:

3 σύνολα: 1 που δεν έχει την Jill, 1 που δεν έχει τον Jack και 1 που δεν έχει και τους δύο.

C(1,1)*C(16,4)+C(1,1)*C(16,4)+C(2,0)C(16,5)=8008

2ος τρόπος: Λύνουμε το συμπληρωματικό: C(18,5)-C(2,2)*C(16,3)=8008

7. Ακολουθίες

Πόσες διαφορετικές ακολουθίες από γράμματα φτιάχνουμε από τη λέξη MISSISSIPPI;

Λύση:

Επιλέγουμε γράμματα από το σύνολο {M,I,S,P}, με τον περιορισμό ότι επιλέγουμε 1 M, 4 I, 4 P και 4 S. Άρα έχουμε C(11,1)*C(10,4)*C(6,4)*C(2,2)=34650.

8. Ακολουθίες

Πόσες διαφορετικές τσάντες από 10 φρούτα μπορούμε να αγοράσουμε με μήλα, μπανάνες, ροδάκινα και αχλάδια, αν απαιτήσουμε να έχουμε τουλάχιστον ένα από το καθένα;

Λύση:

Καταρχάς βάζουμε ένα από το καθένα και έπειτα βάζουμε άλλα 6 φρούτα. Αν a,b,c,d αντιστοιχούν με την αντίστοιχη σειρά στα φρούτα τότε a+b+c+d=6, όπου a,b,c,d μη αρνητικοί ακέραιοι. Άρα συνολικά θα έχουμε C(6+4-1,6)=C(9,6)=84.

9. Ακολουθίες

Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι πιθανά αν ρίξουμε το ίδιο ζάρι 4 φορές. Με πόσους τρόπους το άθροισμα δίνει 14;

Λύση:

Θεωρώ ότι έχω μία διατεταγμένη λίστα από αποτελέσματα (4-δείγμα) και άρα 6^4=1296.

Αυτό δίνεται από την εξίσωση α+β+γ+δ=14. Πόσες λύσεις υπάρχουν σε αυτή όταν α,β,γ,δ≥1; Αυτή μπορεί να γραφεί σαν α΄+β΄+γ΄+δ΄=10, όπου α΄,β΄,γ΄,δ΄≥0, άρα με C(10+4-1,10)=286. Αυτό που απομένει είναι να διώξουμε τις περιπτώσεις όπου κάποιο αποτέλεσμα σε ζάρι είναι >6. Για παράδειγμα το (1,1,3,9). Άρα λοιπόν πρέπει να βρούμε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες α,β,γ,δ≥7. Προσοχή μόνο ένα μπορεί από αυτά να συμβαίνει κάθε φορά αφού α,β,γ,δ≥1.

Για α: Πόσες λύσεις υπάρχουν για την α+β+γ+δ=14, α,β,γ,δ≥1 και α≥7; Ας το σκεφτούμε αυτό το πρόβλημα σαν πρόβλημα φρούτων. Έχουμε μία τσάντα στην οποία μπαίνει ένα από κάθε φρούτο από τα τέσσερα συνολικά. Επίσης για το πρώτο φρούτο θα πάρουμε 7 σύνολο. Άρα έχουμε τοποθετήσει 10 φρούτα. Το πρόβλημα είναι να τοποθετήσουμε ακόμα 4 από τα 4 είδη. Αυτό γίνεται με C(4+4-1,4)=35. Αυτό ισχύει συμμετρικά και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, άρα :

286-4*35=146 τρόπους για άθροισμα 14.

10. Πλήθος Λύσεων

Πόσες θετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση $a+b+2c=10$; (Υπόδειξη: να πάρετε περιπτώσεις ως προς το c: $c=1$,c=2,…).

Λύση:

Έχουμε 4 περιπτώσεις:

$c=1$: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 8$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 6$. Αυτό αφορά όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε 1 άσσο σε μία δυαδική ακολουθία 7 ψηφίων. Άρα η λύση είναι $\binom{7}{1} = 7$.
$c=2$: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 6$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 4$. Ομοίως με παραπάνω είναι $\binom{5}{1} = 5$.
$c=3$: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 4$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 2$. Ομοίως με παραπάνω είναι $\binom{3}{1} = 3$.
$c=4$: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 2$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν θα υπάρχει μόνο μία λύση, η $a = b = 1$.
Άρα συνολικά έχουμε 16 λύσεις.

