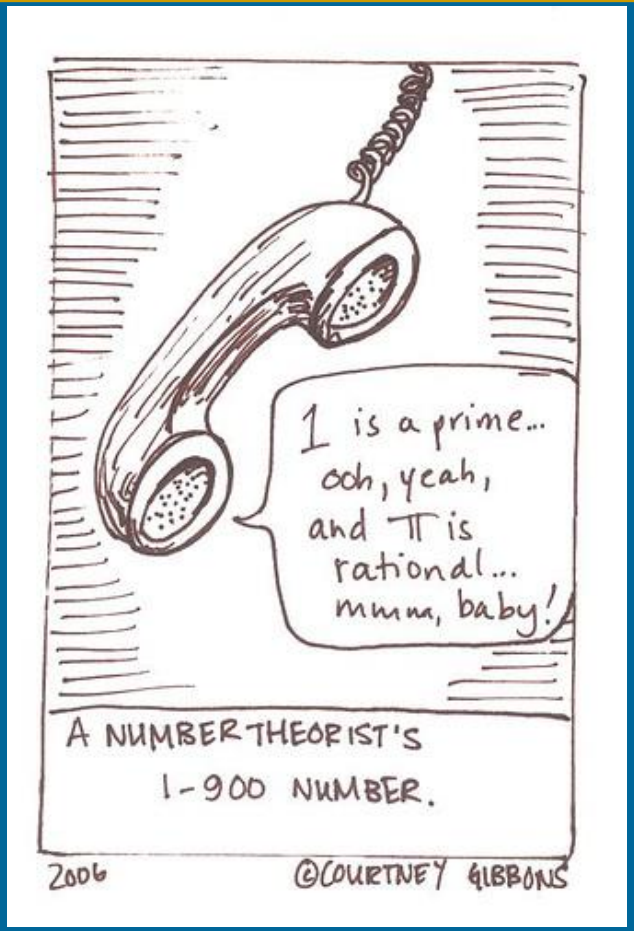
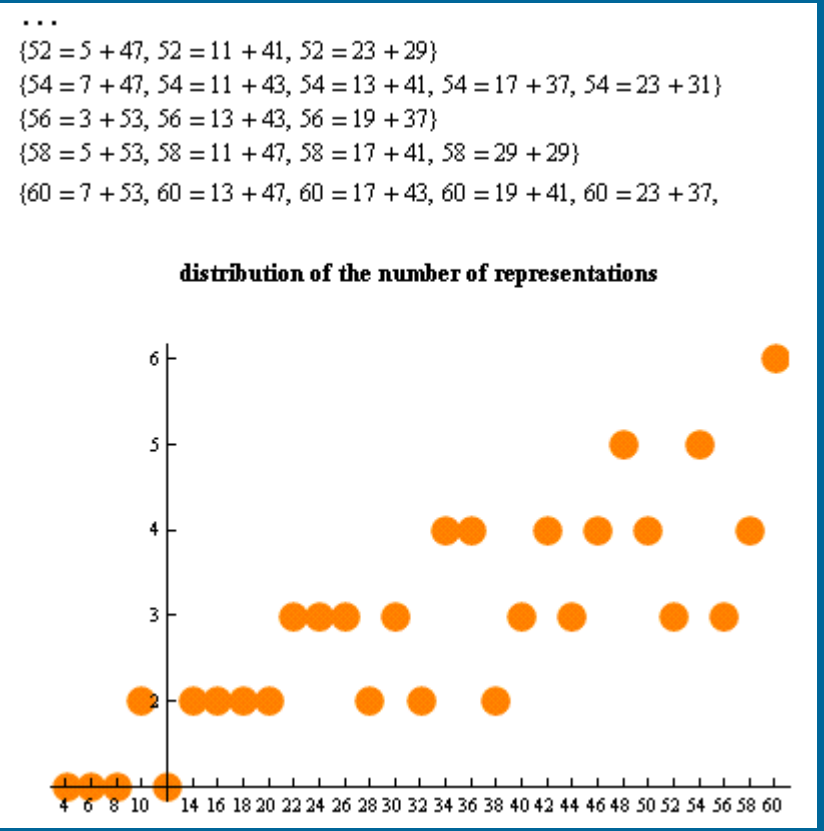


ΒΑΣΙΚΆ ΣΤΟΙΧΕΊΑ ΘΕΩΡΊΑΣ ΑΡΙΘΜΏΝ

Θεωρία Αριθμών

- Κλάδος μαθηματικών που ασχολείται με τους ακέραιους και τις ιδιότητές τους.
- Πολλά και εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα – Εικασία του Goldbach



Κάποιες Εφαρμογές που θα Δούμε

- Συναρτήσεις Κατακερματισμού (Hashing Functions)
- Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί
- Ψηφίο Ελέγχου

Η Διαίρεση

Ένας ακέραιος a διαιρεί τον b όταν υπάρχει c έτσι ώστε $b=ac$.

