ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

Κερδίζει	ΠΕΤΡΑ	ΨΑΛΙΔΙ	ΧΑΡΤΙ
ΠΕΤΡΑ	Ψ	Α	Ψ
ΨΑΛΙΔΙ	Ψ	Ψ	Α
ΧΑΡΤΙ	Α	Ψ	Ψ

Η σχέση *Κερδίζει* αναπαρίσταται από το σύνολο {(Π,Ψ),(Ψ,Χ),(Χ,Π)}. (Εκεί που γίνεται αληθής δηλαδή)

Σχέση (Relation)

Σχέση (relation) *R* από το σύνολο *S* στο σύνολο *T*:

Ένα υποσύνολο του $S \times T$

$$R \subseteq S \times T \; , \; (s,t) \in R \; ,$$

το στοιχείο *s* ***σχετίζεται με το*** στοιχείο *t*

$$sRt$$

Αν $S = T$, οπότε $R \subseteq S^2$: Σχέση στο σύνολο *S*

Πίνακας Σχέσης

R σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα

Μητρώο της σχέσης: ορθογώνιο μητρώο με στοιχεία:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad s_i R t_j,\ (s_i, t_j) \in R \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$R = \{(s_1, t_2), (s_2, t_1), (s_2, t_2), (s_2, t_5), (s_4, t_1), (s_4, t_4), (s_4, t_5)\} \subseteq S \times T \text{ .}$$

Μητρώο της σχέσης:

$$\begin{array}{cc|ccccc} & & & & T & & \\ & R & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline & s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S & s_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & s_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Παράδειγμα (Διάταξη < και ≤)

$$n < m \iff m - n \in \mathbf{N}$$

$$< \;\; = \{(n,m) : n, m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

$$\leq \;\; = \{(n,m) : n, m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

(α) $n \leq n$ *ανακλαστική*

(β) $n \leq m\,,\; m \leq n \;\Rightarrow\; n = m$ *αντισυμμετρική*

(γ) $n \leq m\,,\;\; m \leq p \Rightarrow\; n \leq p$ *μεταβατική*

Ανακλαστικότητα

R σχέση στο σύνολο S

Ανακλαστική (reflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \in R$

Ισοδύναμα: xRx.

Μη-ανακλαστική (irreflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \notin R$

Παράδειγμα

$$S = \{a, b, c\}$$

- Ανακλαστική αλλά όχι μη-ανακλαστική:

$$\mathrm{R}_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$$

- Ούτε ανακλαστική ούτε μη-ανακλαστική:

$$R_2 = \{(a,a),(b,c),(c,c)\}$$

- Μη-ανακλαστική:

$$R_3 = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$$

Συμμετρικότητα

R σχέση στο σύνολο S.

Σχέση ***συμμετρική*** (symmetric):

Η παρουσία του (x, y) στο R συνεπάγεται και την παρουσία του (y, x) στο R, για κάθε $x, y \in \mathrm{R}$.

$$(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \in R \text{ ή } xRy \Rightarrow yRx$$

Αντισυμμετρικότητα

Σχέση R ***αντισυμμετρική* (antisymmetric)**:

Η ταυτόχρονη παρουσία των (x, y) και (y, x) στο R, συνεπάγεται την ισότητα των x και y για κάθε $x, y \in R$.

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

$$\text{ή} \quad xRy \text{ και } yRx \Rightarrow x = y$$

Παραδείγματα

$S=\{a,b,c\}$

Σχέσεις:

- $R4=\{(a,a),(b,c),(c,b)\}$: συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική
- $R5=\{(b,a),(a,c),(c,b)\}$: αντισυμμετρική
  όχι συμμετρική
- $R6=\{(a,a),(c,c)\}$: συμμετρική
  αντισυμμετρική
- $R7=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$: όχι συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική

Μεταβατικότητα

R σχέση στο σύνολο S

Σχέση ***μεταβατική* (transitive)**:

Η ταυτόχρονη παρουσία των (x, y) και (y, z) στο R συνεπάγεται την παρουσία του (x, z) στο R για κάθε $x, y, z \in R$.

