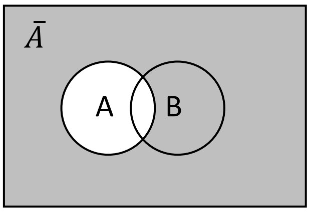
<u>Άσκηση 1:</u> Διαγράμματα Venn

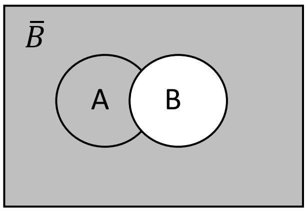
A) Να δειχτεί ότι $\bar{A}$-$\bar{B}$=B-A.

<u>Λύση:</u>

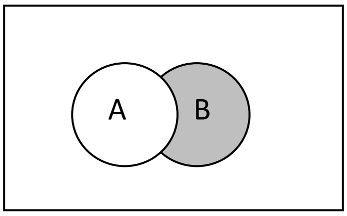
Θα το δείξουμε πρώτα αλγεβρικά και μετά με διαγράμματα Venn.

$$\bar{A}\text{-}\bar{B}=\{x : x\in\bar{A}, x \notin \bar{B}\} = \{x: x \notin A, x \in B\} = B - A$$





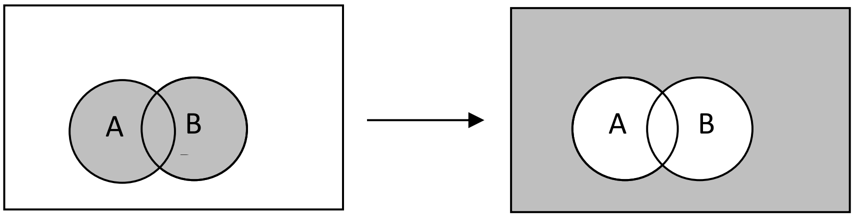
$\bar{A}$-$\bar{B}$ =



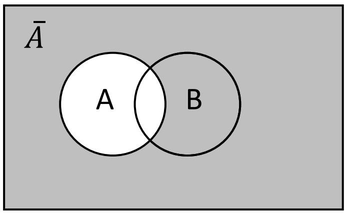
= B − A

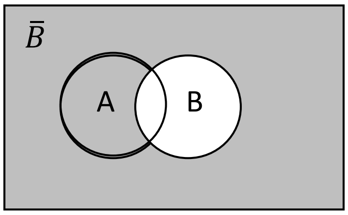
B) Να δειχτεί ότι $\overline{A \cup B}$=$\bar{A}$∩$\bar{B}$ *(*De Morgan). Θα το δείξουμε πρώτα αλγεβρικά και μετά με διαγράμματα Venn.

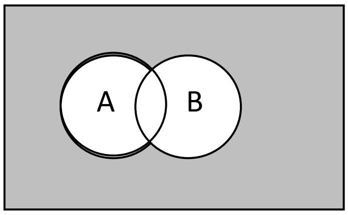
$$\overline{A \cup B}=\{x : x \notin A \cup B\} = \{x: x \notin A \;\textit{και}\; x \notin B\} = \{x: x \in \overline{A} \;\textit{και}\; x \in \overline{B}\} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$A \cup B$ $\qquad$ $\overline{A \cup B}$





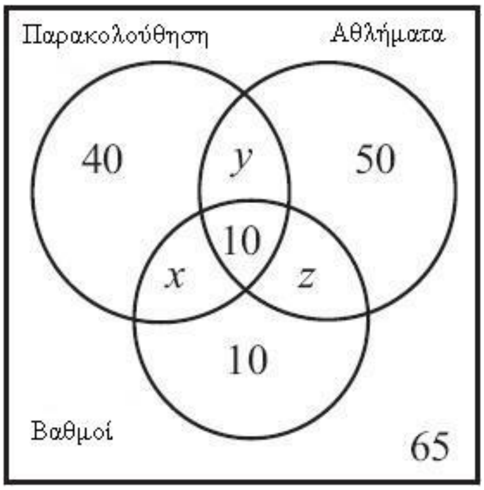


$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Άσκηση 2:

Οι μαθητές του 1ου Δημοτικού Θεσσαλονίκης λαμβάνουν κάποια διπλώματα στο τέλος της χρονιάς στην τελετή λήξης της σχολικής χρονιάς. Αυτό το χρόνο 120 μαθητές πήραν δίπλωμα παρακολούθησης μαθημάτων (δεν έκαναν ούτε μία απουσία), 180 μαθητές δίπλωμα συμμετοχής στους σχολικούς αθλητικούς αγώνες και 80 δίπλωμα αριστείας. Από αυτούς, οι 40 μαθητές που πήραν δίπλωμα παρακολούθησης δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα, οι 50 μαθητές που πήραν το δίπλωμα συμμετοχής στους αθλητικούς αγώνες δεν πήραν κανέναν άλλο δίπλωμα και οι 10 μαθητές που πήραν δίπλωμα αριστείας δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα. Επιπλέον, 10 μαθητές παίρνουν και τα τρία διπλώματα ενώ 65 μαθητές δεν παίρνουν κανένα δίπλωμα. Σχεδιάστε ένα Venn διάγραμμα και βρείτε πόσοι μαθητές είχε το σχολείο αυτή τη χρονιά.

Λύση:



Οι εξής εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$x + y + 10 + 40 = 120$

$x + z + 10 + 10 = 80$

$y + z + 10 + 50 = 180.$

Η λύση σε αυτό το σύστημα είναι $x = 5$, $y = 65$ και $z = 55$. Επομένως το συνολικό πλήθος παιδιών της σχολικής χρονιάς είναι

$$65 + 40 + 50 + 10 + 10 + 5 + 65 + 55 = 300$$

Άσκηση 3: Καρτεσιανό Γινόμενο

Να δειχτεί ότι $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

Λύση:

$$A \times (B \cup \Gamma) = \{(x, y): x \in A \; \kappa\alpha\iota \; y \in B \cup \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): x \in A \; \kappa\alpha\iota \; (y \in B \text{ ή } y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \; \kappa\alpha\iota \; y \in B) \text{ή } (x \in A \;\; \kappa\alpha\iota \; y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in A \times B \text{ ή } (x, y) \in A \times \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)\}$$

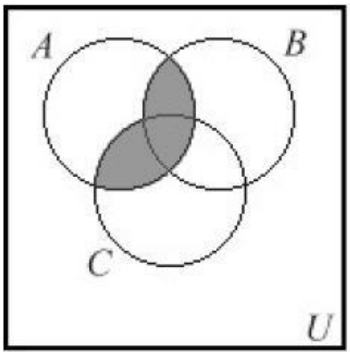
$$= (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$$

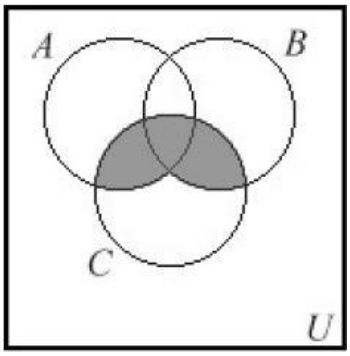
Άσκηση 4: Είναι σωστές οι παρακάτω δύο προτάσεις; Για αυτές που δεν είναι δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει (χρησιμοποιείστε είτε Venn είτε αναλυτικά).

1. $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$
2. $(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) - \mathrm{A} = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$

Λύση:

1.



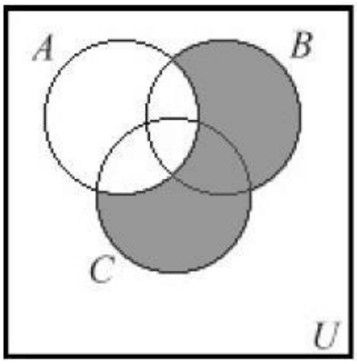


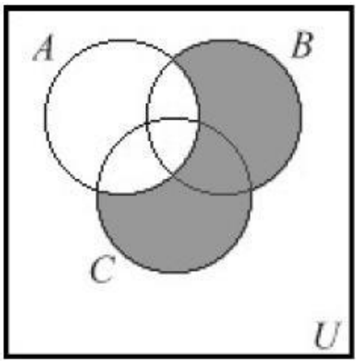
$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ $\quad$ $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$

Αντιπαράδειγμα: *A* = {1,2,3} *B* ={1,3,4} *C* = {1,2,4}

2. Αληθές και θα το δείξουμε με δύο τρόπους.

