Αθροίσματα, Γινόμενα και Ασυμπτωτικές Εκτιμήσεις

26 Νοεμβρίου 2020

0.1 Κλειστοί τύποι και Προσεγγίσεις

Τα αθροίσματα προκύπτουν πολύ συχνά στην ανάλυση αλγορίθμων καθώς και σε άλλες επιστημονικές περιοχές, όπως τα οικονομικά. Γνωρίζουμε ήδη και αποδεικνύεται με επαγωγή ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Αυτός ο κλειστός τύπος επιτρέπει την αποτίμηση του αθροίσματος με πολύ εύκολο τρόπο από ότι αν μέναμε στην αρχική του μορφή. Αν και αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι ο τύπος αυτός ισχύει δεν γνωρίζουμε πως παρήχθηκε. Στην Ενότητα 0.4, θα δούμε πως μπορούμε να παράγουμε τέτοιους κλειστούς τύπους. Ακόμα και όταν δεν μπορούμε να βρούμε κλειστούς τύπους μπορούμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά ένα συγκεκριμένο άθροισμα.

Ακόμα και για γινόμενα μπορούμε να εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο. Θα ασχοληθούμε με το παραγοντικό :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Θα περιγράψουμε έναν τύπο που προσεγγίζει το παραγοντικό και καλείται ο *τύπος του Stirling*. Τέλος, ακόμα και όταν δεν μπορούμε να βρούμε μία προσέγγιση, υπάρχει περίπτωση να μπορέσουμε να βρούμε ένα κλειστό τύπο που να περιγράφει τον ρυθμό αύξησης. Για να το κάνουμε αυτό θα εισάγουμε την έννοια της ασυμπτωτικής εκτίμησης που περιγράφει τον ρυθμό ανάπτυξης.

0.2 Παράδειγμα 1 - Ετήσια Εισοδήματα

Θα προτιμούσατε 1.000.000 ευρώ σήμερα ή $50,000$ τον χρόνο για την υπόλοιπη ζωής σας· Από την μία, όλα τα χρήματα μαζί είναι ωραία ενώ από την άλλη αν ζήσετε για πολύ καιρό το ποσό που θα πάρετε συνολικά θα είναι αρκετά μεγαλύτερο.

Τυπικά, αυτό είναι ένα ερώτημα που αφορά ετήσια εισοδήματα. Πιο συγκεκριμένα, ένα ετήσιο εισόδημα m ευρώ για n χρόνια σημαίνει ότι κάθε χρόνο για n συνολικά χρόνια θα παίρνουμε m ευρώ. Ένα βασικό ερώτημα είναι τί είναι καλύτερο, να τα παίρνεις όλα στο χέρι ή να τα παίρνεις όλα τα λεφτά με τη μορφή ετήσιου εισοδήματος. Για παράδειγμα, 50.000 ευρώ το χρόνο για 20 χρόνια είναι αρκετά λιγότερα από 1.000.000 ευρώ στο χερί αφού με αυτά τα λεφτά μπορείτε να παίρνετε τόκους από την πρώτη κιόλας μέρα. Τί γίνεται όμως αν υπάρχει επιλογή μεταξύ 50.000 ευρώ το χρόνο και 750.000 στο χέρι· Τότε η επιλογή δεν είναι και τόσο ξεκάθαρη.

Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να γνωρίζουμε την απόδοση ενός ευρώ στο μέλλον, δηλαδή θα πρέπει να γνωρίζουμε το επιτόκιο. Ας υποθέσουμε ότι τα χρήματα τα βάζουμε στην τράπεζα με ένα σταθερό επιτόκιο p, και έστω ότι $p = 3\%$. Με αυτόν τον τρόπο, τα 10 ευρώ σήμερα θα γίνουν σε έναν χρόνο $(1+p)10 = 10,3$ ευρώ, σε δύο χρόνια $(1+p)^2 10 = 10,609$ ευρώ κ.ο.κ.

0.2.1 Υπολογισμός Ετήσιου Εισοδήματος

Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε με σημερινή αξία ένα ετήσιο εισόδημα m ευρώ για n χρόνια. Η πρώτη πληρωμή m ευρώ αξίζει πραγματικά m ευρώ. Όμως, η δεύτερη πληρωμή κοστίζει $m/(1+p)$

