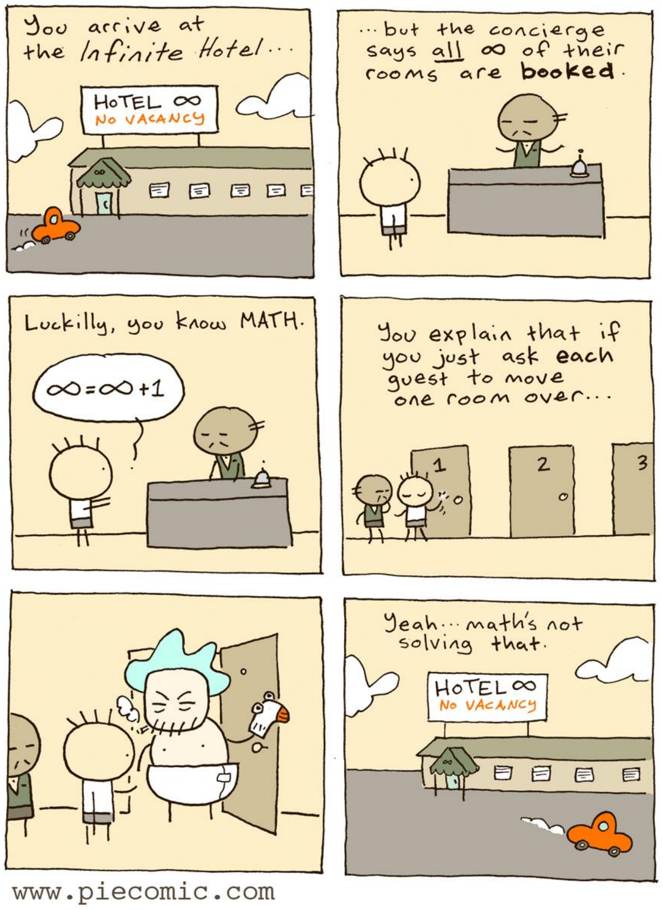
Σχεσιακή Σκέψη

Σύνολα



Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

- Ιστορία 150 χρόνων
- Καθιέρωση από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918)
  - ***Σύνολο*** *(set): Συλλογή διακεκριμένων πραγμάτων για τα οποία έχουμε μια αντίληψη ότι αποτελούν, εξαιτίας μιας κοινής ιδιότητάς τους, μια ολότητα*
  - *ή μια πολλαπλότητα που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα*
  - Τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** (elements) του συνόλου

Ο Μπαρμπερησ τησ Σεβιλλησ

- Ο κ. Τσίχλας είναι ο μόνος μπαρμπέρης (άνδρας) στην Σεβίλλη. Ξυρίζει *όλους τους* άνδρες και *μόνο αυτούς* που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
- Αν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται δεν μπορεί να ξυρίζει τον εαυτό του!
- Αν δεν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του!!

Το Παράδοξο Του Russell

Αυτό το παράδοξο στην κανονική του συνολοθεωρητική μορφή γράφεται ως εξής:

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους: $\{X\colon A,\ A$ είναι ένα σύνολο και $A \notin A\}$

- Είναι το X στο X? Με άλλα λόγια, το X περιέχεται στον εαυτό του;
- Αν το $X \notin X$, τότε το X είναι σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \in X$. Άτοπο.
- Αν $X \in X$ τότε είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \notin X$. Άτοπο.

Σύνολο και Λογική

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:
  - Για ένα στοιχείο x και ένα σύνολο A μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:
  - το x ανήκει στο A (συμβολικά $x \in A$)
  - το x δεν ανήκει στο A (συμβολικά $x \notin A$)

Υπάρχουν βέβαια και τα ***θολά σύνολα*** (fuzzy sets)

Σύνολα αριθμών

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \{n : n \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, \text{-}3, \text{-}2, \text{-}1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{n : n \text{ είναι ακέραιος}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{a / b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ και } b \neq 0\}$$

$$\mathbf{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1}\}$$

Παραδειγματα

- Εναλλακτική παράσταση του B=\{1,2\}

$$B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \Re\} = \{n: n \in \mathbf{N}, n < 3\}$$

- Το κενό σύνολο

$$\emptyset = \{x: x \neq x, x \in \mathbb{N}\}$$

Υποσυνολο

Έστω δύο σύνολα $S \neq \emptyset$ και A.

