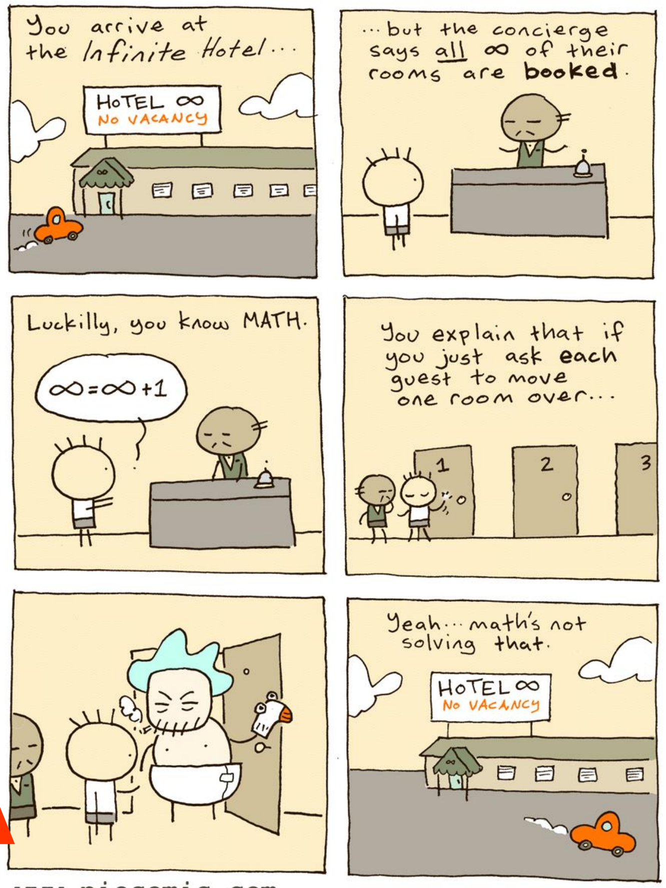
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύνολα



www.piecomic.com

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

- Ιστορία 150 χρόνων
- Καθιέρωση από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918)
  - ***Σύνολο*** *(set): Συλλογή διακεκριμένων πραγμάτων για τα οποία έχουμε μια αντίληψη ότι αποτελούν, εξαιτίας μιας κοινής ιδιότητάς τους, μια ολότητα*
  - *ή μια πολλαπλότητα που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα*
  - Τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** (elements) του συνόλου

Ο Μπαρμπερης της Σεβιλλης

- Ο κ. Τσίχλας είναι ο μόνος μπαρμπέρης (άνδρας) στην Σεβίλλη. Ξυρίζει *όλους τους* άνδρες και *μόνο αυτούς* που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.

- Αν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται δεν μπορεί να ξυρίζει τον εαυτό του!
- Αν δεν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του!!

Το Παράδοξο Του Russell

Αυτό το παράδοξο στην κανονική του συνολοθεωρητική μορφή γράφεται ως εξής:

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους: $\{X: A, A$ είναι ένα σύνολο και $A \notin A\}$

- Είναι το X στο X? Με άλλα λόγια, το X περιέχεται στον εαυτό του;
- Αν το $X \notin X$, τότε το X είναι σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \in X$. Άτοπο.
- Αν $X \in X$ τότε είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \notin X$. Άτοπο.

ΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:
  - Για ένα στοιχείο x και ένα σύνολο A μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:
  - το x ανήκει στο A (συμβολικά $x \in A$)
  - το x δεν ανήκει στο A (συμβολικά $x \notin A$)

Υπάρχουν βέβαια και τα ***θολά σύνολα*** (fuzzy sets)

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{n : n \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{n : n \text{ είναι ακέραιος}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{a / b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ και } b \neq 0\}$$

$$\mathbf{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1}\}$$

Παραδειγματα

- Εναλλακτική παράσταση του B={1,2}

$$B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \Re\} = \{n: n \in \mathbf{N}, n < 3\}$$

- Το κενό σύνολο

$$\emptyset = \{x: x \neq x, x \in \mathbb{N}\}$$

Υποσυνολο

Έστω δύο σύνολα $S \neq \varnothing$ και A.

Το A ονομάζεται υποσύνολο (subset) του S αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S.

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S} \leftrightarrow (a \in A) \rightarrow (a \in S)$$

$$\forall x((x \in A) \longrightarrow (x \in S))$$

Ισοτητα Συνολων

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Εναλλακτικός ορισμός: τα σύνολα είναι ίσα αν το A είναι υποσύνολο του B και το B είναι υποσύνολο του A.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \leftrightarrow (\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}) \land (\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$$

Διαταξη Συνολων

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** (proper subset) του B και συμβολίζουμε

$$A \subset B$$

Ισχύει $\emptyset \subseteq S$ και $S \subseteq S$ για κάθε σύνολο S

Παραδειγμα

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ και $\{\{\emptyset\}\}$.