11. Συνδυασμοί

Να κατηγοριοποιήσετε κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα μέτρησης με βάση τους τύπους που αντιστοιχούν στις λύσεις τους. Να αιτιολογήσετε πλήρως την λύση που προτείνετε για κάθε πρόβλημα.
Οι δυνατές λύσεις είναι:

$$n^m$$
$$m^n$$
$$P(n,m)$$
$$C(n-1+m,m)$$
$$C(n-1+m,n)$$
$$2^{nm}$$

Προτάσεις:

1. Πλήθος διευθετήσεων m ίδιων σφαιρών σε n διαφορετικούς κάδους.
2. Πλήθος διευθετήσεων m διαφορετικών σφαιρών σε n διαφορετικούς κάδους.
3. Πλήθος λέξεων με m γράμματα από ένα αλφάβητο μεγέθους n, όπου κανένα γράμμα δεν χρησιμοποιείται περισσότερες από 1 φορές ($m≤n$).
4. Πλήθος λέξεων με m γράμματα από ένα αλφάβητο μεγέθους n, όπου τα γράμματα επαναλαμβάνονται.

5. Πλήθος ακολουθιών από *n* ίδιες κόκκινες μπάλες και *m*-1 ίδιες μπλε μπάλες.
6. Πλήθος μητρώων μεγέθους $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ με *m* πιθανές τιμές για κάθε κελί (υποθέστε ότι το *n* είναι τέλειο τετράγωνο)
7. Πλήθος δυνατών υποσυνόλων του Α, όπου |Α|=*nm*.
8. Πλήθος συναρτήσεων από το σύνολο Α στο σύνολο Β, όπου |Α|=*n* και |Β|=*m*.
9. Πλήθος σχέσεων από το σύνολο Α στο σύνολο Β, όπου |Α|=*n* και |Β|=*m*.
10. Πλήθος δυαδικών ακολουθιών μήκους *mn*.
11. Πλήθος δυαδικών ακολουθιών μήκους 2*mn*, με ίσο πλήθος από 0 και 1.

Λύση:

1: $C(n-1+m,m)$

Αυτό γιατί πρόκειται για περίπτωση m-επιλογής. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι n-1 | καθορίζουν τους n διαφορετικούς κάδους τότε με πόσους τρόπους μπορούμε να ρίξουμε m * μεταξύ των |; Αυτό είναι μία m επιλογή και άρα χρησιμοποιούμε τον τύπο.

2: n^m

Από την βασική αρχή απαρίθμησης. Κάθε στάδιο αντιστοιχεί στην ρίψη μίας σφαίρας. Για κάθε σφαίρα έχουμε n περιπτώσεις και άρα το αποτέλεσμα θα είναι n^m.

3: $P(n,m)$
Το πρόβλημα είναι στην ουσία μία m-μετάθεση (μετράει η σειρά και δεν έχουμε επανατοποθέτηση).

4: n^m
Το πρόβλημα είναι στην ουσία ένα m-δείγμα (μετράει η σειρά και έχουμε επανατοποθέτηση).

5: $C(n-1+m,n)$
Έχουμε n+m-1 θέσεις συνολικά που καταλαμβάνονται από μία μπάλα η κάθε μία. Άρα, οι τρόποι να επιλέξουμε n θέσεις για τις κόκκινες μπάλες είναι ο ζητούμενος συνδυασμός.

6: m^n
Έχουμε n θέσεις όπου κάθε μία μπορεί να παίρνει m τιμές. Από αρχή γινομένου παίρνουμε το ζητούμενο.

7: 2^{nm}
Σε κάθε δυνατό υποσύνολο του Α υπάρχουν δύο επιλογές για κάθε στοιχείο: είτε να συμμετέχει είτε όχι σε αυτό. Αφού |Α|=*nm* συνεπάγεται ότι κάθε σύνολο αντιστοιχεί σε μία δυαδική ακολουθία μήκους nm και από το πλήθος των δυαδικών ακολουθιών παίρνουμε το αποτέλεσμα.

8: m^n
Κάθε τιμή του πεδίου ορισμού μπορεί να απεικονίζεται σε οποιαδήποτε τιμή του πεδίου τιμών. Δηλαδή, κάθε τιμή του πεδίου ορισμού μπορεί να αντιστοιχεί σε m τιμές από το πεδίο τιμών. Άρα, τόσοι τρόποι αντιστοίχησης υπάρχουν μεταξύ των δύο συνόλων και άρα τόσες είναι οι διαφορετικές συναρτήσεις.

9: 2^{nm}
Το πλήθος των σχέσεων είναι όσο και το πλήθος των υποσυνόλων του |AxB|. Αφού αυτό έχει πληθάριθμο nm συνεπάγεται από το ερώτημα 7 το αποτέλεσμα.

10: 2^{nm}
Από αρχή γινομένου, αφού κάθε bit μπορεί να πάρει δύο τιμές και το μήκος της ακολουθίας είναι nm συνεπάγεται το αποτέλεσμα.

11: $C(2nm,nm)$

Με τόσους τρόπους επιλέγουμε nm θέσεις από συνολικά $2nm$ θέσεις για να τοποθετήσουμε τα μηδέν. Τα ένα τοποθετούνται με έναν τρόπο στις υπόλοιπες nm θέσεις.