Το A ονομάζεται υποσύνολο (subset) του S αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S.

$$\boxed{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S} \leftrightarrow (a \in A) \rightarrow (a \in S)}$$

$$\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in S))$$

Ισοτητα Συνολων

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Εναλλακτικός ορισμός: τα σύνολα είναι ίσα αν το A είναι υποσύνολο του B και το B είναι υποσύνολο του A.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \leftrightarrow (\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$$

Διαταξη Συνολων

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** (proper subset) του B και συμβολίζουμε

$$A \subset B$$

Ισχύει $\emptyset \subseteq S$ και $S \subseteq S$ για κάθε σύνολο S

Παραδειγμα

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ και $\{\{\emptyset\}\}$.

Το πρώτο είναι ένα σύνολο με 0 στοιχεία

Το δεύτερο και το τρίτο είναι σύνολα με 1 στοιχείο το καθένα.

1. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
2. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$
5. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
6. $\{\emptyset\} \nsubseteq \{\{\emptyset\}\}$

Πράξεις Συνόλων - Ένωση

Η ***ένωση*** (union) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων A και B.

$$A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Πράξεις Συνόλων - Τομή

Η ***τομή*** (intersection) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B.

$$A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Δύο σύνολα A και B λέγονται ***ξένα*** όταν η τομή τους είναι το $\emptyset$.

Βασικές Ιδιότητες

Μεταθετική:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Προσεταιριστική:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Επιμεριστική:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Δυναμοσυνολο

Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου S, ονομάζεται ***δυναμοσύνολο*** (power set) του S και συμβολίζεται με $P(S)$:

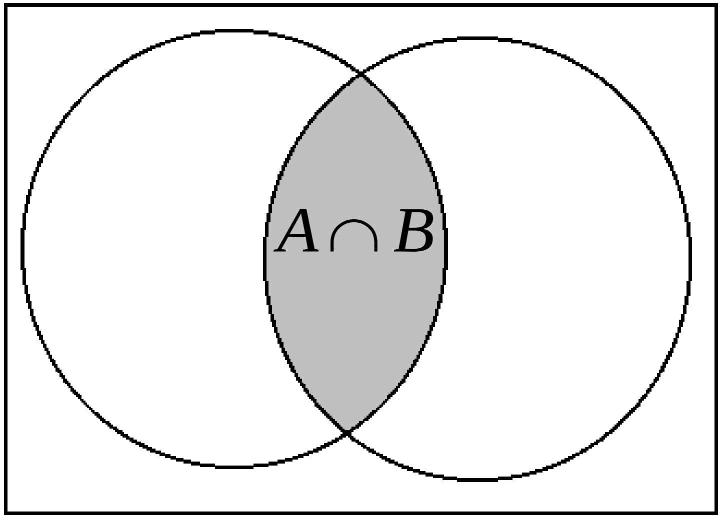
$$P(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