ευρώ. Παρόμοια, η τρίτη πληρωμή κοστίζει $m/(1+p)^2$, και η n-οστή πληρωμή κοστίζει $m/(1+p)^{n-1}$. Επομένως, η συνολική αξία V του ετήσιου εισοδήματος είναι το άθροισμα όλων αυτών των ποσών:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{(1+p)^{i-1}}$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα ο ένας τρόπος είναι να υπολογίσουμε όλους τους όρους του αθροίσματος θέτοντας τα m, n και p στις κατάλληλες τιμές και να κάνουμε το άθροισμα. Όμως, αν είχαμε έναν κλειστό τύπο για αυτό το άθροισμα θα ήταν πολύ πιο εύκολο. Αρχικά ας αλλάξουμε λίγο το άθροισμα:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{(1+p)^{i-1}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m}{(1+p)^{j}} \quad (\text{Αντικατάσταση } j = i-1) \\ &= m \sum_{j=0}^{n-1} x^j \quad (\text{Αντικατάσταση } x = \tfrac{1}{1+p}) \end{aligned}$$

Ο στόχος αυτών των αντικαταστάσεων είναι να το φέρουμε σε μία ωραία μορφή ώστε να παράγουμε τον κλειστό τύπο όπως θα δούμε στην επόμενη υποενότητα. Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι μίας γεωμετρικής σειράς. Το χαρακτηριστικό μίας γεωμετρικής σειράς είναι ότι ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με έναν πολλαπλασιασμό. Στην προκειμένη περίπτωση πολλαπλασιάζουμε με x.

0.2.2 Το Άθροισμα Γεωμετρικής Σειράς

Θεώρημα 1 *Για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \neq 1$, ισχύει*

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο n. Αφήνεται για τον αναγνώστη. ∎

Βέβαια η απόδειξη με επαγωγή δεν δίνει τον τρόπο παραγωγής του κλειστού τύπου. Για να καταλάβουμε πως παρήχθηκε αυτός ο τύπος κάνουμε το εξής κόλπο. Αν K είναι το άθροισμα τότε το $-xK$ θα είναι:

$$\begin{aligned} K &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} \\ -xK &= -x - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-1} - x^n \end{aligned}$$

Προσθέτωντας αυτές τις δύο εξισώσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} K - xK &= 1 - x^n \Rightarrow \\ K &= \frac{1-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

Επομένως, αν εφαρμόζουμε αυτόν τον τύπο για την περίπτωση του ετήσιου εισοδήματος έχουμε ότι για n χρόνια και m ευρώ την χρονιά:

$$\begin{aligned} V &= m\sum_{j=0}^{n-1} x^j \\ &= m\frac{1-x^n}{1-x} \\ &= m\frac{1-(\frac{1}{1+p})^n}{1-\frac{1}{1+p}} \\ &= m\frac{1+p-(\frac{1}{1+p})^{n-1}}{p} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας με $m = 50.000$ ευρώ και $n = 20$ χρόνια το αποτέλεσμα είναι $V \approx 766.190$. Επομένως μας συμφέρει να παίρνουμε το ετήσιο εισόδημα παρά να μας δώσουν 750.000 στο χέρι.

0.2.3 Άπειρη Γεωμετρική Σειρά

Τί γίνεται αν κάποιος μας πει ότι θα μας δίνει 50.000 ευρώ το χρόνο για πάντα (όταν φύγουμε από τη ζωή θα τα παίρνουν τα παιδιά μας κ.ο.κ.) ή 2.000.000 ευρώ στο χέρι. Τί θα επιλέξουμε σε αυτήν την περίπτωση·

Για να το βρούμε αυτό θα πρέπει να δούμε την απόδοση του ετήσιου εισοδήματος σήμερα λαμβάνοντας υπόψη ότι θα το παίρνουμε για πάντα. Αυτό στην ουσία θα το υπολογίσουμε παίρνοντας το όριο του κλειστού τύπου από το Θεώρημα 1 της γεωμετρικής αυτής σειράς καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Θεώρημα 2 *Αν $|x| < 1$, τότε*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} x^i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x^i \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

αφού αν $|x| < 1$ το x^n τείνει στο 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο.

∎

Στο πρόβλημα του ετήσιου εισοδήματος $\frac{1}{1+p} < 1$, και επομένως το ετήσιο εισόδημα με σημερινές τιμές θα είναι:

$$\begin{aligned} V &= m\frac{1}{1-x} \\ &= m\frac{1}{1-\frac{1}{1+p}} \\ &= m\frac{1+p}{p} \end{aligned}$$

Άρα στο δικό μας παράδειγμα με 50.000 ευρώ το χρόνο για πάντα θα ισοδυναμούσε με το να μας έδιναν περίπου 1.716.667 ευρώ. Άρα καλύτερα να τα πάρετε όλα τα χρήματα μπροστά.