$a \rightarrow$ παράγοντας του b

$b \rightarrow$ πολλαπλάσιο του a

$$a \mid b \equiv \exists c(ac=b)$$

$$a \nmid b \equiv \forall c(ac \neq b)$$

Ιδιότητες

1. Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (b+c)$
2. Αν $a \mid b$ τότε $a \mid bc$ για όλους τους ακεραίους c
3. Αν $a \mid b$ και $b \mid c$ τότε $a \mid c$

Πόρισμα:

Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (mb+nc)$ όπου m και n ακέραιοι.

Βασικοί Ορισμοί

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης:

ΜΚΔ(x,y) = μέγιστο $k \geq 1 : k \mid x$ και $k \mid y$

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο:

ΕΚΠ(x,y) = ελάχιστο $k \geq 1 : x \mid k$ και $y \mid k$

Πρώτοι Αριθμοί

Ένας θετικός ακέραιος p λέγεται *πρώτος* αν οι μόνοι θετικοί του παράγοντες είναι το 1 και το p. Αν ένας θετικός ακέραιος δεν είναι πρώτος λέγεται *σύνθετος*.

Θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής:

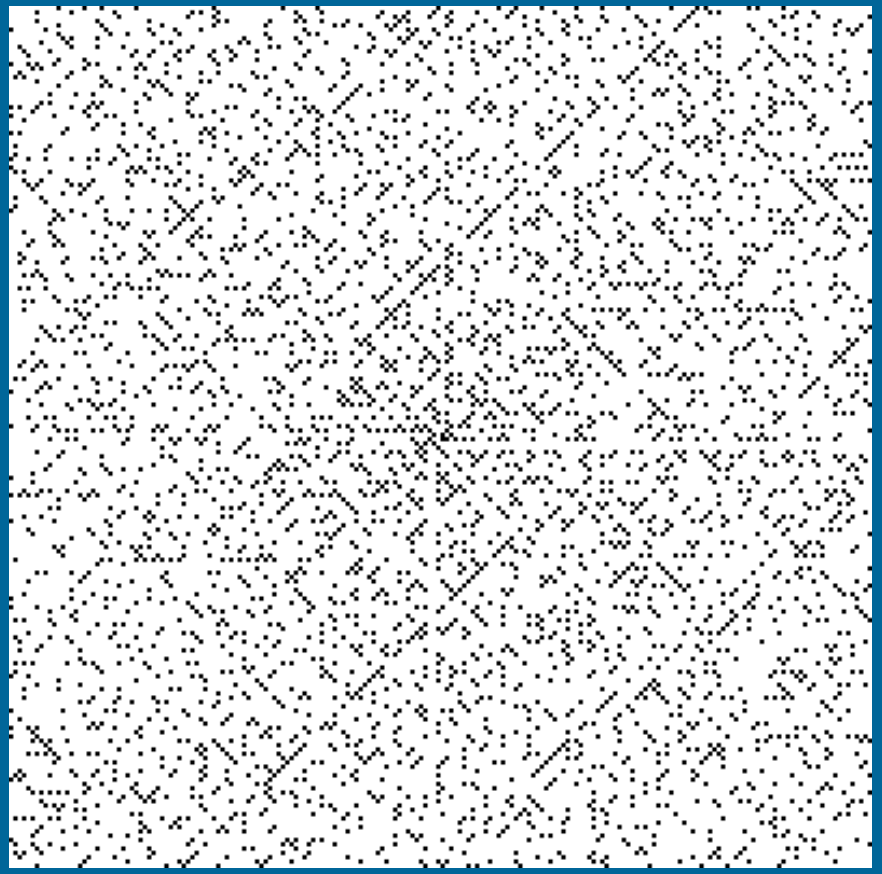
Κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν πρώτος αριθμός ή σαν γινόμενο πρώτων αριθμών όπου οι πρώτοι παράγοντες γράφονται σε σειρά μη ελαττούμενου μεγέθους.

Θεωρήματα

1. Αν ο n είναι σύνθετος ακέραιος, τότε ο n έχει διαιρέτη πρώτο αριθμό μικρότερο από ή ίσο με $n^{1/2}$. (Απόδειξη)
    1. Να δειχτεί ότι ο 101 είναι πρώτος.
2. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. (Απόδειξη)

Πρώτοι Αριθμοί – ???

