

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“ I think you should be more explicit here in step 2.”

Τεχνικές Απόδειξης

Η Απόδειξη

Μια **απόδειξη** είναι ένα έγκυρο σύνολο επιχειρημάτων που καθιερώνει την αλήθεια μιας δήλωσης-πρότασης.

Μια απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιήσει:

- ▣ τις **υποθέσεις** (αν υπάρχουν),
- ▣ τα **αξιώματα** που θεωρούνται ότι αληθεύουν (χωρίς απόδειξη),
- ▣ και προηγουμένως **αποδεδειγμένα θεωρήματα ή προτάσεις**.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα συστατικά και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, καταγράφεται βήμα προς βήμα η απόδειξη που καθιερώνει την αλήθεια της δήλωσης-πρότασης.

Είδη αποδεικτικών προτάσεων

Θεώρημα (theorem): Είναι μία δήλωση-πρόταση η οποία **μπορεί να αποδειχθεί**. Στα μαθηματικά ονομάζουμε θεωρήματα τις προτάσεις που έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Πρόταση (proposition): Είναι όπως το θεώρημα αλλά είναι **λιγότερο σημαντική**.

Λήμμα (lemma): Είναι μία πρόταση η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως **βοηθητική** για την απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος ή πρότασης.

Πόρισμα (corollary): Είναι μία πρόταση η οποία **παράγεται άμεσα ή σχεδόν άμεσα** από κάποιο θεώρημα ή πρόταση.

Εικασία (conjecture): Είναι μία πρόταση η οποία φαίνεται να αληθεύει για μερικές περιπτώσεις και **υποθέτουμε ότι αληθεύει** για όλες χωρίς όμως να υπάρχει απόδειξη γι' αυτό. Αν μία εικασία αποδειχθεί τότε γίνεται θεώρημα.

Παραδείγματα

Θεώρημα (theorem): [Πυθαγόρειο] Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A τότε: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$.

Πρόταση (proposition): Αν $x^2 = a^2$ τότε $x = a$ ή $x = -a$.

Λήμμα (lemma): Το τετράγωνο κάθε κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

Πόρισμα (corollary): Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $B\Gamma^2 \neq AB^2 + A\Gamma^2$ τότε η γωνία A δεν είναι ορθή.

Εικασία (conjecture): Μία από τις πιο διάσημες «πρώην» εικασίες είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat: «Καμία τριάδα a, β, γ θετικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης: $a^n + \beta^n = \gamma^n$ για κάθε ακέραιο $n > 2$ » (γενίκευση του Πυθαγορείου). Η εικασία έγινε το 1637 από τον Fermat στο περιθώριο των σημειώσεών του και αποδείχθηκε το 1995 από τον Andrew Wiles.



Pierre de Fermat



Andrew Wiles

Μέθοδοι Απόδειξης Θεωρημάτων

5

Άμεση Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι Αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός.

Αντιθετοαντίστροφη – Έμμεση Απόδειξη

6

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε ότι η αντιθετοαντίστροφή της $\neg q \rightarrow \neg p$ είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο $3n+2$ είναι περιττός τότε και ο n είναι περιττός.

Απόδειξη με Αντίφαση

7

Έστω ότι μπορεί να βρεθεί μία **αντίφαση (F)** q έτσι ώστε $\neg p \rightarrow q$ να είναι Αληθής. Άρα η πρόταση $\neg p$ είναι Ψευδής και άρα η p θα πρέπει να είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ο αριθμός $2^{1/2}$ είναι άρρητος χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

Σχετικά με την Απόδειξη με Αντίφαση

- Μπορείτε να αποδείξετε ότι δεν ισχύει κάτι με απόδειξη αντίφασης
 - ▣ Βρίσκετε ένα **παράδειγμα** για να δείξετε ότι κάτι είναι **ψευδές** (Αντιπαράδειγμα – σχετίζεται με τον καθολικό ποσοδείκτη)
- ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙΤΕ να αποδείξετε την **καθολικότητα** μίας πρότασης με παράδειγμα

Παράδειγμα: αποδείξτε αν ισχύει ή όχι ότι όλοι οι φυσικοί είναι άρτιοι:

- ▣ Απόδειξη με αντίφαση: το 1 δεν είναι άρτιος
- ▣ **(Λάθος)** απόδειξη με παράδειγμα: το 2 είναι άρτιος

Παράδειγμα

9

Θέμα 6^ο: (1,5 Μονάδες)

Να αποδειχθεί ότι αν ο n είναι **ακέραιος** και ο n^3+5 **είναι περιττός**, τότε ο n είναι **άρτιος** χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους απόδειξης: α) έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο) και β) απόδειξη με αντίφαση.