0.2.4 Παραδείγματα

Δεδομένου του κλειστού τύπου για το άθροισμα μίας γεωμετρικής σειράς μπροούμε να δώσουμε λύση και να βρούμε το κλειστό τύπο από τα παρακάτω αθροίσματα.

$$\begin{aligned} 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots &= \sum_{i=0}^{\infty} (1/2)^i = \frac{1}{1-(1/2)} = 2 \\ 0,99999999999999999 &= 0,9\sum_{i=0}^{\infty} (1/10)^i = 0,9\frac{1}{1-(1/10)} = 0,9\frac{10}{9} = 1 \\ 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \cdots &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1/2)^i = \frac{1}{1-(-1/2)} = 2/3 \\ 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1 \\ 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2} \end{aligned}$$

Μία γεωμετρική σειρά λέγεται αύξουσα (φθίνουσα) όταν η απόλυτη τιμή των όρων της αυξάνονται (μειώνονται). Ένας καλός κανόνας είναι ότι το άθροισμα μίας γεωμετρικής σειράς θα είναι περίπου ίσο με τον όρο του οποίου η τιμή είναι μέγιστη κατά απόλυτη τιμή από όλους τους όρους της σειράς.

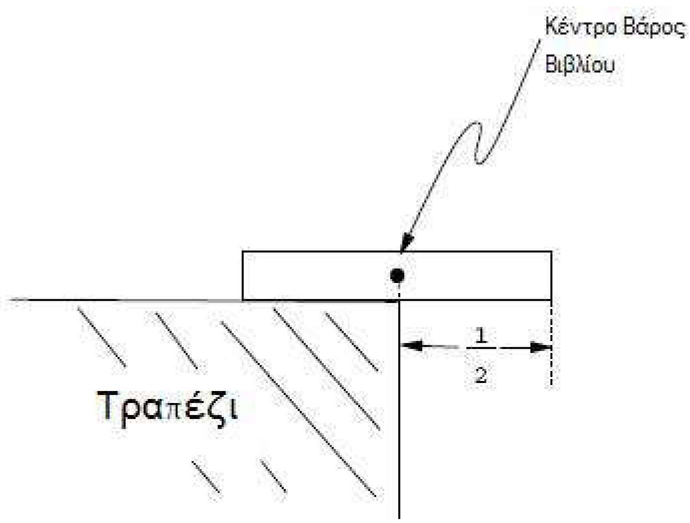
0.3 Παράδειγμα 2 - Στοίβαγμα Βιβλίων

Έστω ότι έχετε μία στοίβα από βιβλία και θέλουμε να τα βάλουμε σε ένα τραπέζι με τέτοιο τρόπο ώστε το κάθε βιβλίο να προεξέχει σε σχέση με το προηγούμενό του. Πόσο μακρυά μπορεί να είναι η άκρη της στοίβας από την άκρη του τραπεζιού χωρίς να καταστρέφεται η στοίβα; Θα μπορούσατε να έχετε ένα βιβλίο που να είναι τελείως έξω από το τραπέζι;

Η κλασσική απάντηση σε αυτό είναι ότι όχι, το βιβλίο ποτέ δεν θα είναι ολόκληρο έξω από το τραπέζι. Θα δούμε ότι αυτό δεν είναι αλήθεια.

0.3.1 Ορισμός του Προβλήματος

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα με αναδρομικό τρόπο. Πόσο μακρυά μπορεί να φτάσει ένα βιβλίο στην άκρη του τραπεζιού· Η απάντηση είναι ότι εφόσον το κέντρο βάρους του βιβλίου είναι μέσα στο τραπέζι δεν πρόκειται να πέσει και άρα θα μπορεί να φτάσει μέχρι τη μέση όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Ένα βιβλίο μπορεί να είναι το πολύ κατά το ήμιση εκτός τραπεζιού.