- Ο λόγος του πλήθους των πρώτων αριθμών, που δεν είναι μεγαλύτεροι από x και του $x/\ln x$ πλησιάζει το 1, καθώς το x αυξάνει χωρίς φράγμα. (Χωρίς απόδειξη :-))



Βαθμιδωτή Αριθμητική

$(a \bmod n)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a από το n.

$$a \bmod n = r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = dn + r \text{ για κάποιον ακέραιο } d$$

Απόδειξη

Αν a,b και n είναι ακέραιοι αριθμοί τότε ο a είναι ισοδύναμος του b *modulo* n αν ο ***n διαιρεί το a-b***.

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$31 \equiv 81 \pmod 2$

$31 \equiv_2 81$

Επίσης:

$$a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$$

$31 \equiv 80 \pmod 7$

$31 \equiv_7 80$

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

Ορισμός: Μία συνάρτηση κατακερματισμού h αναθέτει μία θέση μνήμης $h(k)$ στην εγγραφή που έχει το k ως κλειδί.

- Μία κοινή συνάρτηση είναι η $h(k) = k$ **mod** m, όπου m είναι το πλήθος των θέσεων μνήμης.

Παράδειγμα: Έστω $h(k) = k$ **mod** 111. Αυτή η συνάρτηση αναθέτει τις εγγραφές των πελατών με ΑΦΜ ως κλειδιά, σε θέσεις μνήμης με τον εξής τρόπο:

h(064212848) = 064212848 **mod** 111 = 14

h(037149212) = 037149212 **mod** 111 = 65

h(107405723) = 107405723 **mod** 111 = 14, αλλά αφού η θέση 14 είναι ήδη πιασμένη, η εγγραφή θα ανατεθεί στην επόμενη διαθέσιμη θέση μνήμης, δηλαδή την 15.

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

- Οι συναρτήσεις κατακερματισμού δεν είναι 1-προς-1, αφού ο τομέας αναφοράς των κλειδιών είναι μεγαλύτερος από το πλήθος των θέσεων μνήμης. Όταν περισσότερα από ένα κλειδιά ανατίθενται στην ίδια θέση μνήμης τότε έχουμε σύγκρουση. Στο προηγούμενο παράδειγμα λύσαμε τη σύγκρουση αναθέτοντας το κλειδί στην πρώτη διαθέσιμη θέση.
- Για την επίλυση μίας σύγκρουσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία *συνάρτηση γραμμικής ανίχνευσης*: $h(k,i) = (h(k) + i)$ **mod** m, όπου το i παίρνει τιμές από το 0 μέχρι το $m - 1$.
- Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για επίλυση συγκρούσεων αλλά περισσότερα στο μάθημα «Δομές Δεδομένων»

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

a, b είναι σχετικά πρώτοι αν $\gcd(a,b)=1$

Αν οι a και b είναι θετικοί ακέραιοι, τότε υπάρχουν ακέραιοι s και t έτσι ώστε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b $\gcd(a,b)=sa+tb$.

Αποτελέσματα:

1. Αν $\gcd(a,b)=1$ και $a \mid bc$, τότε $a \mid c$
2. Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$, όπου κάθε a_i είναι ακέραιος, τότε $p \mid a_i$ για κάποιο i. (με επαγωγή)
3. Αν $ac \equiv bc \pmod{m}$ και $\gcd(c,m)=1$ τότε $a \equiv b \pmod{m}$

Ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη

- Δοθέντων θετικών ακεραίων a και b, να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη
- Ιδέα:
  - Αν ο x είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b, τότε το x διαιρεί το $r = a – kb$, για οποιοδήποτε k.
  - Μειώνει το πρόβλημα στην εύρεση του μεγαλύτερου x που διαιρεί τα r και b
  - Επανάληψη

Παράδειγμα (1)

- $a = 15$, $b = 12$

a	b	q	r	
15	12	1	3	$q = 15/12 = 1$
				$r = 15 - 1 \times 12$
12	3	4	0	$q = 12/3 = 4$
				$r = 12 - 4 \times 3$

- Άρα $\mu\kappa\delta(15, 12) = 3$
  - Το b για το οποίο το r είναι 0

Πίσω στο mod…

Κλάσεις Ισοδυναμίας mod 3

[0] = { …, -6, -3, 0, 3, 6, ..}
[1] = { …, -5, -2, 1, 4, 7, ..}
[2] = { …, -4, -1, 2, 5, 8, ..}

[-6] = { …, -6, -3, 0, 3, 6, ..} = [0]
[7] = { …, -5, -2, 1, 4, 7, ..} = [1]
[-1] = { …, -4, -1, 2, 5, 8, ..} = [2]