Το πρώτο είναι ένα σύνολο με 0 στοιχεία

Το δεύτερο και το τρίτο είναι σύνολα με 1 στοιχείο το καθένα.

1. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
2. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$
5. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
6. $\{\emptyset\} \nsubseteq \{\{\emptyset\}\}$

Πράξεις Συνόλων - Ένωση

Η ***ένωση*** (union) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων A και B.

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Πράξεις Συνόλων - Τομή

Η ***τομή*** (intersection) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B.

$$A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Δύο σύνολα A και B λέγονται ***ξένα*** όταν η τομή τους είναι το $\emptyset$.

Βασικές Ιδιότητες

Μεταθετική:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Προσεταιριστική:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Επιμεριστική:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ

Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου S, ονομάζεται ***δυναμοσύνολο*** (power set) του S και συμβολίζεται με $P(S)$:

$$P(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

Πληθαριθμος Δυναμοσυνολου

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν το σύνολο S έχει $n \in N$ στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του θα έχει 2^n στοιχεία. Πώς;

Κάθε στοιχείο του συνόλου S είτε θα συμμετέχει σε ένα υποσύνολο είτε όχι. Άρα δύο επιλογές για όλα τα n στοιχεία και άρα 2^n υποσύνολα.

Ο πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι το πλήθος των στοιχείων του A και αναπαρίσταται από $|A|$.

Κλειστες Πραξεις Συνολων

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής στο δυναμοσύνολο $P(S)$ είναι κλειστές

$$\big(A \in P(S)\big) \wedge \big(B \in P(S)\big) \rightarrow \big((A \cup B) \in P(S)\big)$$

$$\Big(\big(A \in P(S)\big) \wedge \big(B \in P(S)\big)\Big) \rightarrow \big((A \cap B) \in P(S)\big)$$

Παραδειγμα

$$S = \{a, b, c\}$$

$$P(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S\}$$

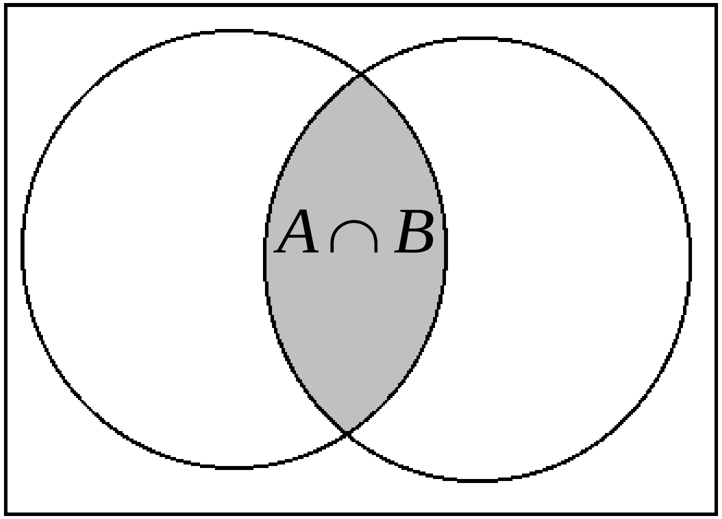
$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	S	S
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	S	$\{b,c\}$	S
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	S	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	S	$\{a,b\}$	S	S	S
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	S
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	S	$\{b,c\}$	S
S	S	S	S	S	S	S	S	S