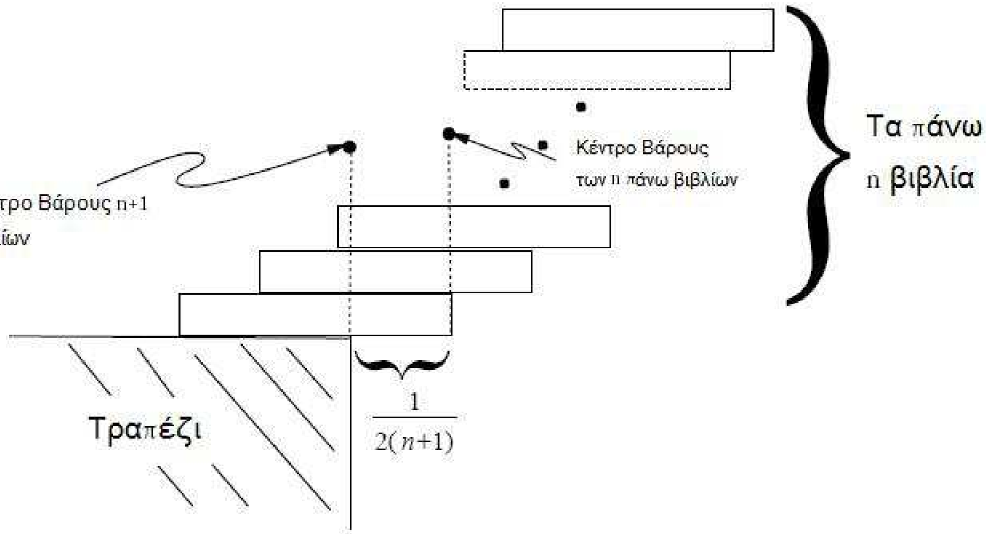
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία στοίβα από βιβλία που προεξέχει από το τραπέζι. Ορίζουμε την *προεξοχή* μίας στοίβας βιβλίων ως την οριζόντια απόσταση από το κέντρο βάρους της στοίβας έως το άκρο της. Αν το κέντρο βάρους της στοίβας είναι στην άκρη του τραπεζιού, η προεξοχή δηλώνει την απόσταση B_n που αναζητάμε.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι για ένα βιβλίο η προεξοχή είναι $B_1 = 1/2$. Έστω ότι έχουμε μία στοίβα $n+1$ βιβλίων με μέγιστη προέκταση. Αν η προέκταση των n βιβλίων πάνω από το κατώτερο βιβλίο δεν ήταν μέγιστη θα μπορούσαμε να αλλάξουμε αυτά τα n βιβλία ώστε να έχουν μέγιστη προεξοχή. Επομένως η μέγιστη προεξοχή B_{n+1} μίας στοίβας $n+1$ βιβλίων δημιουργείται τοποθετώντας μία στοίβα n βιβλίων με μέγιστη προέκταση πάνω από ένα βιλίο. Παίρνουμε τη μέγιστη προεξοχή για τα $n+1$ βιβλία αν τοποθετήσουμε το κέντρο μάζας των n βιβλίων στην άκρη του κατώτερου βιβλίου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.

Επομένως ξέρουμε πως να τοποθετήσουμε το $n+1$-οστό βιλίο για μέγιστη προεξοχή και το μόνο που απομένει είναι να την υπολογίσουμε. Ο απλούστερος τρόπος είναι να θεωρήσουμε ότι στον οριζόντιο άξονα η αρχή του θα είναι το κέντρο βάρους των n βιβλίων. Με αυτόν τον τρόπο η οριζόντια συντεταγμένη του κέντρου βάρους των $n+1$ βιβλίων θα είναι ίση μέ την αύξηση της προεξοχής. Το κέντρο μάζας του κατώτερου βιβλίου έχει οριζόντια συντεταγμένη ίση με $1/2$, και επομένως η οριζόντια συντεταγμένη του κέντρου μάζας των $n+1$ βιβλίων είναι:

$$\frac{0 \cdot n + (1/2) \cdot 11}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$$

Με άλλα λόγια:



Σχήμα 2: Επιπρόσθετη προέκταση για $n+1$ βιβλία.

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2(n+1)} \tag{1}$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2. Ξετυλίγοντας αυτό το άθροισμα παίρνουμε:

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Ορίζουμε:

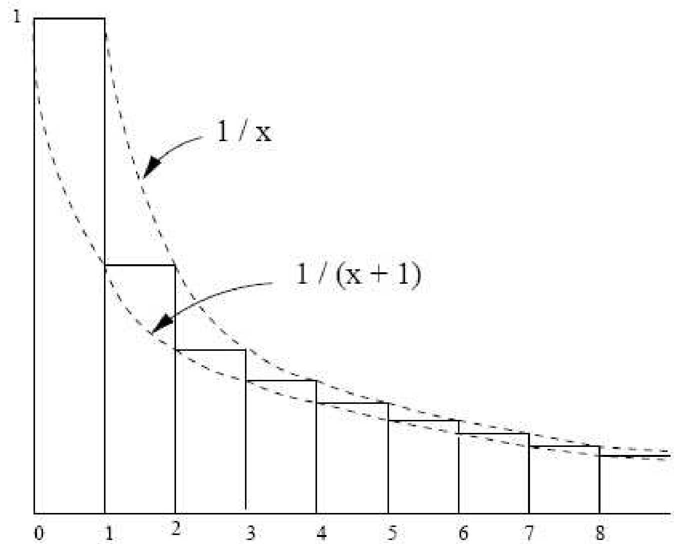
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

και ο H_n είναι ο n-οστός *αρμονικός αριθμός*. Μέχρι τώρα δείξαμε ότι $B_n = \frac{H_n}{2}$.

