<u>Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας</u>

<u>Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλεύεστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

<u>Ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε <u>ως δικιά σας</u>
- <u>επιτρέψετε συνειδητά</u> σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- <u>αντιγράψετε</u> υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- <u>δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε</u> και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2024-2025 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε Tex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 30/11/2024

(Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι **.pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες ή φωτογραφίες από κινητό**. Στην 1η σελίδα θα πρέπει να γράφετε ***το όνομά σας και το ΑΕΜ*** σας)

Άσκηση 1

Έστω ότι έχετε χάσει τα γυαλιά σας και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

1. *«Αν τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας, τότε τα είδα την ώρα του πρωινού».*
2. *«Αν δεν διάβαζα την εφημερίδα στο καθιστικό, τότε θα πρέπει να τη διάβαζα στην κουζίνα».*
3. *«Αν διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό, τότε τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ».*
4. *«Δεν είδα τα γυαλιά μου κατά τη διάρκεια του πρωινού».*
5. *«Αν διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι, τότε άφησα τα γυαλιά μου στο κομοδίνο».*
6. *«Αν διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα, τότε τα γυαλιά μου είναι στο τραπέζι της κουζίνας».*

Α) Να εκφράσετε τους παραπάνω συλλογισμούς με λογικές προτάσεις χρησιμοποιώντας τις παρακάτω προτασιακές μεταβλητές:

a: «*τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας*»
b: «*είδα τα γυαλιά την ώρα του πρωινού*»
c: «*διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό*»
d: «*διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα*»
e: «*τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ*»
f: «*διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι*»
g: «*τα γυαλιά είναι στο κομοδίνο*»

Β) Βρείτε τελικά πού είναι τα γυαλιά. Δώστε τυπική απόδειξη χρησιμοποιώντας τις λογικές προτάσεις από το ερώτημα (Α) καθώς και γνωστούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων.

Άσκηση 2

Έστω a και b ακέραιοι. Να δείξετε ότι αν $a^2 + b^2$ είναι άρτιος τότε είτε οι a και b είναι άρτιοι είτε οι a και b είναι περιττοί με δύο τρόπους: α) Έμμεση απόδειξη και β) Αντίφαση.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή την παρακάτω ισότητα:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

<u>Άσκηση 4</u>

[**Blocks world**] Το παρόν ερώτημα αφορά σε ένα κλασσικό παράδειγμα εφαρμογής της *Λογικής* στην *Τεχνητή Νοημοσύνη*. Η ιδέα είναι πως πάνω σε ένα τραπέζι υπάρχουν τουβλάκια (blocks) τοποθετημένα σε κάθετους σωρούς (towers), το ένα τουβλάκι πάνω σε κάποιο άλλο. Ένα robot που κινείται στο χώρο, πρέπει ανά πάσα στιγμή να γνωρίζει ακριβώς τη διευθέτηση των blocks, ώστε να μπορεί να κάνει προγραμματισμό (planning) των ενεργειών που χρειάζονται ώστε π.χ. να μετακινήσει το block **c**, που βρίσκεται εκείνη τη στιγμή κάτω από δύο άλλα, χωρίς να τα κάνει όλα άνω-κάτω στο τραπέζι.

Για την αναπαράσταση (μίας απλής εκδοχής) του προβλήματος, θα χρησιμοποιήσουμε μία πρωτοβάθμια λογική γλώσσα. Θα περιέχει σταθερές **a**, **b**, **c**, ... (για τα blocks), και το κατηγόρημα *above*(*x*,*y*), με την ερμηνεία πως το block *y* υπέρκειται του block *x*, σε κάποιο σωρό. Για παράδειγμα, αν έχουμε τους παρακάτω δύο σωρούς στο τραπέζι:

θα ισχύει *above(a,c), above(a,e), above(c,e)* και *above(d,b)* (αλλά όχι *above(c,a)* ή *above(d,a),* κλπ).

Να γράψετε στη γλώσσα του **Blocks world:**

1. Λογικές προτάσεις που να ορίζουν τη σχέση *directly-on*(*x*,*y*) (με ερμηνεία πως το block *y* είναι ακριβώς πάνω στο *x*), *on-table*(*x*) (με ερμηνεία πως το block *x* ακουμπά στο τραπέζι), *clear*(*x*) (με ερμηνεία πως το block *x* είναι το τελευταίο πάνω στο σωρό) και *in-the-same-tower*(*x*,*y*) (με ερμηνεία πως τα block *x* και *y* ανήκουν στον ίδιο πύργο).