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

$$xRy \text{ και } yRz \Rightarrow xRz$$

Παράδειγμα – 1

$$S = \{a, b, c\}$$

$$R_8 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c)\}$$

- Μεταβατική σχέση
- Από το μητρώο της σχέσης

$$r_{ij} = r_{jk} = 1 \Rightarrow r_{ik} = 1$$

Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	1	1	0	1

Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

- Ανακλαστική
  - ΝΑΙ
- Συμμετρική
  - ΝΑΙ
- Μεταβατική
  - ΟΧΙ

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	1	1	0	1

$r_{24} = 1, r_{41} = 1$

$r_{21} = 0$

Παραδείγματα

Ανακλαστική
Συμμετρική
αΝτισυμμετρική
Μεταβατική

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$ **Α Ν Μ**

$$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$ **Ν Μ**

$$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ή } a = -b\}$$ **Α Σ Μ**

$$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$ **Α Σ Ν Μ**

$$R_5 = \{(a,b) \mid a = b+1\}$$ **Ν**

$$R_6 = \{(a,b) \mid a+b \leq 3\}$$ **Σ**

Συνάρτηση

Η σχέση $f \subseteq S \times T$ ονομάζεται ***συνάρτηση*** (function):

- Για κάθε στοιχείο $s \in S$ υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο $t \in T$ έτσι ώστε $(s,t) \in f$

Στα διατεταγμένα ζεύγη μιας συνάρτησης <u>το κάθε</u> στοιχείο του συνόλου S εμφανίζεται <u>ακριβώς μία μόνο φορά</u>

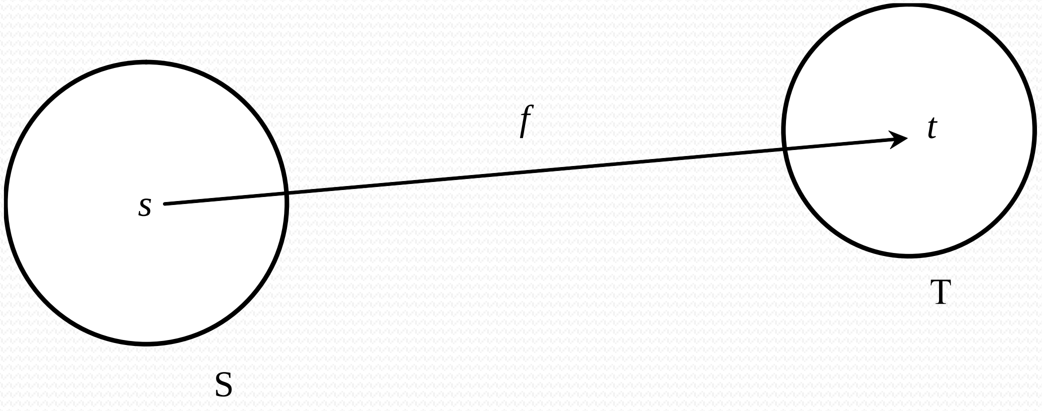
Συμβολισμός

$$f : S \to T\,, \qquad f(s) = t$$

t ***εικόνα*** (image) του στοιχείου s κάτω από τη συνάρτηση *f*.

S ***πεδίο ορισμού*** (domain)

T ***πεδίο τιμών*** (range)

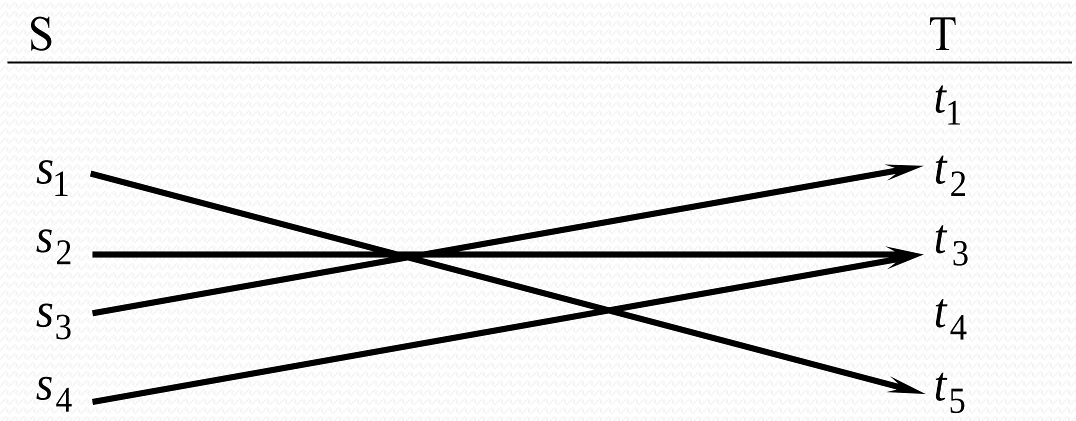


Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$f = \{(s_1, t_5), (s_2, t_3), (s_3, t_2), (s_4, t_3)\} \subseteq S \times T$$