0.3.2 Εύρεση του Αθροίσματος - Η Μέθοδος της Ολοκλήρωσης

Ο υπολογισμός του αθροίσματος μπορεί να γίνει επαναληπτικά αλλά θα ήταν καλύτερο αν μπορούσαμε να απαντήσουμε άμεσα (σε ένα βήμα) ερωτήσεις του τύπου: Πόσα βιβλία είναι απαραίτητα για να έχουμε μία προεξοχή ίση με 100 βιβλία; Η πρώτη προσέγγιση θα ήταν ο επαναληπτικός υπολογισμός των αρμονικών αριθμών μέχρι το 200 (θα αργήσετε πάρα πολύ). Η άλλη είναι να βρούμε (έστω και προσεγγιστικά) μία κλειστή μορφή για τους αρμονικούς αριθμούς. Δυστυχώς δεν υπάρχει κλειστή μορφή που να υπολογίζει ακριβώς τους αρμονικούς αριθμούς οπότε και θα καταφύγουμε σε μία προσεγγιστική κλειστή μορφή.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης για να βρούμε μία προσέγγιση των αρμονικών αριθμών.



Σχήμα 3: Η επιφάνεια κάτω από την *σκάλα* είναι ίση με τον n-οστό αρμονικό αριθμό. Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι παντού μεγαλύτερη ή ίση σε σχέση με την σκάλα και επομένως το ολοκλήρωμα της αποτελεί πάνω φράγμα του αθροίσματος. Αντίστοιχα η συνάρτηση $\frac{1}{x+1}$ είναι παντού μικρότερη ή ίση από την σκάλα και επομένως το ολοκλήρωμά της αποτελεί κάτω φράγμα του αθροίσματος.

Η ιδέα της μεθόδου ολοκλήρωσης είναι το φράξιμο από πάνω και από κάτω του αθροίσματος από απλές συναρτήσεις όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3. Άρα παίρνουμε:

$$\int_0^n \frac{1}{x+1} dx \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

από το οποίο προκύπει ότι

$$\ln n + 1 \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

Επομένως αν θέλουμε μία στοίβα που να έχει προεξοχή ίση με 3 βιβλία τότε θα πρέπει από τις παραπάνω ανισότητες συνεπάγεται ότι θα χρειαστούμε μεταξύ 149 και 403 βιβλίων. Στην πραγματικότητα χρειάζονται 227 βιβλία.

0.4 Χειρισμός Αθροισμάτων και Μέθοδοι

Υπάρχουν κάποιοι βασικοί κανόνες χειρισμού των αθροισμάτων που τους χρησιμοποιούμε ώστε να παράξουμε κλειστούς τύπους. Έστω ότι K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων. Αθροίσματα πάνω σε στοιχεία του K μπορούν να μετατραπούν με βάση τους ακόλουθους κανόνες.

$$\sum_{k \in K} ca_k = c \sum_{k \in K} a_k \tag{2}$$

Επιμεριστική Ιδιότητα.

$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k)=\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K}b_k \tag{3}$$

Προσεταιριστική Ιδιότητα.

$$\sum_{k\in K}a_k=\sum_{p(k)\in K}a_{p(k)} \tag{4}$$

Μεταθετική Ιδιότητα, όπου η συνάρτηση $p(k)$ είναι μία αναδιάταξη των αριθμών του K.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον κλειστό τύπο για το άθροισμα

$$S_n=\sum_{0\le k\le n}(a+bk)$$

Από την μεταθετική ιδιότητα αν αντικαταστήσουμε το k από το $n-k$ παίρνουμε:

$$S_n=\sum_{0\le n-k\le n}(a+b(n-k))=\sum_{0\le k\le n}(a+bn-bk)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μπορούν να προστεθούν χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα.

$$2S=\sum_{0\le k\le n}((a+bk)+(a+bn-bk))=\sum_{0\le k\le n}2a+bn$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα και να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$2S=(2a+bn)\sum_{0\le k\le n}1=(2a+bn)(n+1)$$

Διαιρώντας με το 2 παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+bk)=(a+\frac{1}{2}bn)(n+1)$$

0.4.1 Εξίσωση Αθροίσματος

Σε πολλές περιπτώσεις ένα άθροισμα S_n μπορεί με κατάλληλο χειρισμό να γραφεί στην μορφή $S_n=f(S_n)$ για κάποια συνάρτηση f. Αν λύσουμε ως προς S_n θα μπορέσουμε να βρούμε τον αντίστοιχο κλειστό τύπο. Πιο συγκεκριμένα, έστω $S_n=\sum_{0\le k\le n}a_k$. Τότε γράφουμε το S_{n+1} με δύο τρόπους εξάγοντας τον πρώτο και τον τελευταίο όρο.