Αναπαράσταση Συστήματος mod 3

Πεπερασμένο σύνολο $S = \{0, 1, 2\}$

+ και * ορίζονται στο S:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Σημειογραφεία

$Z_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n\text{-}1]\}$

Πράξεις $+_n$ και $*_n$:

$a +_n b = (a + b \bmod n)$
$a *_n b = (a * b \bmod n)$

Ιδιότητες Πράξεων

["Κλειστότητα"]

$x, y \in Z_n \Rightarrow x +_n y \in Z_n$

["Προσεταιριστική"]

$x, y, z \in Z_n \Rightarrow (x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$

["Αντιμεταθετική"]

$x, y \in Z_n \Rightarrow x +_n y = y +_n x$

Παρόμοιες Ιδιότητες και για $*_n$

Γιατί μας ενδιαφέρει;

Επειδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιοδήποτε μέλος της κλάσης με άλλο μέλος της όταν κάνουμε πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό mod *n* και το αποτέλεσμα δεν θα αλλάξει

Για να υπολογίσουμε: 249 * 504 mod 251

αρκεί -2 * 2 = -4 = 247

Μας ενδιαφέρει επίσης επειδή οι Υπολογιστές κάνουν αριθμητική mod *n*, όπου *n* είναι 2^{32} ή 2^{64}.

Ιδιότητες

$$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow \exists k(a=b+km)$$

Έστω ότι ο m είναι θετικός ακέραιος. Αν

$$a \equiv b \pmod{m}$$

και

$$c \equiv d \pmod{m},$$

τότε

$$a+c \equiv b+d \pmod{m} \text{ και } ac \equiv bd \pmod{m}$$

Ιδιότητες (2)

Αν ($x \equiv_n y$) και ($k \mid n$), τότε : $x \equiv_k y$

Παράδειγμα: $10 \equiv_6 16 \Rightarrow 10 \equiv_3 16$

Απόδειξη:

$x \equiv_n y$ αν και μόνο αν $x = in + y$ για κάποιο ακέραιο i

Έστω $n=jk$ Τότε:

$$x = ijk + y$$

$x = (ij)k + y$ και άρα $x \equiv_k y$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

- Οι *ψευδοτυχαίοι αριθμοί* δεν είναι πραγματικά τυχαίοι αφού παράγονται με συστηματικές μεθόδους.
- Η *γραμμική αναλογική μέθοδος* χρησιμοποιείται συχνά για την παραγωγή τέτοιων αριθμών.
- Απαιτούνται 4 ακέραιοι: ο συντελεστής m, ο πολλαπλασιαστής a, η αύξηση c, και ο σπόρος x_0, όπου $2 \leq a < m, 0 \leq c < m, 0 \leq x_0 < m$.
- Παράγουμε μία ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών $\{x_n\}, 0 \leq x_n < m$ χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξής συνάρτηση:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

Παράδειγμα: Βρείτε την ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγεται από τη γραμμική αναλογική μέθοδο όπου $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$, και $x_0 = 3$.

Λύση: Υπολογίζουμε διαδοχικά την $x_{n+1} = (7x_n + 4)\ mod\ 9, x_0 = 3$.

$x_1 = 7x_0 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 3 + 4$ **mod** $9 = 25$ **mod** $9 = 7$,
$x_2 = 7x_1 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 7 + 4$ **mod** $9 = 53$ **mod** $9 = 8$,
$x_3 = 7x_2 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 8 + 4$ **mod** $9 = 60$ **mod** $9 = 6$,
$x_4 = 7x_3 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 6 + 4$ **mod** $9 = 46$ **mod** $9 = 1$,
$x_5 = 7x_4 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 1 + 4$ **mod** $9 = 11$ **mod** $9 = 2$,
$x_6 = 7x_5 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 2 + 4$ **mod** $9 = 18$ **mod** $9 = 0$,
$x_7 = 7x_6 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 0 + 4$ **mod** $9 = 4$ **mod** $9 = 4$,
$x_8 = 7x_7 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 4 + 4$ **mod** $9 = 32$ **mod** $9 = 5$,
$x_9 = 7x_8 + 4$ **mod** $9 = 7 \cdot 5 + 4$ **mod** $9 = 39$ **mod** $9 = 3$.

Η παραγόμενη ακολουθία είναι η 3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,…
Η ακολουθία επαναλαμβάνεται μετά από 9 όρους.