Ορισμοί

Συνάρτηση ***επί*** (onto):

- Για κάθε $t \in T$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $s \in S$ έτσι ώστε $f(s) = t$

Συνάρτηση ***ένα προς ένα*** (one to one):

- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- δύο οποιαδήποτε στοιχεία του πεδίου ορισμού δεν έχουν την ίδια εικόνα

Αν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι πεπερασμένα σύνολα με τον ίδιο ακριβώς αριθμό στοιχείων, οι έννοιες "επί" και "ένα προς ένα" ταυτίζονται

Ταυτοτική Συνάρτηση

I_A ***ταυτοτική συνάρτηση*** στο σύνολο A:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(a) = a$$

για κάθε

$$a \in A$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ένα προς ένα και επί

Σύνθεση Σχέσεων

Έστω R σχέση από A σε B και έστω S σχέση από B σε C. Η ***σύνθεση*** των R και S ($S \circ R$), αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a,c), $a \in A$, $c \in \mathrm{C}$, για τα οποία υπάρχει b έτσι ώστε $(a,b) \in R$ και $(b,c) \in S$.

Παράδειγμα: A={1,2,3}, B={1,2,3,4} και C={0,1,2}

$R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$

$S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

$S \circ R =\{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$

Σύνθεση Συναρτήσεων

Συναρτήσεις

$$f: S \rightarrow T \text{ και } g: T \rightarrow U$$

Σύνθεση (composition): Μια νέα συνάρτηση

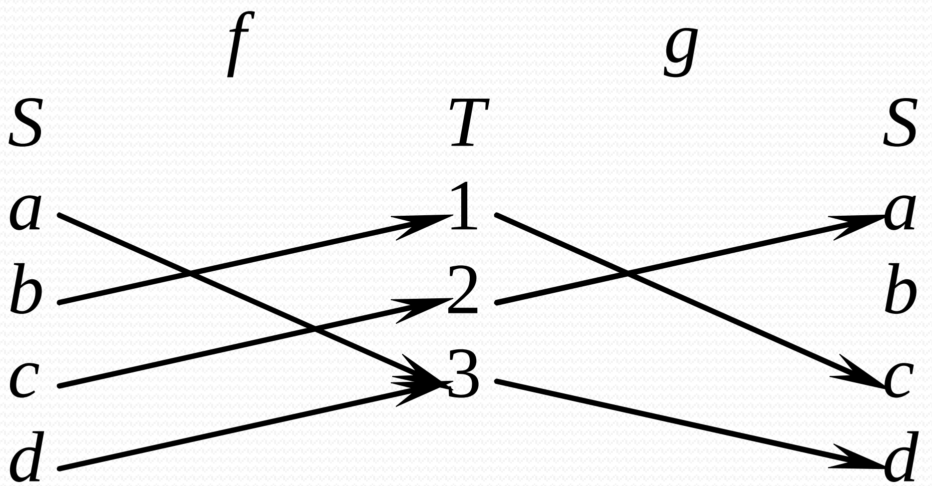
$g \circ f : S \rightarrow U$ για την οποία ισχύει:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in S$$

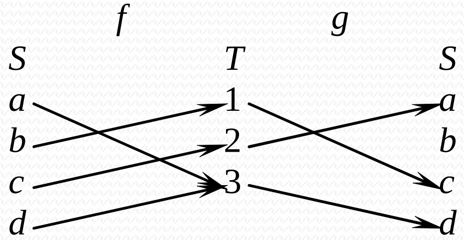
Παράδειγμα

$$\boxed{f : S \to T}$$

$$\boxed{g : T \to S}$$



Παράδειγμα – Συνέχεια

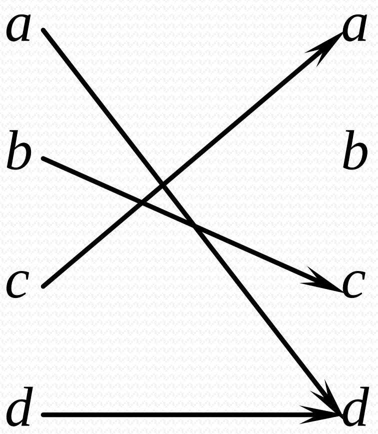


$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3) = d$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = c$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = a$$