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\sum_{0\le k\le n+1}a_k=a_0+\sum_{1\le k\le n+1}a_k=$$

$$a_0+\sum_{1\le k+1\le n+1}a_{k+1}=$$

$$a_0+\sum_{0\le k\le n}a_{k+1}\Rightarrow$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le k \le n} a_{k+1}$$

Αν εκφράσουμε το τελευταίο άθροισμα σαν συνάρτηση του S_n τότε λύνουμε την παραγόμενη εξίσωση και βρίσκουμε την λύση.

Παράδειγμα 1 *Να βρεθεί κλειστός τύπος για το άθροισμα* $S_n = \sum_{0 \le k \le n} ax^k$.

Απόδειξη. Από την εξίσωση αθροίσματος παίρνουμε:

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \le k \le n} ax^{k+1}$$

όπου το άθροισμα στα δεξιά είναι

$$\sum_{0 \le k \le n} ax^{k+1} = x \sum_{0 \le k \le n} ax^k = xS_n$$

από την επιμεριστική ιδιότητα.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$$

και λύνοντας ως προς S_n παίρνουμε την λύση:

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x}$$

για $x \neq 1$. ∎

0.4.2 Η Μέθοδος της Ολοκλήρωσης

Σε αυτή τη μέθοδο όπως είδαμε και στην Ενότητα 0.3 χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό λογισμό ώστε να φράξουμε ένα άθροισμα από πάνω και από κάτω. Στον ολοκληρωτικό λογισμό, το ολοκλήρωμα είναι η επιφάνεια μεταξύ της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα και στην ουσία είναι το όριο ενός αθροίσματος απείρων μικρών ορθογωνίων που προσεγγίζουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Άλλωστε μην ξεχνάμε ότι το ολοκλήρωμα είναι στην ουσία το όριο ενός αθροίσματος στο άπειρο. Επομένως, μπορούμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία και να υπολογίζουμε προσεγγιστικά το άθροισμα (όχι απείρως μικρών) ορθογωνίων χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα.

Έστω μία αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to \Re$ συνεχής. Τότε:

$$\int_{x=a-1}^{b} f(x)dx \le \sum_{k=a}^{b} f(i) \le \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx \tag{5}$$

Ομοίως για μία φθίνουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to \Re$ συνεχής:

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)dx \le \sum_{k=a}^{b} f(i) \le \int_{x=a-1}^{b} f(x)dx \tag{6}$$

Οι παραπάνω τύποι παρήχθησαν με μία μέθοδο παρόμοια με αυτή που εκτελέσαμε στην Ενότητα 0.3.

Παράδειγμα 2 *Να βρείτε μία προσέγγιση του* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k^4 + k^2)$.

Απόδειξη. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Τότε από τον Τύπο 5 έχουμε:

$$\int_{x=0}^{n} x^4 + x^2 dx \leq \sum_{k=1}^{n}(k^4 + k^2) \leq \int_{x=1}^{n+1} x^4 + x^2 dx \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{n} \leq S_n \leq \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^5}{5} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

∎

0.4.3 Πρόβλεψη της Απάντησης - Απόδειξη με Επαγωγή

Σε αυτήν την μέθοδο με κάποιον τρόπο γνωρίζουμε την κλειστή μορφή του αθροίσματος S. Μπορεί αυτό να προήλθε επειδή μας δόθηκε ή επειδή μπορέσαμε να το βρούμε διαισθητικά. Εφόσον έχουμε τον κλειστό τύπο του S αυτό που απομένει είναι να αποδείξουμε ότι ισχύει. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Παράδειγμα 3 *Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα* $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$.

Απόδειξη. Αρχικά βρίσκουμε μία προσέγγιση του αθροίσματος με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης.

$$\frac{n^3}{3} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^3}{3} - 13$$

Επομένως προκύπτει ότι ο κυρίαρχος όρος του S_n θα είναι ο n^3 (γράφουμε $S_n = O(n^3)$ όπως θα δούμε στην Ενότητα 0.6) και θα είναι ένα πολυώνυμο. Άρα κάνουμε την μαντεψιά:

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Βάζοντας τιμές στο n θα πάρουμε ένα σύστημα εξισώσεων ώστε να υπολογίζουμε τα a, b, c, d. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
n = 0 &\Rightarrow 0 = d \\
n = 1 &\Rightarrow 1 = a + b + c + d \\
n = 2 &\Rightarrow 5 = 8a + 4b + 2c + d \\
n = 3 &\Rightarrow 14 = 27a + 9b + 3c + d
\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε ότι $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$.

