<u>1.</u> Αποδείξτε την παρακάτω λογική ισοδυναμία:

$$\neg\big((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

<u>Λύση:</u>

$\big(\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$

$\big((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ De Morgan

$\big((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ Επιμεριστική

$\big(p \vee (q \wedge \neg q)\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ Ταυτότητα

$(p \vee F) \vee (p \wedge q) \equiv$ Ταυτότητα

$p \vee (p \wedge q) \equiv$ Αφομοίωση

p

<u>2.</u> Το s αντιστοιχεί στο «Το ποδόσφαιρο αρέσει στον Χρήστο», το r στο «Το διάβασμα αρέσει στον Χρήστο.» και το p στο «Η πίτσα αρέσει στον Χρήστο.». Γράψτε σε μορφή προτασιακής λογικής τις παρακάτω προτάσεις:

1. «Στον Χρήστο αρέσει η πίτσα αλλά όχι το ποδόσφαιρο.»
2. «Στον Χρήστο αρέσει να διαβάζει και να τρώει πίτσα, ή του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο.»
3. «Στον Χρήστο δεν αρέσει η πίτσα, αλλά του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο ή να διαβάζει.»
4. «Στον Χρήστο αρέσει να κάνει δύο από αυτές τις ασχολίες αλλά όχι και τις τρεις.»

<u>Λύση:</u>

1. $(p \wedge \neg s)$
2. $(p \wedge r) \vee s$
3. $\neg \mathrm{p} \wedge (r \vee s)$
4. $(p \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

<u>3.</u> Έστω οι παρακάτω προτάσεις: p: «Η Γωγώ εργάζεται μέχρι αργά», q: «Ο Μήτσος εργάζεται μέχρι αργά» και r: «θα φάνε στο σπίτι». Για κάθε πρόταση που δίνεται να κυκλώσετε την αντίστοιχη λογική πρόταση.

«Αν η Γωγώ ή ο Μήτσος δεν εργαστούν μέχρι αργά τότε θα φάνε στο σπίτι.»

α) $\neg(p \vee q) \rightarrow r$ β) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$

γ) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ δ) $r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Απάντηση: γ

«Η Γωγώ και ο Μήτσος δεν εργάζονται μέχρι αργά.»

α) $\neg(p \vee q)$ β) $\neg p \vee \neg q$ γ) $p \wedge q$ δ) $p \rightarrow \neg q$

Απάντηση: α

«Θα φάνε στο σπίτι μόνο αν η Γωγώ δεν εργάζεται μέχρι αργά.» (αναγκαία συνθήκη)

α)$r \rightarrow p$ β) $\neg p \rightarrow \neg r$ γ) $p \rightarrow \neg r$ δ) $p \rightarrow r$

Απάντηση: γ

4. α) Να δείξετε αν η παρακάτω λογική πρόταση είναι ταυτολογία ή όχι.

$$\varphi = \big((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)\big) \rightarrow (p \wedge r)$$

β) Ποια είναι η $\neg\varphi$; (στην απάντησή σας το σύμβολο $\neg$ μπορεί να εμφανίζετε μόνο μπροστά από μία από τις μεταβλητές)

γ) Να δείξετε ότι οι τρεις προτάσεις $p \rightarrow \neg q$, $\neg r \vee q$ και r έχουν ως αποτέλεσμα το $\neg p$. Θα πρέπει να αναγράφετε την ονομασία του κανόνα που χρησιμοποιείτε κάθε φορά. Δηλαδή:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow \neg q & (1) \\ \neg r \vee q & (2) \\ \underline{r \qquad\quad} & (3) \\ \therefore \neg p & \end{array}$$

Λύση:

α) Θα βρούμε μία ανάθεση τιμής στις προτασιακά σύμβολα έτσι ώστε η λογική πρόταση να είναι Ψευδής και άρα δεν θα είναι ταυτολογία.

Πράγματι, αν $p = q = r = 0$ έχουμε ότι $p \rightarrow q$ είναι αληθές και $r \rightarrow \neg q$ είναι αληθές και άρα η πρόταση $\big((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)\big)$ είναι αληθής αλλά το συμπέρασμα $p \wedge r$ είναι ψευδές. Γνωρίζουμε ότι $T \rightarrow F$ είναι ψευδές και άρα δεν είναι ταυτολογία ο τύπος.

β) $\neg\varphi = \neg\Big(\big((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)\big) \rightarrow (p \wedge r)\Big) = \neg\Big(\neg\big((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)\big) \vee (p \wedge r)\Big) =$

$$\neg\big((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge q) \vee (p \wedge r)\big) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

γ) Από (2) και (3) με απαλοιφή (διαζευκτικός συλλογισμός) προκύπτει η πρόταση q (4). Από (4) και και (1) με Modus tollens προκύπτει $\neg p$ που είναι και το ζητούμενο.

5. Να εξεταστεί αν η παρακάτω σύνθετη πρόταση είναι αντίφαση ή ταυτολογία:

$$p\to(q\wedge r)\leftrightarrow(p\to q)\wedge(p\to r)$$

Λύση:

p	q	r	q∧r	p→(q∧r)	p→q	p→r	(p→q)∧(p→r)	p→(q∨r)↔(p→q)∧(p→r)
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Άρα είναι ταυτολογία.

6. Να αποδείξετε το νόμο της εξαγωγής:

$$\big((p\wedge q)\to r\big)\leftrightarrow\big(p\to(q\to r)\big)$$

Λύση:

Θα μπορούσατε να κάνετε πίνακα αληθείας ή να αποδείξετε ότι ο παραπάνω τύπος είναι ταυτολογία. Σε αυτή την περίπτωση θα ξεκινήσουμε από το πρώτο μέρος και με διαδοχικές ισοδυναμίες θα καταλήξουμε στο δεύτερο. Επομένως, θα έχουμε αποδείξει τον νόμο της εξαγωγής.

Πράγματι:

$$(p\wedge q)\to r\equiv\neg(p\wedge q)\vee r\equiv$$

$$\equiv\neg p\vee\neg q\vee r\equiv\neg p\vee(\neg q\vee r)\equiv$$

$$\neg p\vee(q\to r)\equiv p\to(q\to r)$$

Αποδείχτηκε.