$$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(3) = d$$



Αντίστροφη Σχέση

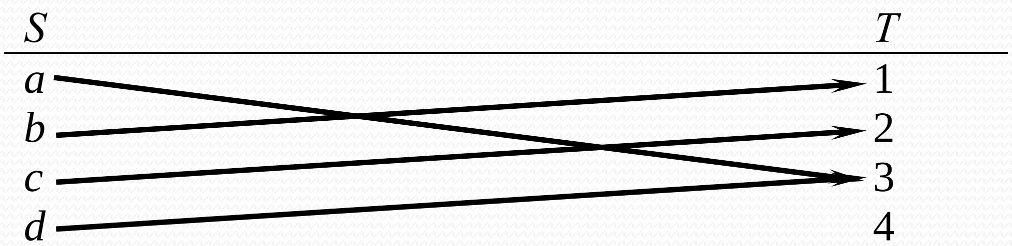
R σχέση από το σύνολο S στο σύνολο T

Αντίστροφη (inverse) σχέση:

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Αν R συμμετρική τότε R^{-1}=?

Η R και R^{-1} είναι συναρτήσεις;



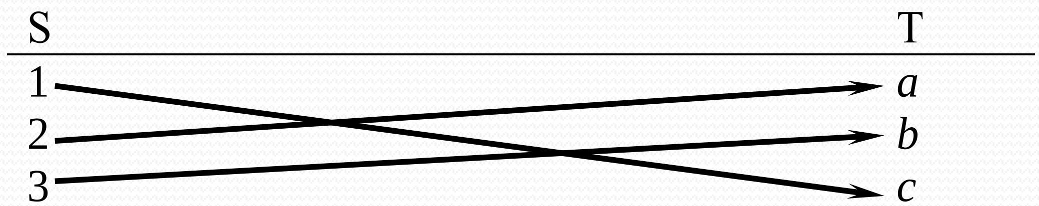
$R = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$

$$R^{-1} = \{(3,a),(1,b),(2,c),(3,d)\}$$

Παρόλο που η R είναι συνάρτηση, η R^{-1} δεν είναι συνάρτηση
(το στοιχείο 4 του συνόλου T δεν εμφανίζεται σε κανένα ζεύγος αλλά και το στοιχείο 3 εμφανίζεται σε δύο ζεύγη)

Η *R* και *R*$^{-1}$ είναι συναρτήσεις;

Σχέση *R*



$$R = \{(1,c),(2,a),(3,b)\}$$

$$R^{-1} = \{(c,1),(a,2),(b,3)\}.$$

Και οι δύο είναι συναρτήσεις.

Αντίστροφη Συνάρτησης

Η αντίστροφη σχέση μιας συνάρτησης f είναι και αυτή συνάρτηση αν και μόνο αν η f είναι ένα προς ένα και επί. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η ***αντίστροφη συνάρτηση*** που συμβολίζεται με f^{-1}.

Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x$

Σχέση Ισοδυναμίας

Θεωρούμε μία σχέση R στο σύνολο S. Η R είναι ***σχέση ισοδυναμίας*** (equivalence relation) ($\sim$) αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(α) $a \sim a$ (ανακλαστική)

(β) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (συμμετρική)

(γ) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (μεταβατική)

για κάθε $a, b, c \in S$

Παράδειγμα – 1

- Σχέση ~ στο Z ($n \in Z$, $n>1$):

$$a \sim b \iff a - b = kn, \ \ k \in Z$$

ή ισοδύναμα

$$a \sim b \iff a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ n)$$

- Δηλαδή: ο ακέραιος a σχετίζεται με τον ακέραιο b αν και μόνο αν η διαφορά τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n ή αλλιώς αν το b είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια n

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

Ορισμός: Μία συνάρτηση κατακερματισμού h αναθέτει μία θέση μνήμης $h(k)$ στην εγγραφή που έχει το k ως κλειδί.

- Μία κοινή συνάρτηση είναι η $h(k) = k \textbf{ mod } m$, όπου m είναι το πλήθος των θέσεων μνήμης.

Παράδειγμα: Έστω $h(k) = k \textbf{ mod } 111$. Αυτή η συνάρτηση αναθέτει τις εγγραφές των πελατών με ΑΦΜ ως κλειδιά, σε θέσεις μνήμης με τον εξής τρόπο:

h(064212848) = 064212848 **mod** 111 = 14

h(037149212) = 037149212 **mod** 111 = 65

h(107405723) = 107405723 **mod** 111 = 14, αλλά αφού η θέση 14 είναι ήδη πιασμένη, η εγγραφή θα ανατεθεί στην επόμενη διαθέσιμη θέση μνήμης, δηλαδή την 15.

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

- Οι συναρτήσεις κατακερματισμού δεν είναι 1-προς-1, αφού ο τομέας αναφοράς των κλειδιών είναι μεγαλύτερος από το πλήθος των θέσεων μνήμης. Όταν περισσότερα από ένα κλειδιά ανατίθενται στην ίδια θέση μνήμης τότε έχουμε σύγκρουση. Στο προηγούμενο παράδειγμα λύσαμε τη σύγκρουση αναθέτοντας το κλειδί στην πρώτη διαθέσιμη θέση.
- Για την επίλυση μίας σύγκρουσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία *συνάρτηση γραμμικής ανίχνευσης*: $h(k,i) = (h(k) + i) \textbf{ mod } m$, όπου το i παίρνει τιμές από το 0 μέχρι το $m-1$.
- Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για επίλυση συγκρούσεων αλλά περισσότερα στο μάθημα «*Δομές Δεδομένων*»

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

- Οι *ψευδοτυχαίοι αριθμοί* δεν είναι πραγματικά τυχαίοι αφού παράγονται με συστηματικές μεθόδους.
- Η *γραμμική αναλογική μέθοδος* χρησιμοποιείται συχνά για την παραγωγή τέτοιων αριθμών.
- Απαιτούνται 4 ακέραιοι: ο συντελεστής m, ο πολλαπλασιαστής a, η αύξηση c, και ο σπόρος x_0, όπου $2 \leq a < m, 0 \leq c < m, 0 \leq x_0 < m$.
- Παράγουμε μία ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών $\{x_n\}, 0 \leq x_n < m$ χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξής συνάρτηση:

$$\boxed{x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m}$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

Παράδειγμα: Βρείτε την ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγεται από τη γραμμική αναλογική μέθοδο όπου $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$, και $x_0 = 3$.

Λύση: Υπολογίζουμε διαδοχικά την $x_{n+1} = (7x_n + 4)\ mod\ 9, x_0 = 3$.

$x_1 = 7x_0 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot3 + 4$ **mod** $9 = 25$ **mod** $9 = 7$,
$x_2 = 7x_1 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot7 + 4$ **mod** $9 = 53$ **mod** $9 = 8$,
$x_3 = 7x_2 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot8 + 4$ **mod** $9 = 60$ **mod** $9 = 6$,
$x_4 = 7x_3 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot6 + 4$ **mod** $9 = 46$ **mod** $9 = 1$,
$x_5 = 7x_4 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot1 + 4$ **mod** $9 = 11$ **mod** $9 = 2$,
$x_6 = 7x_5 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot2 + 4$ **mod** $9 = 18$ **mod** $9 = 0$,
$x_7 = 7x_6 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot0 + 4$ **mod** $9 = 4$ **mod** $9 = 4$,
$x_8 = 7x_7 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot4 + 4$ **mod** $9 = 32$ **mod** $9 = 5$,
$x_9 = 7x_8 + 4$ **mod** $9 = 7\cdot5 + 4$ **mod** $9 = 39$ **mod** $9 = 3$.

Η παραγόμενη ακολουθία είναι η 3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,…
Η ακολουθία επαναλαμβάνεται μετά από 9 όρους.

Συνήθως, οι γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν τη γραμμική αναλογική μέθοδο με $c = 0$. Μία τέτοια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών που έχει $m=2^{31} - 1$ και $a = 7^5 = 16{,}807$, παράγει μία ακολουθία με $2^{31} - 2$ αριθμούς πριν επαναληφθεί.