Στρατηγική

10

Συνήθως τα θεωρήματα έχουν τη μορφή
συνεπαγωγών: $p \rightarrow q$

1^η Προσπάθεια: *Άμεση*

2^η Προσπάθεια: *Αντιθετοαντίστροφη*

3^η Προσπάθεια: *Αντίφαση*

4^η Προσπάθεια: *Εξάντληση;;; – Άλλες Μέθοδοι;;;*

Αποδείξεις κατά Περίπτωση

11

Για να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή τη μορφής

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

χρησιμοποιούμε την ταυτολογία:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

Παραδείγματα:

1. Να χρησιμοποιηθεί απόδειξη κατά περίπτωση για να δείχτεί ότι $|xy|=|x||y|$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδείξεις Ισοδυναμίας

12

Για να αποδείξουμε θεώρημα που είναι ισοδυναμία, δηλαδή της μορφής $p \leftrightarrow q$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτολογία:

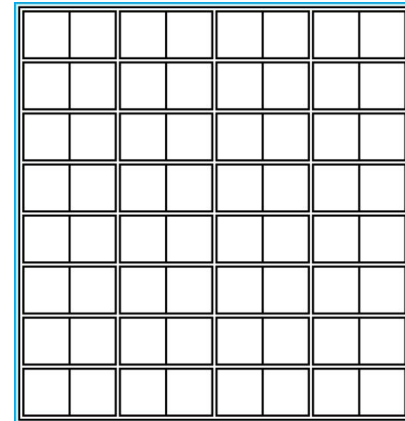
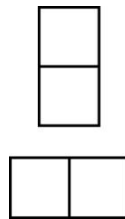
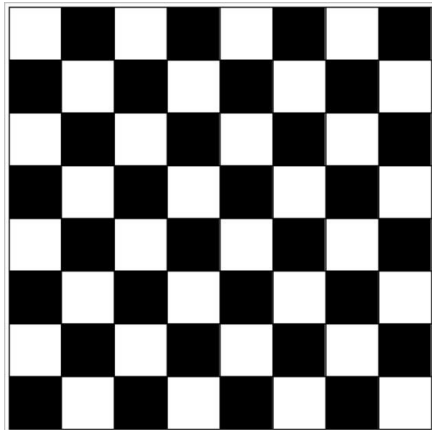
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι περιττός *αν και μόνο αν* ο n^2 είναι περιττός.

Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 ;

Λύση: Ναι! Το παρακάτω παράδειγμα είναι μία κατασκευαστική απόδειξη.



Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε μία γωνία;

Λύση:

(Εστω ότι μπορεί να καλυφθεί)

Η σκακιέρα έχει $64 - 1 = 63$ τετράγωνα.

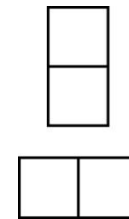
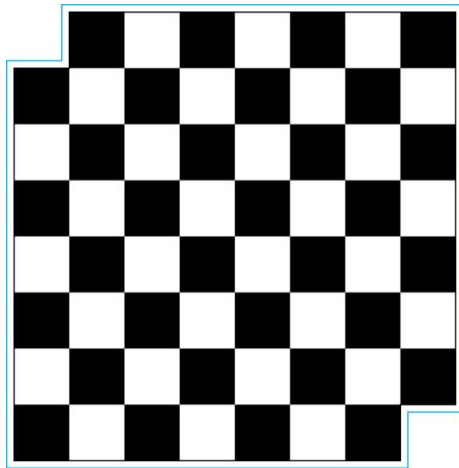
Αφού κάθε ντόμινο έχει 2 τετράγωνα, η σκακιέρα θα πρέπει να έχει άρτιο πλήθος τετραγώνων.

Το 63 δεν είναι άρτιος.

Άτοπο.

Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε δύο αντιδιαμετρικές γωνίες;



Αποδείξεις για Ποσοτικοποιημένες Προτάσεις

Αποδείξεις Ύπαρξης:

Πολλά θεωρήματα κάνουν ισχυρισμούς ότι υπάρχουν αντικείμενα συγκεκριμένου τύπου.

$$\exists xP(x)$$

Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: εύρεση στοιχείου a ώστε η $P(a)$ να είναι **Αληθής**.



Μη Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: δεν βρίσκουμε στοιχείο a ώστε η $P(a)$ να είναι **Αληθής**, αλλά με άλλο τρόπο (π.χ. αντίφαση) βρίσκουμε ότι η $\exists xP(x)$ είναι **Αληθής**.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κύβων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

$$1729=10^3+9^3=12^3+1^3$$

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y έτσι ώστε ο x^y να είναι ρητός.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ένας από τους δύο αριθμούς $2 \times 10^{500} + 15$ και $2 \times 10^{500} + 16$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Αποδείξεις Μοναδικότητας

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ύπαρξη μοναδικού σημείου με συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ο τρόπος απόδειξης είναι:

1. **Ύπαρξη:** αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στοιχείο x με την ιδιότητα
2. **Μοναδικότητα:** Δείχνουμε ότι αν $x \neq y$, τότε το y δεν έχει την ιδιότητα.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))) \quad \text{ή} \quad \exists!x(P(x))$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι κάθε ακέραιος έχει έναν μοναδικό προσθετικό αντίθετο.

Αντιπαράδειγμα

Μπορούμε να δείξουμε ότι η δήλωση της μορφής $\forall xP(x)$ είναι ψευδής αν μπορούμε να βρούμε μία τιμή a για την οποία η $P(a)$ να είναι ψευδής (το **αντιπαράδειγμα**).

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι η δήλωση «Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων» είναι Ψευδής.

Παράδειγμα: Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί. (κάντε το παίρνοντας το συμπλήρωμα)

Εξάντληση

Όταν η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε δεν γίνεται με τις προηγούμενες μεθόδους:

Εξαντλητική Απόδειξη (Exhaustive Proof)

- Αποδεικνύουμε το ζητούμενο εξετάζοντας **κάθε μία** τιμή της μεταβλητής (ή συνδυασμούς των μεταβλητών) στο πεδίο ορισμού της πρότασης.

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \leq 4$ ισχύει: $(n+1)^3 \geq 3^n$

Χωρίς Βλάβη Γενικότητας

Να δείξετε ότι αν x και y ακέραιοι και τα $x \cdot y$ και $x+y$ είναι άρτιοι, τότε τα x και y είναι άρτιοι.

Απόδειξη:

Έμμεση. Έστω ότι x και y δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε ο ένας οι και οι δύο είναι περιττοί. *Χωρίς βλάβη γενικότητας*, έστω ότι ο x είναι περιττός.

Τότε: $x = 2m + 1$ για κάποιον ακέραιο m .

Περίπτωση 1: ο y άρτιος. Τότε $y = 2n$ για κάποιον ακέραιο n , και άρα

$$x+y = (2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1 \text{ είναι περιττός}$$

Περίπτωση 2: ο y περιττός. Τότε $y = 2n + 1$ για κάποιον ακέραιο n , και άρα

$$x \cdot y = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1 \text{ είναι περιττός}$$

Η περίπτωση για να είναι ο y περιττός είναι παρόμοια/συμμετρική.

Καθολικές Προτάσεις

Για να αποδείξουμε θεωρήματα της μορφής $\forall xP(x)$, υποθέτουμε αυθαίρετο x και δείχνουμε ότι η $P(x)$ είναι αληθής. Λόγω καθολικής γενίκευσης θα ισχύει ότι $\forall xP(x)$.

Παράδειγμα: Ένας ακέραιος x είναι άρτιος αν και μόνο αν ο x^2 είναι άρτιος.

Λύση: Θ.δ.ο. $\forall x [x \text{ άρτιος} \leftrightarrow x^2 \text{ άρτιος}]$

Ασκήσεις

25

- Έστω η λογική πρόταση $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$.
 1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **ψευδής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y, z): ((x^2 = y^2 = z^2) \rightarrow (x = y = z))$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **αληθής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y, z): ((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$$

Ασκήσεις

26

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \exists y \exists z P(x, y, z)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **ψευδής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}^-, z \neq 0)$;

$$P(x, y, z): ((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z))$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **αληθής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y, z): ((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z))$$

Ασκήσεις

27

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \forall y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **ψευδής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **αληθής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y): x \cdot y = 0$$

Ασκήσεις

28

Έστω η λογική πρόταση $\forall x \exists y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **ψευδής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι **αληθής** τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \mathbb{R})$;

$$P(x, y): x + y = 0$$

Μαθηματική Επαγωγή

Αποδείξεις Ιδιοτήτων για Διακριτά Αντικείμενα

Χρήση

37

Η Μαθηματική Επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο για την απόδειξη αποτελεσμάτων που έχουν ληφθεί με κάποιο άλλο τρόπο.

- ▣ Δεν αποτελεί εργαλείο ανακάλυψης τύπων ή θεωρημάτων

Μία Ισοδύναμη Ιδιότητα με τη Μαθηματική Επαγωγή

38

Η Ιδιότητα (Αξίωμα) της *Καλής Διάταξης*:

*Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των θετικών
ακέραιων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.*

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

39

- Ιδιότητα $P(n)$ στους φυσικούς αριθμούς
- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall n P(n)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων

$$\left[P(1) \wedge \forall s (P(s) \rightarrow P(s+1)) \right] \rightarrow \forall n P(n)$$

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ είναι αληθής τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

Παράδειγμα

40

$$P(n) = \{n^3 + 2n \text{ διαιρείται από το } 3, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

$$P(1) = 1 + 2 = 3 \text{ — Αληθές}$$

Έστω ότι ισχύει το $P(n-1)$

$$\begin{aligned} P(n-1) &= (n-1)^3 + 2(n-1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 2n - 2 = \\ &= n^3 - 3n^2 + 5n - 3 = 3\kappa \text{ για } \kappa \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$P(n) = (n^3 - 3n^2 + 5n - 3) + (3n^2 - 3n + 3) = 3\kappa + 3(n^2 - n + 1)$$

Αποδείχτηκε.

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ναδειχθεί ότι το άθροισμα των n μικρότερων θετικών περιττών αριθμών (δηλ., $1, 3, 5, \dots, 2n-1$) ισούται με n^2 , $n \geq 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο n -οστός μικρότερος θετικός περιττός αριθμός είναι ο $2n-1$, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος επαγωγής: ακέραιος $n \geq 1$

[ΒΑΣΗ] $n = 1$

Προφανώς ισχύει ότι $1 = 1^2$. ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο $k \geq 1$ ισχύει: $1+3+\dots+[2k-1] = k^2$.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θδο $1 + 3 + \dots + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$.

Πράγματι:

$$1 + 3 + \dots + [2k-1] + [2(k+1)-1] = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Χρήση Επαγωγικής Υπόθεσης

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ναδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $n \geq 10$ ισχύει ότι $2^n > n^3$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος Επαγωγής = ακέραιος $n \geq 10$

[ΒΑΣΗ] $n=10$:

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000 \quad \checkmark$$

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω για κάποιον ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ ακέραιο αριθμό $k \geq 10$

$$2^k > k^3.$$

[ΕΠ. ΒΗΜΑ]

Θεωρώ τον ακέραιο αριθμό $k+1$. Θα δείξω ότι: $2^{k+1} > (k+1)^3$.

ΠΩΣ;

$$2^{k+1} = 2 * 2^k > 2 k^3 \geq (k + 1)^3$$

(για $k \geq 10$, $2k^3 = k^3 + k^3 \geq k^3 + 10k^2 > k^3 + 3k^2 + 3k^2 + k^2 > (k+1)^3$)

Χρήση Επαγωγικής Υπόθεσης

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο χρησιμοποιώντας ΜΟΝΟ χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ, μπορούμε να σχηματίσουμε οποιοδήποτε ποσό που είναι πολλαπλάσιο του 10 και μεγαλύτερο ή ίσο του 40.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος Επαγωγής;

[ΒΑΣΗ] Για ποσό 40 = 4*10 Ευρώ: $40 = 2*20 + 0*50$ ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ ποσό $10*\Lambda \geq 40$ ισχύει ότι:

$10*\Lambda = \varepsilon(\Lambda)*20 + \pi(\Lambda)*50$ για ακέραιους αριθμούς $\varepsilon(\Lambda), \pi(\Lambda) \geq 0$.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θεωρώ το ποσό $10*(\Lambda+1)$. Θδο \exists ακέραιοι αριθμοί $\varepsilon(\Lambda+1), \pi(\Lambda+1) \geq 0$ τ.ώ. $10*(\Lambda+1) = \varepsilon(\Lambda+1)*20 + \pi(\Lambda+1)*50$.