Με Venn:





$(B \cup C) - A$ $\qquad\qquad$ $(B - A) \cup (C - A)$

Αναλυτικά:

$$\{x: x \in (B \cup C) \ και \ x \notin A\}$$

$$= \{x: x \in B \text{ ή } x \in C, x \in \bar{A}\}$$

(επιμερισμός) $$= \{x: (x \in B \ και \ x \in \bar{A}) \text{ ή } (x \in \bar{A} \ και \ x \in C\}$$

$$= (B \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A})$$

$$= (B - A) \cup (C - A)$$

<u>**Άσκηση 5:**</u> Παλιό θέμα (1+1=2 μονάδες)

α) Να αποδείξετε την επόμενη ισότητα για σύνολα *A*, *B* και *C* από ένα σύμπαν *U*:

$$(A \cup B) \cap \overline{\left(\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cap C\right)} = (A \cup B) - C$$

β) Έστω *X* και *Y* σύνολα και έστω $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Έστω *A* και *B* δύο υποσύνολα του *X*. Να δείξετε ότι:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

<u>**Λύση:**</u>

α) Ισχύουν τα εξής:

$$(A \cup B) \cap \overline{\left(\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cap C\right)} = (A \cup B) \cap \left((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}\right) \ (De\ Morgan)$$

$$= (A \cup B) \cap \left(\overline{(A \cup B)} \cup \bar{C}\right) \ (De\ Morgan)$$

$$= \left((A \cup B) \cap \overline{(A \cup B)}\right) \cup \left((A \cup B) \cap \bar{C}\right) \ (επιμεριστική - προσεταιριστική)$$

$$= \emptyset \cup \left((A \cup B) \cap \bar{C}\right) \ (τομή\ συμπληρωματικών\ συνόλων)$$

$$= (A \cup B) \cap \bar{C} \ (ουδέτερο\ στοιχείο\ το\ κενό\ σύνολο\ στην\ ένωση)$$

$$= (A \cup B) - C \ (ορισμός\ διαφοράς)$$

β) Έστω αυθαίρετο $z \in f(A \cap B)$. Θα δείξουμε ότι $z \in f(A) \cap f(B)$. Αφού $z \in f(A \cap B)$ σημαίνει από τον ορισμό της f ότι υπάρχει $x \in A \cap B$ έτσι ώστε $z = f(x)$. Αφού $x \in A \cap B$ σημαίνει ότι $x \in A$ και $x \in B$. Αφού $x \in A$ και $z = f(x)$ σημαίνει ότι $z \in f(A)$. Ομοίως, $z \in f(B)$. Αφού $z \in f(A)$ και $z \in f(B)$ προκύπτει ότι $z \in f(A) \cap f(B)$. Αφού το z είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο του $f(A \cap B)$ σημαίνει ότι $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

<u>Άσκηση 6:</u> Καρτεσιανό Γινόμενο

Δίνεται $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ $B=\{\alpha,\delta\}$, όπου $|A|=3$ και $|B|=2$. Στα παρακάτω σύνολα (σε bold) να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων.

a) **|P(A)|:** $2^3=8$

b) **|P(B)|:** $2^2=4$

c) $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}|$**:** Τα A και B έχουν ένα κοινό στοιχείο (το α). Αν αθροίσουμε το πλήθος των στοιχείων τους το α θα το μετρήσουμε δύο φορές. Άρα πρέπει να το αφαιρέσουμε μία φορά και γενικά πρέπει να αφαιρέσουμε μία φορά οτιδήποτε βρίσκεται στην τομή των δύο συνόλων. Άρα:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 1 = 4$$
Πράγματι, $|A \cup B| = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

d) $|(\boldsymbol{A} \times \{\boldsymbol{\gamma}\}) \cup (\boldsymbol{B} \times \{\boldsymbol{\alpha}\})|$**:**
$$A \times \{\gamma\} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\} \to |A \times \{\gamma\}| = 3 \cdot 1 = 3$$
$$B \times \{\alpha\} = \{(\alpha,\alpha),(\delta,\alpha)\} \to |B \times \{\alpha\}| = 2 \cdot 1 = 2$$
$|(A \times \{\gamma\}) \cup (B \times \{\alpha\})| = 3 + 2 = 5$ αφού τα σύνολα που ενώνονται δεν έχουν κοινό στοιχείο.

e) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$: $= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\beta,\delta),(\gamma,\alpha),(\gamma,\delta)\}$
$$|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$$

f) $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$: $=$
$\{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma)\}$
$$|A^2| = |A| \cdot |A| = 3^2 = 9$$

g) $\boldsymbol{B^2} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$: $= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\delta,\alpha),(\delta,\delta)\}$
$$|B^2| = |B| \cdot |B| = 2^2 = 4$$