Συνήθως, οι γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν τη γραμμική αναλογική μέθοδο με $c = 0$. Μία τέτοια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών που έχει $m=2^{31} - 1$ και $a = 7^5 = 16{,}807$, παράγει μία ακολουθία με $2^{31} - 2$ αριθμούς πριν επαναληφθεί.

Ψηφίο Ελέγχουν: UPCs

Μία κοινή μέθοδος για ανίχνευση λαθών σε ακολουθίες ψηφίων είναι η πρόσθεση ενός επιπλέον ψηφίου στο τέλος, το οποίο υπολογίζεται από μία συνάρτηση. Αν το τελικό ψηφίο είναι λάθος, τότε η ακολουθία δεν είναι σωστή.

Παράδειγμα: Τα εμπορικά προϊόντα αναγνωρίζονται από τους *Universal Product Codes* (*UPCs*). Συνήθως αυτοί έχουν 12 δεκαδικά ψηφία με το τελευταίο να είναι ψηφίο ελέγχου που καθορίζεται ως εξής:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$$

a. Έστω ότι τα πρώτα 11 ψηφία του UPC είναι 79357343104. Ποιο είναι το ψηφίο ελέγχου;

b. Είναι ο 041331021641 ένα έγκυρο UPC?

Λύση:

a. $3\cdot7 + 9 + 3\cdot3 + 5 + 3\cdot7 + 3 + 3\cdot4 + 3 + 3\cdot1 + 0 + 3\cdot4 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
$21 + 9 + 9 + 5 + 21 + 3 + 12+ 3 + 3 + 0 + 12 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
$98 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
$x_{12} \equiv 2 \pmod{10}$ Άρα το ψηφίο ελέγχουν είναι το 2.

b. $3\cdot0 + 4 + 3\cdot1 + 3 + 3\cdot3 + 1 + 3\cdot0 + 2 + 3\cdot1 + 6 + 3\cdot4 + 1 \equiv 0 \pmod{10}$
$0 + 4 + 3 + 3 + 9 + 1 + 0+ 2 + 3 + 6 + 12 + 1 = 44 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{10}$
Άρα ο 041331021641 δεν είναι έγκυρο UPC.

Ψηφίο Ελέγχου: ISBNs

Τα βιβλία αναγνωρίζονται από έναν δεκαψήφιο αριθμό: *International Standard Book Number* (ISBN-10). Τα πρώτα 9 ψηφία καθορίζονται από τη γλώσσα, τον εκδότη και το βιβλίο. Το δέκατο ψηφίο είναι ψηφίο ελέγχουν που καθορίζεται ως εξής:

$$x_{10} = \sum_{i=1}^{9} i x_i \ (mod\ 11)$$

Η εγκυρότητα ενός ISBN-10 αριθμού μπορεί να ελεγχθεί:

$$\sum_{i=1}^{10} i x_i \equiv 0\ (mod\ 11)$$

a) Έστω ότι τα πρώτα 9ψηφία ενός ISBN-10 είναι 007288008. Ποιο είναι το ψηφίο ελέγχου;

b) Είναι το 084930149X ένας έγκυρος κωδικός ISBN10;

Το X ανήκει στο {0,1,…,10}.

Λύση:

a. $X_{10} \equiv 1\cdot0 + 2\cdot0 + 3\cdot7 + 4\cdot2 + 5\cdot8 + 6\cdot8 + 7\cdot0 + 8\cdot0 + 9\cdot8 \pmod{11}$.

$X_{10} \equiv 0 + 0 + 21 + 8 + 40 + 48 + 0 + 0 + 72 \pmod{11}$.

$X_{10} \equiv 189 \equiv 2 \pmod{11}$. Άρα, $X_{10} = 2$.

b. $1\cdot0 + 2\cdot8 + 3\cdot4 + 4\cdot9 + 5\cdot3 + 6\cdot0 + 7\cdot1 + 8\cdot4 + 9\cdot9 + 10\cdot10 =$

$0 + 16 + 12 + 36 + 15 + 0 + 7 + 32 + 81 + 100 = 299 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{11}$

Άρα ο 084930149X δεν είναι έγκυρος ISBN-10 αριθμός.

Θέμα 6ο: (0,5 Μονάδες) (2/2/2017)

Όταν ένας $n \in Z$ διαιρεθεί με το 7 τότε το υπόλοιπο είναι 4. Ποιο είναι το υπόλοιπο αν ο $5n$ διαιρεθεί με το 7;

Θέμα 4ο: (1,5 Μονάδες) (15/9/2017)

Να αποδείξετε με αντίφαση την εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο a και έναν πρώτο αριθμό p, αν $p \mid a$ τότε $p \nmid (a+1)$.