"It may be a model, Captain, but it's highly illogical."

www.FieldstoneAlliance.org

# ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Κατηγορηματικός Λογισμός

# Μορφές Θεωρημάτων

- Υπάρχει ένα αντικείμενο ώστε να ισχύει κάτι.
  - Υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$

- Για κάθε αντικείμενο ισχύει ότι κάτι.
  - Καθολικός ποσοδείκτης $\forall$

# Κατηγορήματα

***Κατηγόρημα*** είναι μία πρόταση που περιέχει πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και η οποία γίνεται λογική πρόταση όταν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από συγκεκριμένες τιμές.

$$x > 3$$

«Το $x$ είναι μεγαλύτερο του 3»

Υποκείμενο Δήλωσης

Κατηγόρημα ή
Κατηγορηματικό Σύμβολο

«Το $x$ είναι μεγαλύτερο του 3» $= P(x)$

$P \longrightarrow$ κατηγόρημα («μεγαλύτερο του 3)

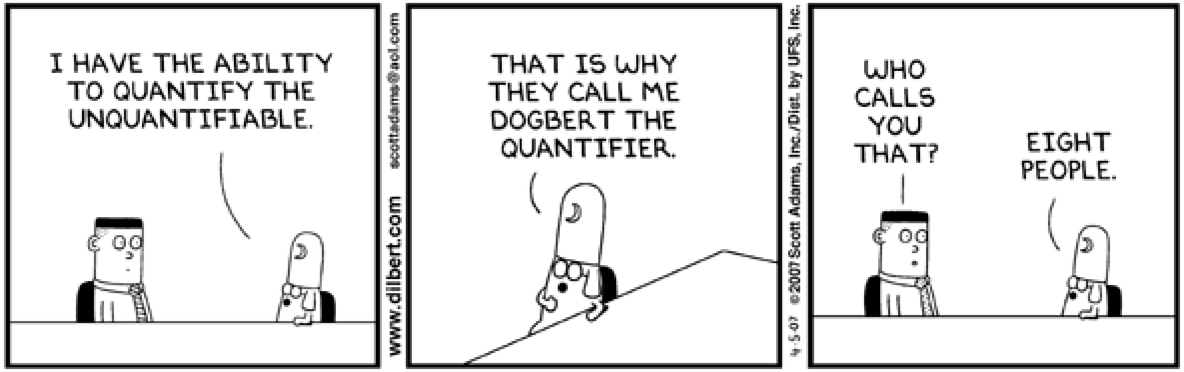
$x \longrightarrow$ μεταβλητή

Τιμή (T ή F) της προτασιακής συνάρτησης $P$ στο $x$

# Κατηγορηματικός Λογισμός

Ο τομέας της Λογικής που ασχολείται με:

- Κατηγορήματα
- Ποσοδείκες (σε λίγο…)



# Ο Καθολικός Ποσοδείκτης ∀

$$\forall x(P(x))$$

Η $P(x)$ είναι αληθής για όλες τις τιμές του $x$ στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς*.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$$\forall x\ (P(x))\ ???$$

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

# Σχέση $\forall$ και $\wedge$

$$\forall x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2<10\text{”}$$

$$\forall x(P(x)) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(4)$ ψευδής και άρα είναι ψευδής.

# Ο Υπαρξιακός Ποσοδείκτης ∃

$$\exists x \, (P(x))$$

Υπάρχει ένα στοιχείο $x$ στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς* έτσι ώστε η $P(x)$ να είναι αληθής.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$\exists x \, (P(x))$ ???

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

# Σχέση $\exists$ και $\vee$

$$\exists x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2<10\text{”}$$

$$\exists x(P(x)) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(1)$ αληθής και άρα είναι αληθής.

# Δέσμευση Μεταβλητών

- ***Δεσμευμένη*** μεταβλητή (εξαρτάται από ποσοδείκτη)
- ***Ελεύθερη*** μεταβλητή (δεν εξαρτάται από ποσοδείκτη)

**Γενικά:**

Όλες οι μεταβλητές σε προτασιακή συνάρτηση πρέπει να είναι δεσμευμένες είτε με ποσοτικοποιητές ή με ανάθεση τιμής ώστε να θεωρείται λογική πρόταση.

# Μερικά Παραδείγματα

Εμβέλεια ποσοδεικτών

- Να δειχτεί ότι $\exists x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

- Να δειχτεί ότι $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

# Αρνήσεις

Έστω $P(x)$=«Ο $x$ έχει κάνει διακριτά μαθηματικά»

Τι σημαίνει $\forall x\ (P(x))$;

Τι σημαίνει $\neg\ (\forall x\ (P(x)))$;

| **Άρνηση** | **Ισοδύναμο** | **Πότε η άρνηση είναι Αληθής;** | **Πότε η άρνηση είναι Ψευδής;** |
|---|---|---|---|
| $\neg(\exists x\ (\mathrm{P}(x)))$ | $\forall x\ (\neg P(x))$ | Για κάθε $x$, η $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής. | Υπάρχει $x$ έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Αληθής. |
| $\neg(\forall x\ (P(x)))$ | $\exists x\ (\neg \mathrm{P}(x))$ | Υπάρχει $x$ έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής. | