**1.** (Σεπτέμβριος 2022 – 0,8) Έστω η πρόταση $\exists x \forall y P(x,y)$. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις αυτή ικανοποιείται και γιατί;

**1.** Το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με το $P(x,y)$ να σημαίνει τη συνήθη διάταξη $x \leq y$.
**2.** Το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με το $P(x,y)$ να σημαίνει «το $y$ διαιρείται από το $x$».
**3.** Το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με το $P(x,y)$ να σημαίνει τη συνήθη διάταξη $x \leq y$.
**4.** Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με το $P(x,y)$ να σημαίνει ότι «το $x$ είναι τετράγωνο του $y$».

**Λύση:**

1. **Σωστό:** Πράγματι υπάρχει ένας αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος από όλους τους φυσικούς αριθμούς και αυτός είναι το 1.
2. **Σωστό:** Πράγματι, υπάρχει ένας αριθμός που διαιρεί όλους τους φυσικούς αριθμούς και αυτός είναι το 1.
3. **Λάθος:** Ο τύπος εδώ αναφέρει ότι υπάρχει ελάχιστος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών – κάτι που δεν ισχύει.
4. **Λάθος:** Δεν υπάρχει κάποιος ακέραιος που να είναι το τετράγωνο όλων των ακέραιων αριθμών.

**2.** Χρησιμοποιώντας κατηγορήματα και ποσοδείκτες να εκφράσετε τις παρακάτω προτάσεις και έπειτα με κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων να φτάσετε στο συμπέρασμα.

1. Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.
2. Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.
3. Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.

$\therefore$ Όλα τα τρίγωνα είναι επάνω από όλους τους κύκλους.

**Λύση:**

$P(x)$: «$x$ είναι τρίγωνο»

$Q(x)$: «$x$ είναι γαλάζιο»

$R(x)$: «$x$ είναι δεξιά όλων των τετραγώνων»

$S(x)$: «$x$ είναι πάνω από όλους τους κύκλους»

«Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.» ≡ «Για κάθε $x$, αν το $x$ είναι τρίγωνο τότε είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

«Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ «Για κάθε $x$, αν το $x$ είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το $x$ είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ $\forall x(R(x) \rightarrow S(x))$

«Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.» ≡ «Για κάθε *x*, αν το *x* δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το *x* δεν είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(\neg R(x)\rightarrow \neg Q(x)) \equiv \forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$

Άρα:

1. $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$
2. $\forall x(R(x)\rightarrow S(x))$
3. $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$

Βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

4. Καθολική αμεσότητα σε (1): για αυθαίρετο $x$: $P(x)\rightarrow Q(x)$
5. Καθολική αμεσότητα σε (3): για αυθαίρετο $x$: $Q(x)\rightarrow R(x)$
6. Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα) μεταξύ (4) και (5): $P(x)\rightarrow R(x)$
7. Καθολική αμεσότητα σε (2): για αυθαίρετο $x$: $R(x)\rightarrow S(x)$
8. Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα) μεταξύ (6) και (7): $P(x)\rightarrow S(x)$
9. Καθολική γενίκευση από (8) : $\forall x(P(x)\rightarrow S(x))$

Η (9) δίνει το συμπέρασμα που θέλουμε.

## 3. (Παλαιό Θέμα: 2 μονάδες)

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αναφέρει ότι αν ένας αριθμός είναι θετικός και ένας δεύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον αρχικό αριθμό τότε και ο δεύτερος αριθμός είναι θετικός (τομέας αναφοράς όλοι οι πραγματικοί).

1. $\forall x \exists y\big((x>0)\rightarrow(y>0)\big)$

2. $\forall x \forall y\Big(\big((x>0)\wedge(y>x)\big)\rightarrow(y>0)\Big)$

3. $\forall x \forall y\big((x>0)\wedge(y>x)\big)$

4. $\forall x \exists y\Big((x>0)\rightarrow\big((y>0)\wedge(y>x)\big)\Big)$

β) Έστω ότι P(x,y) είναι ένα κατηγόρημα όπου ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι το {1,2,3}. Επιπλέον, έστω ότι το κατηγόρημα είναι Αληθές μόνο στις εξής περιπτώσεις: P(1,3), P(2,1), P(3,1), P(3,2), P(3,3). Να αναφέρετε ποια από τις παρακάτω λογικές προτάσεις είναι Ψευδής.