Παράδειγμα – 1 (Συνέχεια)

- Σχέση ισοδυναμίας:
  - $a \sim a$ αφού $a - a = 0 \cdot n$ (ανακλαστική)
  - $a \sim b \Rightarrow a - b = \pi n \Rightarrow b - a = (-\pi)n \Rightarrow b \sim a$ (συμμετρική)
  - $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a - b = pn$ και $b - c = qn$

    $\Rightarrow a - c = (a-b) + (b-c) = (p + q)n$

    $\Rightarrow a \sim c$ (μεταβατική)

Κλάση Ισοδυναμίας

- Σχέση ισοδυναμίας ~ σε σύνολο S
- Για κάθε $a \in S$, ***κλάση ισοδυναμίας*** (equivalence class) του a:
  - Το υποσύνολο των στοιχείων του S με τα οποία το a σχετίζεται (είναι ισοδύναμα του a)
- Συμβολισμός: $[a] = \{x: a \sim x\}$
- Ισχύει:

$$\boxed{[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b}$$

Θεώρημα

Αν ~ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο S, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζονται στο S αποτελεί διαμέριση του S.

Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- n = 2: Η διαφορά διαιρείται με το 2
- Είτε και οι δύο ακέραιοι είναι άρτιοι είτε και οι δύο είναι περιττοί
- Δύο κλάσεις ισοδυναμίας (διαμέριση **Z**):
  - [0] = {..., -4, -2, 0, 2, 4,...}
  - [1] = {..., -5, -3, -1, 1, 3, 5,...}
- Ισχύει [2] = [0], [3] = [1], [5] = [1],….
- κλάση [0]: όλοι οι άρτιοι αριθμοί,
- κλάση [1]: όλοι οι περιττοί αριθμοί

Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- Για $n = 4$, έχουμε 4 κλάσεις ισοδυναμίας:

$$[0] = \{\, 0,\ 0 \pm 1 \times 4,\ 0 \pm 2 \times 4,\ 0 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots.\}$$

$$[1] = \{1,\ 1 \pm 1 \times 4,\ 1 \pm 2 \times 4,\ 1 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots.\}$$

$$[2] = \{2,\ 2 \pm 1 \times 4,\ 2 \pm 2 \times 4,\ 2 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots\}$$

$$[3] = \{3,\ 3 \pm 1 \times 4,\ 3 \pm 2 \times 4,\ 3 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -9,\ -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots\}$$

Θέμα 4ο: (1,5 Μονάδες) (29/8/2022)

Για σημεία (x,y) και (u,v) στο επίπεδο, η σχέση R έτσι ώστε (x,y) R (u,v) σημαίνει ότι $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Αποδείξτε ότι η σχέση R είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Να συζητήσετε πως αυτή η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει τα σημεία του επιπέδου στο (x,y)-επίπεδο.

Θέμα 8ο: (1,5 Μονάδες) (15/9/2017)

Έστω ότι A είναι το σύνολο των φοιτητών της Πολυτεχνικής Σχολής. Έστω η σχέση R που ορίζεται στο A ως εξής: Για κάθε x και y στο A

$$x\ R\ y \Leftrightarrow \text{ο } x \text{ είναι στο ίδιο τμήμα με τον } y$$

Να δείξετε ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας (δώστε την ιδιότητα που έχουν μιας και δεν μπορείτε να τις αναφέρετε).

Μία Ακόμα Άσκηση

Έστω ότι R_1 και R_2 είναι δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο S. Καθορίστε αν κάθε ένας από τους παρακάτω συνδυασμούς των R_1 και R_2 είναι σχέση ισοδυναμίας.

α) $R_1 \cup R_2$ και

β) $R_1 \cap R_2$ (αν είναι απαιτείται απόδειξη ενώ αν δεν είναι ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό)

γ) $\overline{R_1}$ (το συμπλήρωμα του R_1 ως προς το S^2)

Και Άλλο Θέμα…

Να δείξετε ότι η παρακάτω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας και να περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε τη σχέση P στο σύνολο $R\times R$ (το R είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών) ως εξής: για κάθε (w,x), $(y,z) \in R\times R$:

$$(w,x)\ P\ (y,z) \text{ σημαίνει ότι } w = y$$