Επομένως μαντέυουμε ότι:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}$$

Θα πρέπει αυτή την μαντεψιά να την αποδείξουμε και με επαγωγή αφού κανείς δεν μας εγγυάται ότι πράγματι αυτό θα είναι το άθροισμα.

Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει αφού $S_1 = 1 = \frac{1(1+1/2)(1+1)}{3} = \frac{(3/2)\cdot 2}{3} = 1$. Έστω ότι ισχύει για $n = k-1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k$.

$$\begin{gathered} 3S_k = 3S_{k-1} + 3k^2 = (k-1)(k-1/2)(k) + 3k^2 = \\ (k^3 - 3/2k^2 + 1/2k) + 3k^2 = \\ (k^3 + 3/2k^2 + 1/2k) = \\ k(k+1/2)(k+1) \end{gathered}$$

Επομένως αποδείχτηκε.

∎

0.5 Γινόμενα

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε ένα γινόμενο αριθμών $P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$,τότε το μετατρέπουμε σε άθροισμα λογαριθμίζοντάς το και έπειτα όταν βρούμε τον κλειστό τύπο επανερχόμαστε υψώνοντάς το στην κατάλληλη δύναμη. Συγκεκριμένα:

$$\ln P_n = \ln \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$$

Ας εφαρμόζυμε αυτή την τεχνική στην περίπτωση του παραγοντικού:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Λογαριθμίζοντας μετατρέπουμε το γινόμενο σε άθροισμα:

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$$

Το άθροισμα αυτό θα το φράξουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ολοκλήρωσης (ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση):

$$\int_1^n \ln x dx \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln x dx \Rightarrow$$

$$[x \ln x - x]_1^n \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le [x \ln x - x]_1^{n+1}$$

$$n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

Υψώνοντας την ανίσωση σαν δύναμη του e παίρνουμε:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Επομένως προσεγγιστικά μπορούμενα πούμε ότι το $n!$ είναι περίπου ίσο με $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Βέβαια υπάρχει μία πολύ καλύτερη προσέγγιση η οποία ονομάζεται ο τύπος του Stirling για το παραγοντικό.

Θεώρημα 3

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

Ο τύπος αυτός δίνει σε εξαιρετική ακρίβεια το παραγοντικό ενός αριθμού. Γενικά μπορουμε να πούμε ότι το $n!$ είναι περίπου ίσο με $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

0.6 Ασυμπτωτικές Εκτιμήσεις

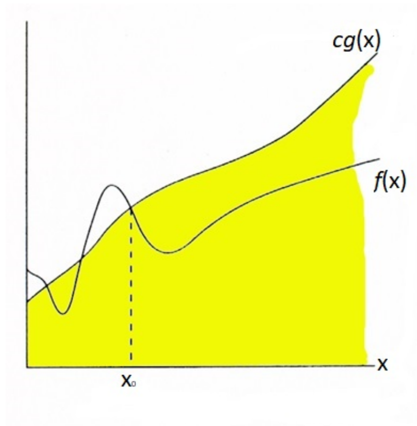
Η προσέγγιση ως τεχνική είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αφού επιτρέπει την απόρριψη λεπτομερειών και την μελέτη μόνο των κρίσιμων σημείων. Η προσέγγιση είναι πολύ χρήσιμη στην ανάλυση υπολογιστικών συστημάτων και αλγόριθμων. Για παράδειγμα, θέλουμε να βρούμε το χρόνο που χρειάζεται για τον πολλαπλασιασμό δύο τετραγωνικών πινάκων $n \times n$. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις που γίνονται, να λάβουμε υπόψη την μεταβολή των μεταβλητών στις επαναλήψεις, να λάβουμε υπόψη την χρήση της κρυφής μνήμης και τις αστοχίες σε αυτή, να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε αριθμούς κινητής υποδιαστολής κτλ. Γενικά θα ήταν αρκετά πολύπλοκος έως αδύνατος ένας τέτοιος υπολογισμός.