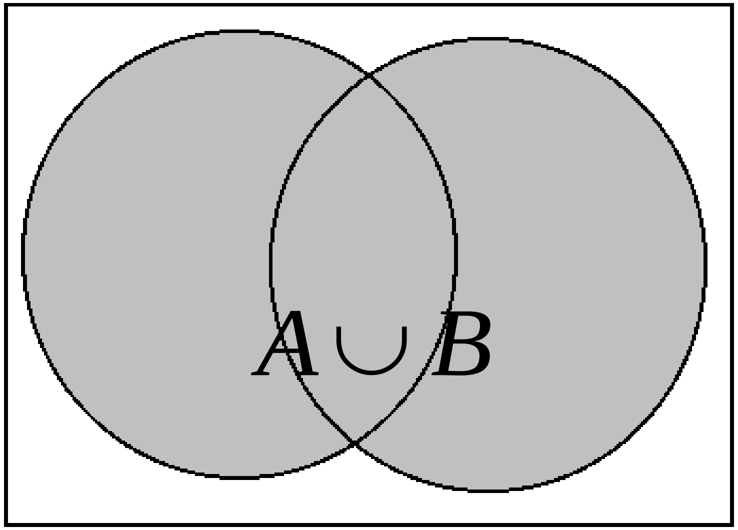
Πράξεις Συνόλων - Διαφορά

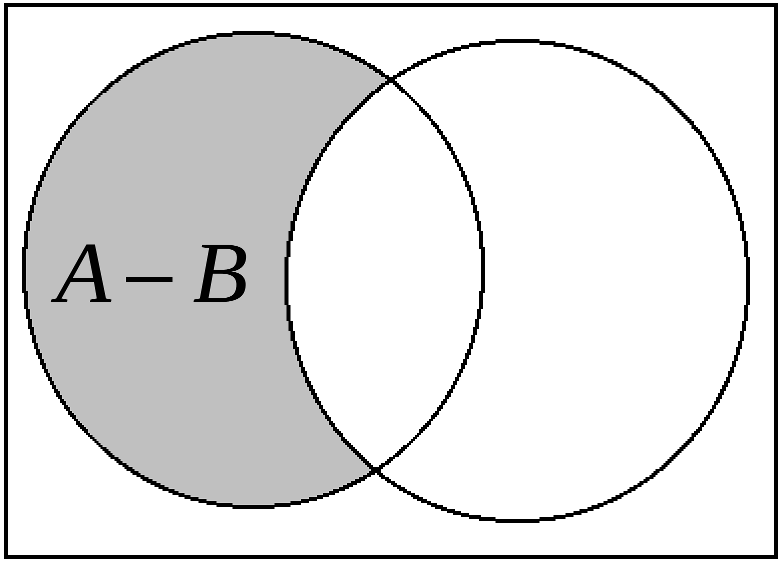
- Η ***διαφορά*** (difference) δύο συνόλων *A* και *B* συμβολίζεται με $A - B$ ή $A \setminus B$ και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του *A* που δεν ανήκουν στο *B*:

$$A - B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Διαγραμματα Venn
(Venn diagrams)







Πράξεις Συνόλων – Συμπλήρωμα

Αν $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A - B = A$.

Αν $B \subseteq U$, τότε το σύνολο $U - B$ συμβολίζεται με $\bar{B}$ και ονομάζεται ***συμπληρωματικό*** (complement) του B ως προς το U (Το U συνήθως το ονομάζουμε ***σύμπαν***).

Ιδιότητες:

$B \cup \bar{B} = U$

$B \cap \bar{B} = \emptyset$

$\bar{\bar{B}} = B$

$\bar{\emptyset} = U$

$\bar{U} = \emptyset$

Νόμοι De Morgan
(De Morgan's laws)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Καποιες Επιπλεον Ιδιοτητες

$$A \cap U = A \qquad A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{U} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Γενικευση της Ενωσης και τομης

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a : \exists k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{a : \forall k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

Διαμεριση Συνολου

Το σύνολο $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ όπου:

$$A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \; και \; A_i \subseteq S$$

αποτελεί ***n-διαμέριση*** (partition) του συνόλου S εάν:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$\forall i \forall j \left((i \neq j) \rightarrow \left(A_i \cap A_j = \emptyset \right) \right)$$

Πιο απλά: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

Παραδειγμα (1)