2. Λογικές προτάσεις που να δηλώνουν πως
   - Έχουμε τουλάχιστον δύο σωρούς (towers) στο τραπέζι
   - Το block **a**, ανήκει σε διαφορετικό σωρό από τα **b**, **c**.
   - Αν δύο blocks ανήκουν στον ίδιο σωρό, τότε κάποιο υπέρκειται του άλλου
   - Αν δύο blocks ανήκουν σε διαφορετικό σωρό, δεν σχετίζονται

3. Τι δηλώνει ο τύπος $\forall x[on-table(x) \vee \exists y(on-table(y) \wedge above(y,x))]$;

Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να χρησιμοποιείτε ήδη ορισμένα από εσάς κατηγορήματα για να εκφράσετε τα υπόλοιπα που ζητούνται.

<u>Ενδεικτικές Λύσεις</u>

<u>Άσκηση 1</u>

Α) Οι 6 προτάσεις που δίδονται γράφονται με βάση τις προτασιακές μεταβλητές μας ως εξής:

1. $a \rightarrow b$
2. $\neg c \rightarrow d$
3. $c \rightarrow e$
4. $\neg b$
5. $f \rightarrow g$
6. $d \rightarrow a$

Β) Αντλούμε απαγωγικά τα συμπεράσματά μας από το αφετηριακό δεδομένο 4. $\neg b$, όπου η αλυσίδα των σχετικών ισχυρισμών είναι η ακόλουθη:

7.	$\neg a$	modus tollens από 1. και 4.
8.	$\neg d$	modus tollens από 6. και 7.
9.	$\neg\neg c$	modus tollens από 2. και 8.
10.	$\neg\neg c \rightarrow c$	τ.θ. διπλής άρνησης.
11.	c	modus ponens από 9. και 10.
12.	e	modus ponens από 11. και 3.

Αφού οι υποθέσεις μας είναι ΑΛΗΘΕΙΣ, και από αυτές αποδείξαμε το e, σημαίνει ότι «*τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ*».

<u>Άσκηση 2</u>

α) Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι το εξής: *Να δείξετε ότι αν ο a είναι άρτιος και ο b είναι περιττός ή αντίστροφα τότε ο $a^2 + b^2$ είναι περιττός.*

Χωρίς βλάβη γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι ο a είναι άρτιος και ο b είναι περιττός. Αφού a άρτιος σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε $a = 2k.$ Επίσης, αφού ο b περιττός σημαίνει ότι $b = 2m + 1$ για ακέραιο $m.$

Άρα:

$$a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 2(2k^2 + 2m^2 + 2m) + 1$$

το οποίο σημαίνει ότι ο $a^2 + b^2$ είναι περιττός. Η περίπτωση ο a να είναι περιττός και ο b άρτιος είναι συμμετρική. Άρα το θεώρημα αποδείχτηκε.

β) Έστω ότι το θεώρημα δεν ισχύει (είναι ψευδές). Άρα θα θεωρήσουμε ως αληθή την εξής πρόταση:

Ο $a^2 + b^2$ είναι άρτιος και ο a είναι άρτιος και ο b είναι περιττός ή αντίστροφα.

Χωρίς βλάβη γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι ο a είναι άρτιος και ο b είναι περιττός. Αφού a άρτιος σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε $a = 2k.$ Επίσης αφού ο b περιττός σημαίνει ότι $b = 2m + 1$ για ακέραιο $m.$

Άρα:

$$a^2 + b^2 = (2k)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 2(2k^2 + 2m^2 + 2m) + 1$$

το οποίο σημαίνει ότι ο $a^2 + b^2$ είναι περιττός. Άτοπο αφού έχουμε θεωρήσει ότι ο $a^2 + b^2$ είναι άρτιος. Η περίπτωση ο a να είναι περιττός και ο b άρτιος είναι συμμετρική. Άρα το θεώρημα αποδείχτηκε. Προσέξτε την ομοιότητα στις δύο αποδείξεις.