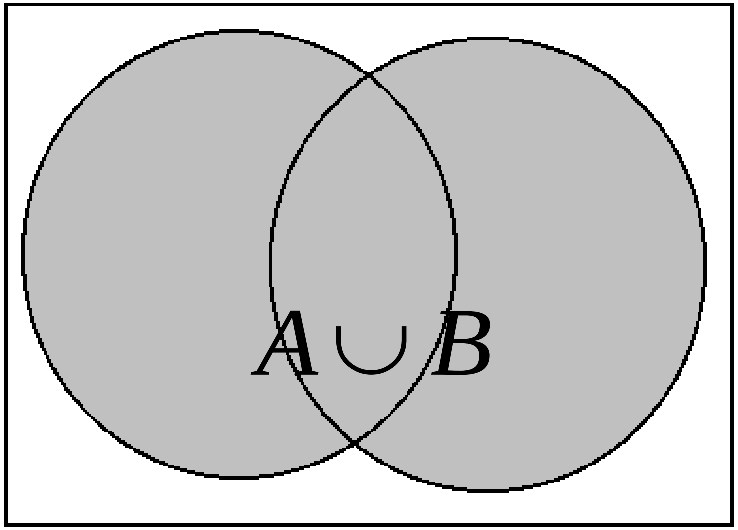
Πράξεις Συνόλων - Διαφορά

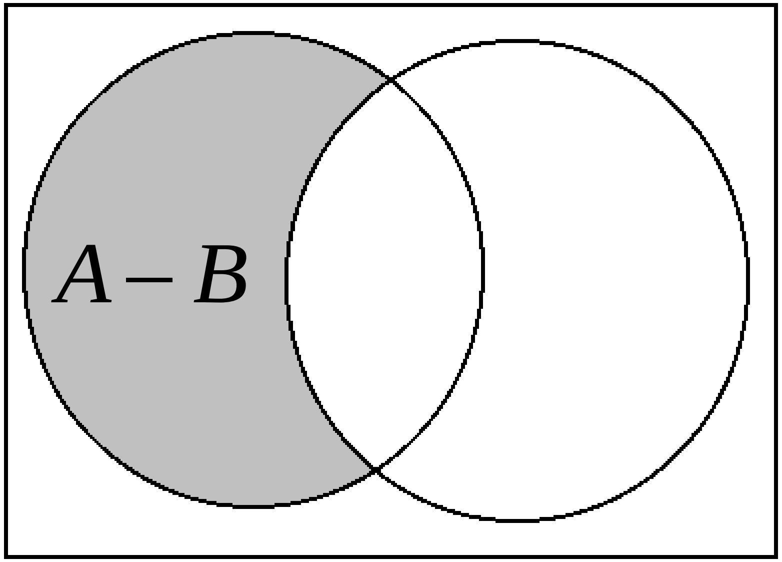
- Η ***διαφορά*** (difference) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με $A - B$ ή $A \setminus B$ και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B:

$$A - B = \{x: (x \in A) \land (x \notin B)\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN
(VENN DIAGRAMS)







Πράξεις Συνόλων – Συμπλήρωμα

Αν $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A - B = A$.

Αν $B \subseteq U$, τότε το σύνολο $U - B$ συμβολίζεται με $\bar{B}$ και ονομάζεται ***συμπληρωματικό*** (complement) του B ως προς το U (Το U συνήθως το ονομάζουμε ***σύμπαν***).

Ιδιότητες:

$B \cup \bar{B} = U$

$B \cap \bar{B} = \emptyset$

$\bar{\bar{B}} = B$

$\bar{\emptyset} = U$

$\bar{U} = \emptyset$

Νόμοι De Morgan
(De Morgan's laws)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Καποιες Επιπλεον Ιδιοτητες

$$A \cap U = A \qquad A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{U} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Γενικευση της Ενωσης και τομης

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a : \exists k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{a : \forall k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

Διαμεριση Συνολου

Το σύνολο $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ όπου:

$$A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \; και \; A_i \subseteq S$$

αποτελεί ***n-διαμέριση*** (partition) του συνόλου S εάν:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$\forall i \forall j \left((i \neq j) \rightarrow \left(A_i \cap A_j = \emptyset \right) \right)$$

Πιο απλά: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

Παραδειγμα (1)