(α) $\pi(\Lambda) = 0$: τότε $\varepsilon(\Lambda) \geq 2$

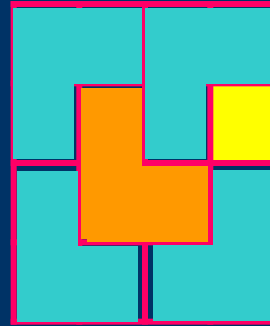
$$10*(\Lambda+1) = 10*\Lambda + 10 = \varepsilon(\Lambda)*20 + 0*50 + 10 = [\varepsilon(\Lambda)-2]*20 + 1*50.$$

(β) $\pi(\Lambda) \geq 1$:

$$\begin{aligned} 10*(\Lambda+1) &= 10*\Lambda + 10 = \varepsilon(\Lambda)*20 + \pi(\Lambda)*50 + 10 \\ &= [\varepsilon(\Lambda)+3]*20 + [\pi(\Lambda)-1]*50. \end{aligned}$$

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κάθε σκακιέρα διαστάσεων $2^n \times 2^n$ στην οποία υπάρχει οπουδήποτε ένα ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΟ τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί πλήρως με τριόμινα (= γωνίες από τρία εφαπτόμενα τετράγωνα) τα οποία δεν επικαλύπτονται ούτε εκτείνονται εκτός της σκακιέρας.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

[ΒΑΣΗ] $n=0$: σκακιέρα $2^0 \times 2^0 = 1 \times 1$ (τετριμμένη περίπτωση). ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο $k \geq 0$ ισχύει πως μπορώ να καλύψω τη $2^k \times 2^k$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου με τριόμινα.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θδο ότι μπορώ να καλύψω και τη $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου με τριόμινα.

(α) Χωρίζω τη $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα σε τέσσερις $2^k \times 2^k$ σκακιέρες.

(β) Κάθε $2^k \times 2^k$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου καλύπτεται πλήρως από τριόμινα (επαγ. υπόθεση).

(γ) Για τις τρεις από τις $2^k \times 2^k$ σκακιέρες, θεωρώ ότι τα απαγορευμένα τετράγωνα τους σχηματίζουν ένα τριόμινο.

Το απαγορευμένο τετράγωνο της τέταρτης $2^k \times 2^k$ σκακιέρας είναι το απαγορευμένο τετράγωνο της $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρας.

Ποιο είναι το Σφάλμα;

46

Απόδειξη ότι όλα τα αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα:

Έστω $P(n)$ η πρόταση «Ένα σύνολο n αλόγων έχουν το ίδιο χρώμα»

$P(1)$ προφανώς ισχύει.

Έστω $P(k)$. Θεωρήστε οποιοδήποτε αριθμημένο σύνολο $k+1$ αλόγων. Τα πρώτα k αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα όπως και τα τελευταία k αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή αυτά τα δύο σύνολα επικαλύπτονται σημαίνει ότι και τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο χρώμα και άρα η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Ισχυρή Επαγωγή

47

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν οι $P(k), P(k+1), \dots, P(n)$ είναι αληθείς τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

$$\left[P(1) \wedge \forall k ((P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)) \right] \rightarrow \forall n P(n)$$