<u>Άσκηση 3</u>

Ορίζω το εξής κατηγόρημα με τομέα αναφοράς όλους τους ακέραιους ≥ 2:

$$P(n) = \left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\right\}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι η λογική πρόταση $\forall n\big(P(n)\big)$ είναι αληθής.

<u>Βάση επαγωγής:</u>

Το $P(2)$ είναι αληθές. Πράγματι: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right) = \left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$. Άρα η βάση της επαγωγής ισχύει.

<u>Επαγωγική υπόθεση:</u>

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq 2$ ότι $P(k)$.

<u>Επαγωγικό βήμα:</u>

Θα δείξουμε ότι ισχύει $P(k+1)$. Πράγματι:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

Από επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Άρα:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$= \frac{k+1}{2k}\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \frac{k^2+2k+1-1}{2k(k+1)} = \frac{k(k+2)}{2k(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

Άρα αποδείξαμε ότι η πρόταση $P(k+1)$ είναι αληθής. Επομένως βασισμένοι στη μαθηματική επαγωγή αποδείξαμε το ζητούμενο.

<u>Άσκηση 4</u>

1. Ο παρακάτω ανοικτός τύπος ορίζει τη σχέση *directly-on*(*x*,*y*) (με ερμηνεία πως το block *y* είναι ακριβώς πάνω στο *x*),

$$directly-on(x,y) \equiv above(x,y) \wedge \neg\exists z[above(x,z) \wedge above(z,y)]$$

Οι ιδιότητες *on-table*(*x*) και *clear*(*x*) ορίζονται πολύ εύκολα ως

$$on-table(x) \equiv \neg\exists z(above(z,x))$$

$$clear(x) \equiv \neg\exists z(above(x,z))$$

Παρατηρήστε πως θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει κατάλληλα και το *directly-on*(*x*,*y*) αντί του *above*(*x*,*y*)

Η ιδιότητα ότι δύο μπλοκ είναι στον ίδιο σωρό ορίζεται ως:

$$in-the-same-tower(x,y) \equiv (x \approx y) \vee [on-table(x) \wedge above(x,y)] \vee$$
$$[on-table(y) \wedge above(y,x)] \vee \exists z(on-table(z) \wedge above(z,x) \wedge above(z,y))$$

2. Οι προτάσεις που δηλώνουν πως

Έχουμε τουλάχιστον δύο σωρούς στο τραπέζι: ένας απλός τρόπος είναι ο εξής

$$\exists x \exists y \left[(x \neq y) \wedge on-table(x) \wedge on-table(y) \right]$$

Το block **a**, ανήκει σε διαφορετικό σωρό από τα **b**, **c**.
Μπορούμε εύκολα να γράψουμε

$$\neg \left[in-the-same-tower(a,b) \vee in-the-same-tower(a,c) \right]$$

Αν δύο (εννοείται διαφορετικά) blocks ανήκουν στον ίδιο σωρό, τότε κάποιο υπέρκειται του άλλου

$$\forall x \forall y \left[(\neg(x \approx y) \wedge in-the-same-tower(x,y)) \rightarrow \left(above(x,y) \vee above(y,x) \right) \right]$$

Αν δύο blocks ανήκουν σε διαφορετικό σωρό, δεν σχετίζονται

$$\forall x \forall y \left[\neg in-the-same-tower(x,y) \rightarrow \neg \left(above(x,y) \vee above(y,x) \right) \right]$$

3.
Ο τύπος δηλώνει πως τίποτα δεν είναι «στον αέρα». Κάθε τουβλάκι ακουμπά είτε στο τραπέζι, είτε σε άλλο τουβλάκι μέσα σε έναν πύργο από τουβλάκια. Αποτελεί μέρος της γνώσης που πρέπει να έχει το robot, ώστε (με χρήση και άλλων αξιωμάτων) να μπορεί να συμπεράνει πως (i) για να μετακινήσει ένα τουβλάκι πρέπει να είναι ελεύθερο, (ii) μπορεί να το ακουμπήσει είτε στο τραπέζι, είτε πάνω σε ένα σωρό.

Όσοι έχετε χρόνο, μπορείτε να διαπιστώσετε στο διαδίκτυο πως το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί ένα καλό toy example για τα προβλήματα αναπαράστασης γνώσης (Knowledge Representation) και προγραμματισμού ενεργειών (Planning) στην Τεχνητή Νοημοσύνη, όπου και είναι πιθανόν να το ξανασυναντήσετε.