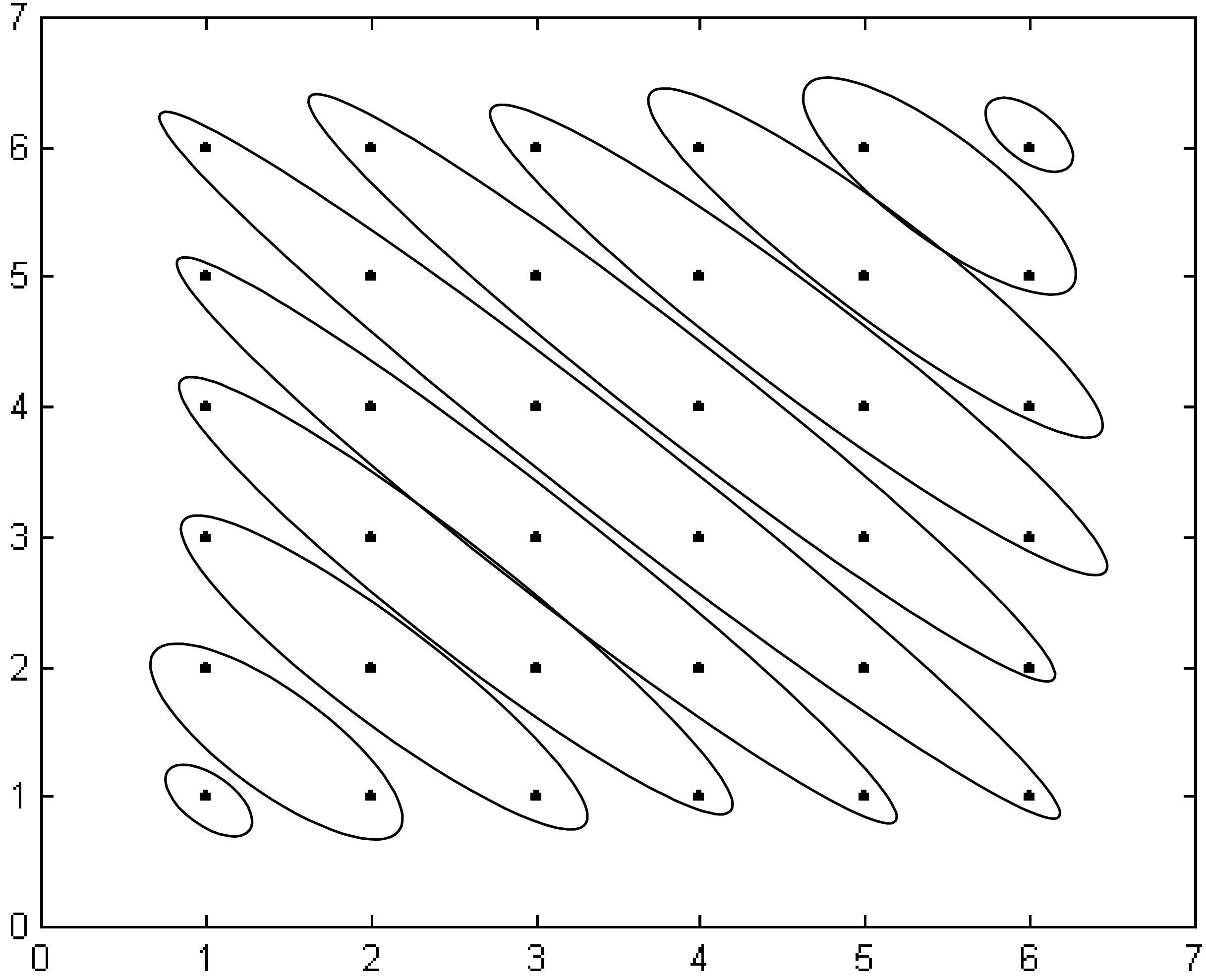
- ***Α*** **= το σύνολο των δυνατών ενδείξεων που μπορεί να προκύψουν από τη ρίψη δύο διαφορετικών ζαριών**
- **Να κατασκευαστεί διαμέριση του *Α* σε υποσύνολα όπου το άθροισμα των ενδείξεων των δύο διαφορετικών ζαριών να είναι το ίδιο**
- Α = {(1,1), (1,2), (2,1), …, (6,6)}

Παραδειγμα (2)

- Δυνατά αθροίσματα: 2, 3, 4, …, 12
- Κατασκευή 11-διαμέρισης

$$A_1 = \{(1,1)\},$$
$$A_2 = \{(1,2),(2,1)\}$$
$$A_3 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$
$$A_4 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$
$$A_5 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$
$$A_6 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$A_7 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$
$$A_8 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$
$$A_9 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$
$$A_{10} = \{(5,6),(6,5)\}$$
$$A_{11} = \{(6,6)\}$$

Παραδειγμα (3)



Διατεταγμενο Ζευγος (Ordered Pair)

- Ζεύγος στοιχείων που είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένη σειρά

$$(a, b)$$

$$\big((a,b) = (a',b')\big) \leftrightarrow \big((a = a') \wedge (b = b')\big)$$

Καρτεσιανο Γινομενο (CARTESIAN PRODUCT)

- *Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη* (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$$

Παραδειγμα

$$B = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{1, 2\}$$

$$B \times \Gamma = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$\Gamma \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$$

Καρτεσιανο Γινομενο Πολλων Συνολων

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$$

$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathrm{A},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Παραδειγμα

- Αν $B = \{0,1\}$ τότε

$$\mathrm{B}^n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i = 0,1\}$$

- n-άδες της μορφής (0, 1, 1, 0, 0,..., 1)

Ασκήσεις

1. Να αποδειχτεί ότι $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$

2. Να δειχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$