Άσκηση

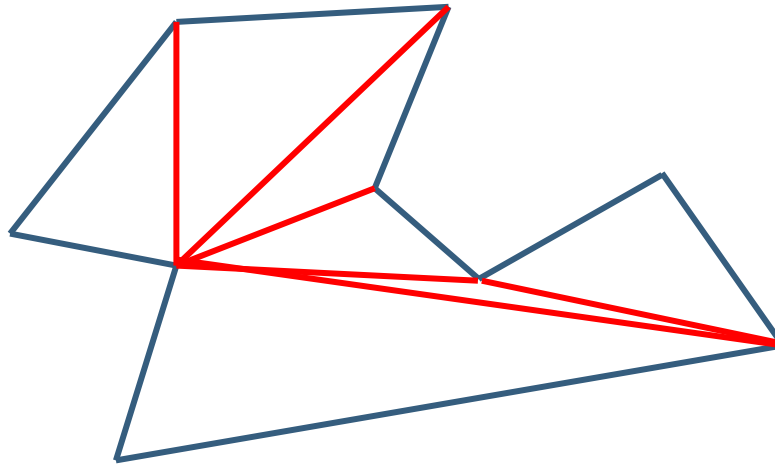
48

Rosen (Παράδειγμα 3) Θεωρήστε ένα παιχνίδι όπου δύο παίκτες με τη σειρά αφαιρούν ένα θετικό πλήθος σπέρτων από έναν εκ των δύο σωρών με σπέρτα που υπάρχουν. Ο παίκτης που θα αφαιρέσει το τελευταίο σπέρτο κερδίζει. Να δείξετε ότι, αν οι δύο σωροί έχουν το ίδιο πλήθος σπέρτων στην αρχή, ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντοτε να νικήσει.

Ισχυρή Επαγωγή και Υπολογιστική Γεωμετρία

50

Απλό Πολύγωνο



Τριγωνοποίηση



51

Θεώρημα: Ένα απλό πολύγωνο με n πλευρές, όπου $n \geq 3$ ακέραιος, μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε $n - 2$ τρίγωνα.

Λήμμα: Κάθε απλό πολύγωνο με τουλάχιστον 4 πλευρές, έχει μία εσωτερική διαγώνιο.

(χωρίς απόδειξη)

Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2, είτε είναι πρώτος αριθμός, είτε είναι γινόμενο πρώτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

[ΒΑΣΗ] $K=2$: Ο 2 είναι πρώτος αριθμός. ✓

[ΕΠ.ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $K \geq 2$ ισχύει ότι:
ΓΙΑ ΚΑΘΕ $2 \leq \Lambda \leq K$, ο Λ είναι πρώτος ή είναι γινόμενο πρώτων.

[ΕΠ.ΒΗΜΑ] Αν ο $K+1$ είναι πρώτος, έχουμε τελειώσει. Εάν όχι,
 $K+1 = \Lambda * M$ για κάποιους ακέραιους $2 \leq \Lambda, M \leq (K+1) / 2$.
Για $K \geq 2$, $2K \geq K+2 \geq K+1 \Rightarrow (K+1)/2 \leq K$.

ΤΟΤΕ:

- από ΕΠ.ΥΠΟΘΕΣΗ ($2 \leq \Lambda \leq K$), $\Lambda = P_1 * P_2 * \dots * P_\lambda$
(ακέραιος $\lambda \geq 1$ και πρώτοι αριθμοί $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$).
- από ΕΠ.ΥΠΟΘΕΣΗ ($2 \leq M \leq K$), $M = \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_\mu$
(ακέραιος $\mu \geq 1$ και πρώτοι αριθμοί $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$).
- Άρα, $K+1 = P_1 * P_2 * \dots * P_\lambda * \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_\mu$ για κάποιους πρώτους αριθμούς $P_1, P_2, \dots, P_\lambda, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$.

Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο για κάθε $N \geq 8$, μπορούμε να στείλουμε ένα γράμμα που κοστίζει N Ευρώ με γραμματόσημα ΜΟΝΟ των 3 και 5 Ευρώ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ IND.8:

[ΒΑΣΗ] $K=8$: Προφανές. ✓

[ΕΠ.ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $K \geq 8$ ισχύει ότι:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $8 \leq \Lambda \leq K$, $\Lambda = \tau(\Lambda)*3 + \pi(\Lambda)*5$, όπου $\tau(\Lambda), \pi(\Lambda)$ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

[ΕΠ.ΒΗΜΑ] Εξετάζω την περίπτωση του αριθμού $K+1$:

ΑΝ $K \geq 10$

ΤΟΤΕ $K+1 = (K-2) + 3 = \tau(K-2)*3 + \pi(K-2)*5 + 3$
 $= [\tau(K-2)+1]*3 + \pi(K-2)*5$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ

// $K = 8$ ή $9...$

ΑΝ $K = 8$

ΤΟΤΕ $K+1 = 9 = 3*3$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ

// $K = 9...$

$K+1 = 10 = 5*2.$