Αντίθετα, θα μπορούσαμε απλά να παρατηρήσουμε ότι κάθε ένα κελί του παραγόμενου πίνακα από τα n^2 συνολικά κελιά απαιτεί n πράξεις και επομένως ο χρόνος θα είναι ανάλογος του n^3. Η απάντηση αυτή βέβαια δεν είναι ακριβής αλλά είναι εύκολο να την βρούμε και επιπλέον πολύ σπάνια χρειαζόμαστε μία απάντηση με μεγαλύτερη ακρίβεια. Επιπλέον, η απάντηση αυτή δεν εξαρτάται από λεπτομέρειες του υλικού του υπολογιστή και επομένως παραμένει ίδια ανεξαρτήτως υπολογιστή, λειτουργικού συστήματος ή κατάστασης του συστήματος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Για αυτό ακριβώς το λόγο εισάγουμε την έννοια των ασυμπτωτικών εκτιμήσεων που περιγράφει τις συναρτήσεις προσεγγιστικά. Χρησιμοποιούμε 5 σύμβολα για ασυμπτωτικές εκτιμήσεις:

$$\mathrm{O} \qquad \Theta \qquad \Omega \qquad \mathrm{o} \qquad \omega$$

Εμείς θα εστιάσουμε μόνο στο πρώτο σύμβολο O. Δοθέντων δύο συναρτήσεων $f, g : \Re \rightarrow \Re$ λέμε ότι $f(x) = O(g(x))$ αν υπάρχουν σταθερές x_0 και $c > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| \leq cg(x)$ για κάθε $x \geq x_0$. Με φυσική γλώσσα αυτό που θέλουμε να πούμε είναι ότι η g είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την f μη λαμβάνοντας υπόψη τις σταθερές - ή ότι ο ρυθμός αύξησης της g είναι μαγαλύτερος ή ίσος από αυτόν της f. Επίσης λέμε ότι η f είναι *τάξη μεγέθους το πολύ* g. Στο Σχήμα 4 το αναπαριστούμε με γραφικό τρόπο.



Σχήμα 4: $f(x) = O(g(x))$

Για παράδειγμα: $5x + 100 = O(x)$. Αυτό ισχύει αφού το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι το πολύ 5 φορές μεγαλύτερο από το δεξιό. Βέβαια για μικρές τιμές του x η σταθερά είναι πολύ μεγαλύτερη, αλλά ο ορισμός του O την εξαλείφει με έξυπνο τρόπο.

Ας δούμε αυτό το παράδειγμα πιο αναλυτικά:

Παράδειγμα 4 $5x + 100 = O(x)$

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές x_0 και $c > 0$ έτσι ώστε $|5x + 100| \leq cx$ για κάθε $x \geq x_0$. Έστω ότι $c = 10$ και $x_0 = 20$. Τότε για κάθε $x \geq 20$ ισχύει:

$$5x + 100 \leq 5x + 5x = 10x$$

∎

Παράδειγμα 5 $x = O(x^2)$

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές x_0 και $c > 0$ έτσι ώστε $x \leq cx^2$ για κάθε $x \geq x_0$. Έστω ότι $c = 1$ και $x_0 = 2$. Τότε για κάθε $x \geq$ ισχύει:

$$x \leq x \cdot x = x^2$$

∎

Θα πρέπει βέβαια να είμαστε προσεκτικοί στη χρήση του συμβολισμού O. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει το λόγο:

Παράδειγμα 6 $4^x \neq O(2^x)$

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε δια της ατόπου απαγωγής. Έστω ότι υπάρχουν σταθερές x_0 και $c > 0$ έτσι ώστε $4^x \leq c2^x$ για κάθε $x \geq x_0$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με 2^x παίρνουμε:

$$2^x \leq c$$

για κάθε $x \geq x_0$.

Όμως αυτό δεν ισχύει όταν $x = \max\{x_0, 1 + \log c\}$. Επομένως άτοπο και άρα $4^x \neq O(2^x)$. ■

Ενώ η ασυμπτωτικές εκτιμήσεις είναι πολύ χρήσιμες για την απλοποίηση των τύπων, μερικές φορές είναι παραπλανητικές. Για παράδειγμα, υπάρχουν έξυπνοι αλγόριθμοι για πολλαπλασιασμό πινάκων που είναι ασυμπτωτικά πιο γρήγοροι σε σχέση με τον απλό αλγόριθμο. Ο καλύτερος από αυτούς απαιτεί $O(n^{2.376})$ βήματα για να εκτελεστεί. Ενώ όμως θεωρητικώς είναι ενδιαφέρον αλγόριθμος, πρακτικά είναι άχρηστος αφού οι σταθερές που κρύβονται στο O είναι τεράστιες.

Βιβλιογραφία

[1] T.H. Cormen, C.E. Leiserson and R.L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* (1st edition) MIT Press. 1990.

[2] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley. 1988.

[3] http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-042JMathematics-for-Computer-ScienceFall2002/CourseHome/index.htm. Περιέχει εξαιρετικό υλικό για μαθηματικά στην επιστήμη των υπολογιστών.