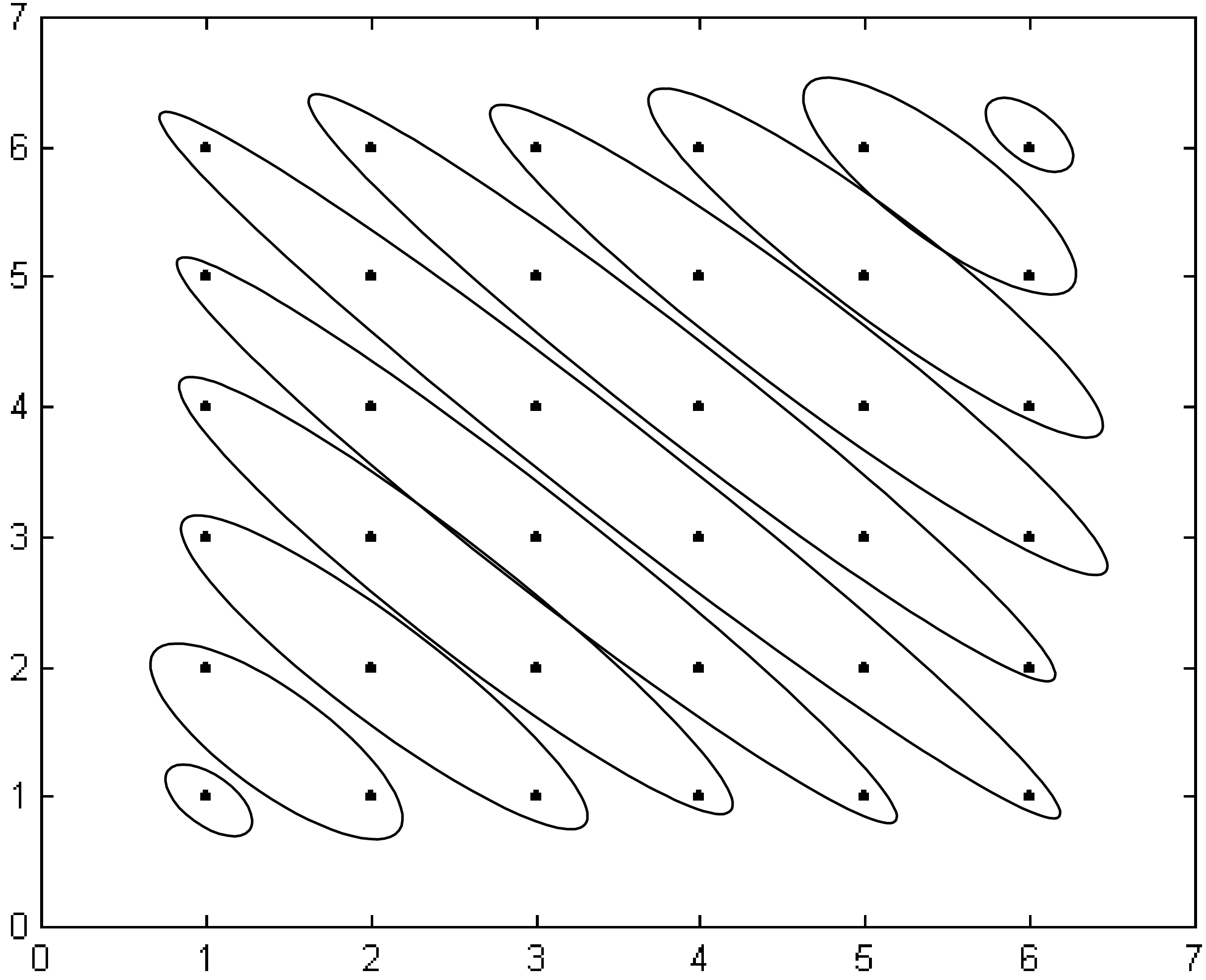
- **A = το σύνολο των δυνατών ενδείξεων που μπορεί να προκύψουν από τη ρίψη δύο διαφορετικών ζαριών**
- **Να κατασκευαστεί διαμέριση του A σε υποσύνολα όπου το άθροισμα των ενδείξεων των δύο διαφορετικών ζαριών να είναι το ίδιο**
- A = {(1,1), (1,2), (2,1), …, (6,6)}

Παραδειγμα (2)

- Δυνατά αθροίσματα: 2, 3, 4, …, 12
- Κατασκευή 11-διαμέρισης

$$A_1 = \{(1,1)\},$$
$$A_2 = \{(1,2),(2,1)\}$$
$$A_3 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$
$$A_4 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$
$$A_5 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$
$$A_6 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$A_7 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$
$$A_8 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$
$$A_9 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$
$$A_{10} = \{(5,6),(6,5)\}$$
$$A_{11} = \{(6,6)\}$$

Παράδειγμα (3)



ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ (ORDERED PAIR)

- Ζεύγος στοιχείων που είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένη σειρά

$$(a,b)$$

$$\big((a,b)=(a',b')\big)\leftrightarrow\big((a=a')\land(b=b')\big)$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
(CARTESIAN PRODUCT)

- *Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη* (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A,\ b \in B\}$$

Παραδειγμα

$$B = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{1, 2\}$$

$$B \times \Gamma = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$\Gamma \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1,\ldots,n\}$$

$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathrm{A},\ i = 1,\ldots,n\}$$

Παραδειγμα

- Αν $B = \{0,1\}$ τότε

$$\mathrm{B}^{n} = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i = 0,1\}$$

- n-άδες της μορφής (0, 1, 1, 0, 0,..., 1)

Ασκήσεις

1. Να αποδειχτεί ότι $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$

2. Να δειχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

Ο Αποστολος Και οι Καννιβαλοι

- Οι καννίβαλοι έπιασαν ένα απόστολο της εκκλησίας και θέλουν να τον φάνε. Πριν τον φάνε όμως για να σπάσουν πλάκα του λένε να πει μία πρόταση και αν αυτή είναι ΑΛΗΘΗΣ τότε θα τον βράσουν αλλιώς αν είναι ΨΕΥΔΗΣ θα τον ψήσουν. Τι πρέπει να πει ο απόστολος μήπως και την γλυτώσει;

- Θα με ψήσετε!!!!!