Σχόλιο: Η σειρά προτεραιότητας των ασκήσεων που πρέπει να γίνουν είναι: 7, 6, 4, 5, 1, 3, 2

1. Να δείξετε ότι κάθε γινόμενο ακεραίων της μορφής $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται από το 3 (αφήνει υπόλοιπο 0).

Λύση:

Ορίζουμε τα εξής προτασιακά σύμβολα:

p: ο k είναι ακέραιος

q: το γινόμενο $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται τέλεια από το 3 (αφήνει υπόλοιπο 0)

Άρα η δήλωση της εκφώνησης εκφράζεται από την εξής λογική πρόταση:

$$p \rightarrow q$$

Η p όμως μπορεί να εκφραστεί ως εξής: ο k είναι ακέραιος έτσι ώστε «όταν διαιρείται με το 3 να αφήνει υπόλοιπο 0» (πρόταση p_1) ή «όταν διαιρείται με το 3 να αφήνει υπόλοιπο 1» (πρόταση p_2) ή «όταν διαιρείται με το 3 να αφήνει υπόλοιπο 2» (πρόταση p_3). Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι (αφού για κάθε ακέραιο μία και μόνο μία πρόταση μπορεί να ισχύει):

$$p = p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

Άρα

$$p \rightarrow q \equiv (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge (p_3 \rightarrow q)$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν ο k διαιρείται τέλεια από το 3 τότε ο $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται τέλεια από το 3 (και το ίδιο για τις υπόλοιπες 2 περιπτώσεις). Πράγματι:

- k διαιρείται τέλεια από το 3: άρα διαιρείται τέλεια από το 3 και οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του και άρα διαιρείται και το $k(k+1)(k+2)$
- k διαιρείται από το 3 με υπόλοιπο 1: Τότε, το k+2 διαιρείται τέλεια από το 3 και άρα και οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του διαιρείται τέλεια από το 3 και άρα διαιρείται και το $k(k+1)(k+2)$
- k διαιρείται από το 3 με υπόλοιπο 2: Τότε, το k+1 διαιρείται τέλεια από το 3 και άρα και οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του διαιρείται τέλεια από το 3 και άρα διαιρείται και το $k(k+1)(k+2)$

2. Να δειχτεί ότι το γινόμενο δύο από τους παρακάτω αριθμούς είναι μη αρνητικό. Η απόδειξη είναι εποικοδομητική ή μη-εποικοδομητική;

$$65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}, 79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}, 24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$$

Λύση:

Δεν θα υπολογίσουμε τους αριθμούς. Αν κάποιος από τους τρεις αριθμούς είναι 0 τότε οποιοδήποτε γινόμενο με το 0 είναι μη αρνητικός. Άρα μας ενδιαφέρει η περίπτωση που κανένας δεν είναι 0.

Αφού είναι τρεις οι αριθμοί, δύο εξ αυτών θα είναι αναγκαστικά ομόσημοι (αρχή περιστερώνων – αν και οι φοιτητές δεν τη γνωρίζουν ακόμα). Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο. Η απόδειξη είναι μη-εποικοδομητική μιας και δεν ξέρουμε ποιο ζεύγος είναι.

3. Να αποδειχθεί ότι αν ο *x* είναι άρρητος, τότε και ο 1/*x* είναι επίσης άρρητος.

Λύση:

Η πρόταση γράφεται ως:

$$x \text{ άρρητος} \rightarrow \frac{1}{x} \text{ άρρητος}$$

Με άμεση απόδειξη (ξεκινώντας δηλαδή από την υπόθεση δεν οδηγούμαι πουθενά). Ας προσπαθήσουμε με έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο). Θέλω να δείξω το εξής:

$$\frac{1}{x} \text{ ρητός} \rightarrow x \text{ ρητός}$$

Έστω ότι το $\frac{1}{x}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχουν ακέραιοι a, b, έτσι ώστε ο $\frac{1}{x}$ να γράφεται ως το εξής κλάσμα:

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$$

Άρα το x γράφεται ως εξής:

$$x = \frac{b}{a}$$

Άρα και ο x είναι ρητός και αποδείχτηκε το ζητούμενο. Προσοχή, το $\frac{1}{x}$ δεν μπορεί να είναι 0 και άρα $a \neq 0$.

4. (1 Μονάδα – Εξετάσεις 2022)
Θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση:

«Αν ο α δεν είναι περιττός, τότε $\alpha \leq 2$ ή ο α είναι σύνθετος αριθμός».

Να κάνετε τα εξής:

1. Ορίστε προτασιακές μεταβλητές που να αντιστοιχούν στις τρεις συνθήκες της μεταβλητής
2. Να εκφράσετε την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε ως λογική πρόταση με χρήση αυτών των μεταβλητών
3. Να εκφράσετε το αντιθετοαντίστροφο της πρότασης τόσο ως λογική πρόταση (χρησιμοποιώντας δηλαδή τα προτασιακά σύμβολα) όσο και σε φυσική γλώσσα. Το ίδιο να κάνετε και για την αντίθετη πρόταση.
4. Αποδείξτε την αλήθεια της πρότασης με δύο τρόπους: α) Με αντιθετοαντίστροφο και β) με αντίφαση

<u>Λύση:</u>

Η πρόταση είναι ισοδύναμη με «Αν ο α είναι άρτιος, τότε $\alpha \leq 2$ ή ο α είναι σύνθετος αριθμός»

1. Έστω τα εξής σύμβολα:

p: ο α είναι άρτιος

q: $\alpha \leq 2$

r: ο α είναι σύνθετος αριθμός

2.

$$p \to q \vee r$$

3.

Αντιθετοαντίστροφο:

$$\neg q \wedge \neg r \to \neg p$$

Αν $\alpha > 2$ και ο α είναι πρώτος αριθμός τότε ο α είναι περιττός.

Αντίθετη:

$$\neg(p \to q \vee r) \equiv \neg(\neg p \vee q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Ο α είναι άρτιος και $\alpha > 2$ και ο α είναι πρώτος αριθμός

4.

Αντιθετοαντίστροφο:

Αν $\alpha > 2$ και ο α είναι πρώτος αριθμός, τότε ο α είναι περιττός.

Πράγματι, όλοι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2 που είναι πρώτοι δεν μπορεί να είναι άρτιοι αφού διαιρούνται από το 2. Άρα όλοι είναι περιττοί.

Αντίφαση:

Αφού $\alpha > 2$ και ο α είναι πρώτος αριθμός σημαίνει ότι ο α είναι περιττός, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο α είναι άρτιος.

5. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε ο $4k + 3$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

Έστω το κατηγόρημα P(x): «ο x είναι τέλειο τετράγωνο». Με τομέα αναφοράς όλους τους ακέραιους η παραπάνω πρόταση γίνεται:

$$\forall k\big(\neg P(4k+3)\big)$$

Θα το αποδείξουμε με αντίφαση. Άρα θα θεωρήσουμε ότι ισχύει η αντίθετη της παραπάνω πρότασης και θα φτάσουμε σε αντίφαση. Πράγματι:

$$\neg\Big(\forall k\big(\neg P(4k+3)\big)\Big) \equiv \exists k P(4k+3)$$

Είναι λοιπόν σαν να λέμε ότι έστω ότι υπάρχει κάποιος ακέραιος k ώστε το 4k+3 να είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε, υπάρχει ακέραιος m ώστε να ισχύει:

$$4k + 3 = m^2$$

Ο αριθμός 4k+3 είναι όμως περιττός αριθμός αφού γράφεται στη μορφή 2(2k+1)+1 όπου (2k+1) είναι ακέραιος αφού το k είναι ακέραιος. Άρα υπάρχει ακέραιος n ώστε m=2n+1. Άρα:

$$4k + 3 = (2n + 1)^2 \Rightarrow 4k + 3 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow$$

$$4n^2 + 4n - 4k = 2 \Rightarrow 2(2n^2 + 2n - 2k) = 2 \Rightarrow 2(n^2 + n - k) = 1$$

Η τελευταία ισότητα όμως είναι αντίφαση. Ο λόγος είναι ότι το άθροισμα $n^2 + n - k$ είναι ακέραιος αριθμός (αφού τα n, k είναι ακέραιοι) αλλά η παραπάνω ισότητα απαιτεί αυτό το άθροισμα να είναι ½ που προφανώς δεν είναι ακέραιος. Άρα αντίφαση και αποδείχτηκε η αλήθεια της αρχικής πρότασης.

6. Να δείξετε ότι οι εξής δηλώσεις είναι ισοδύναμες: (1) $n - 5$ είναι περιττός, (2) $3n + 2$ είναι άρτιος, (3) $n^2 - 1$ είναι περιττός.

Λύση:

$(\mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{2})$ Θα δείξουμε ότι αν ο $n - 5$ είναι περιττός τότε ο $3n + 2$ είναι άρτιος.