1. $\exists x \forall y P(x,y)$

2. $\forall x \exists y P(x,y)$

3. $\exists y \forall x P(x,y)$

4. $\forall y \exists x P(x,y)$

γ) Έστω η πρόταση: $\exists y \forall x \big(C(x) \rightarrow \neg C(x,y)\big)$, όπου C(x) σημαίνει «Ο x είναι φοιτητής Πληροφορικής», C(x,y) σημαίνει ότι «ο x τελείωσε την y» και ο τομέας αναφοράς της x είναι όλοι οι φοιτητές και της y είναι όλες οι ασκήσεις. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελεί την μετάφραση σε φυσική γλώσσα αυτής της λογικής πρότασης;

1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε.

2. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας φοιτητής της Πληροφορικής δεν τελείωσε.

3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.

4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

**<u>Λύση:</u>**

α) Αναλύουμε αυτό που εκφράζει η κάθε πρόταση και αν είναι ίδιο το νόημα με το ζητούμενο.

1. «Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει ένα αριθμός που είναι θετικός.» Αυτή η πρόταση είναι προφανώς ΑΛΗΘΗΣ. Όμως δεν εκφράζει το ζητούμενο.

2. «Για κάθε ζεύγος αριθμών ώστε ο πρώτος να είναι θετικός και ο δεύτερος μεγαλύτερος του πρώτου σημαίνει ότι και ο δεύτερος είναι θετικός.» Αυτή η πρόταση είναι ΑΛΗΘΗΣ και εκφράζει το ζητούμενο. ΆΡΑ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΑΥΤΗ.

3. «Για κάθε ζεύγος αριθμών, ο πρώτος είναι θετικός και ο δεύτερος μεγαλύτερος από τον πρώτο.» Αυτή είναι ΨΕΥΔΗΣ (π.χ., x=0, y=1) και δεν εκφράζει το ζητούμενο.

4. «Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει ένας θετικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του αρχικού.» Αυτή είναι ΑΛΗΘΗΣ. Δεν εκφράζει όμως το ζητούμενο.

β) Αναλύουμε αυτό που εκφράζει η κάθε πρόταση και απαντάμε.

1. ΑΛΗΘΗΣ: Πράγματι για x=3 και για όλα τα y η P(3,y) είναι αληθής.

2. ΑΛΗΘΗΣ: Πράγματι για x=1 ισχύει ότι P(1,3), για x=2 ισχύει ότι P(2,1) και για x=3 ισχύει ότι P(3,1) (στην τελευταία μπορώ να επιλέξω οτιδήποτε από τα τρία).

3. ΨΕΥΔΗΣ: Αν επιλέξω y=1, τότε το P(1,1) δεν ισχύει. Αν επιλέξω y=2, τότε το P(1,2) δεν ισχύει. Αν επιλέξω Αν επιλέξω y=3, τότε το P(2,3) δεν ισχύει. Άρα η πρόταση είναι ψευδής.

4. ΑΛΗΘΗΣ: Αν επιλέξω y=1, τότε το P(3,1) ισχύει. Αν επιλέξω y=2, τότε το P(3,2) ισχύει. Αν επιλέξω y=3, τότε το P(3,3) ισχύει.

γ) Κοιτάμε τι σημαίνει η λογική πρόταση. Πρώτη μετάφραση:

«Υπάρχει y για κάθε x ώστε αν ο x είναι φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής τότε αυτός δεν έχει τελειώσει την εργασία y»

Δεύτερη μετάφραση:

«Υπάρχει μία άσκηση, την οποία κάθε φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής δεν την έχει τελειώσει.»

Από την τελευταία είναι προφανές ότι η σωστή απάντηση είναι η (2).

Παρακάτω εκφράζω και τις υπόλοιπες προτάσεις (εκτός από τη (2) που την ξέρουμε) με κατηγορήματα:

1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε. Προσέξτε ότι ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι φοιτητές και δεν περιορίζομαι στους φοιτητές του τμήματος Πληροφορικής.

$$\exists y \forall x \big(\neg C(x, y)\big)$$

3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.

$$\exists x \forall y \big(C(x) \land \neg C(x, y)\big)$$

4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

$$\forall x \exists y \big(C(x) \to \neg C(x, y)\big)$$