Άμεση απόδειξη: υπάρχει ακέραιος k ώστε n – 5 = 2k+1. Άρα n=2k+6. Άρα:

3n+2=3(2k+6)+2=6k+20=2(3k+10)

Άρα ο 3n+2 είναι άρτιος. Αποδείχτηκε το ζητούμενο.

$(\mathbf{2}) \rightarrow (\mathbf{3})$ Θα δείξουμε ότι αν ο $3n + 2$ είναι άρτιος τότε ο $n^2 - 1$ είναι περιττός.

Θα κάνουμε άμεση απόδειξη. Αφού ο $3n + 2$ είναι άρτιος υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε: 3n+2=2k. Άρα, 3n=2k-2=2(k-1). Δηλαδή και ο 3n είναι άρτιος. Επειδή ο n όμως πολλαπλασιάζεται από τον περιττό 3 θα πρέπει αναγκαστικά να είναι και ο n άρτιος. Άρα υπάρχει ακέραιος m έτσι ώστε n=2m.

Άρα: $n^2 – 1= (2m)^2 – 1=2(2m^2) – 1$ το οποίο σημαίνει ότι το $n^2 – 1$ είναι περιττός. Αποδείχτηκε.

$(\mathbf{3}) \rightarrow (\mathbf{1})$ Θα δείξουμε ότι αν ο $n^2 - 1$ είναι περιττός τότε ο $n - 5$ είναι περιττός

Έμμεση απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αν ο $n - 5$ είναι άρτιος τότε ο $n^2 – 1$ είναι άρτιος.

Αφού $n - 5$ είναι άρτιος υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε n – 5=2k και άρα n=2k-5

Άρα:

$$n^2 - 1 = (2k - 5)^2 - 1 = 4k^2 + 25 - 20k - 1 = 2(2k^2 - 10k + 12)$$

και αφού το $(2k^2 - 10k + 12)$ είναι ακέραιος συνεπάγεται ότι το $n^2 - 1$ είναι άρτιος. Αποδείχτηκε.

Από υποθετικός συλλογισμό (μεταβατικότητα της συνεπαγωγής) μπορούμε να βγάλουμε και τα υπόλοιπα συμπεράσματα απευθείας χωρίς απόδειξη:

$$(\mathbf{1}) \to (\mathbf{2}) \to (\mathbf{3}) \to (\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2}) \to (\mathbf{1})$$

$$(\mathbf{1}) \to (\mathbf{2}) \to (\mathbf{3}) \to (\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{3}) \to (\mathbf{2})$$

$$(\mathbf{1}) \to (\mathbf{2}) \to (\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{1}) \to (\mathbf{3})$$

7. Να αποδείξετε με επαγωγή την παρακάτω ταυτολογία (απόδειξη με περιπτώσεις):

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q) \leftrightarrow (p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$$

Λύση:

Έστω η πρόταση $P(n) = ((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q) \leftrightarrow (p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$

Βάση επαγωγής:n=1: η P(1) ισχύει. Πράγματι:

$$(p_1 \to q) \leftrightarrow (p_1 \to q)$$

Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(k-1)$. Δηλαδή είναι αληθές ότι:

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{k-1}) \to q\big) \leftrightarrow \big((p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \to q)\big)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και $P(k)$

Πράγματι έχουμε:

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{k-1} \vee p_k) \to q\big)$$

Έστω ότι $s = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{k-1}$. Τότε:

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{k-1} \vee p_k) \to q\big) \equiv \big((s \vee p_k) \to q\big) \equiv \neg(s \vee p_k) \vee q$$

$$\equiv (De\ Morgan)(\neg s \wedge \neg p_k) \vee q \equiv$$

$$\equiv (\varepsilon\pi\iota\mu\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta})(\neg s \vee q) \wedge (\neg p_k \vee q) \equiv (s \to q) \wedge (p_k \to q)$$

Αντικαθιστώντας το s έχουμε:

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{k-1}) \to q\big) \wedge (p_k \to q)$$

Από επαγωγική υπόθεση παίρνουμε τελικά:

$$\big((p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \to q)\big) \wedge (p_k \to q)$$

Αφού όλα τα βήματα που κάναμε είναι λογικές ισοδυναμίες (δεν το αποδείξαμε δηλαδή προς τη μία κατεύθυνση μόνο) ισχύει ότι:

$$P(n)=((p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q) \leftrightarrow (p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \ldots \land (p_n \to q)$$

Αποδείχτηκε.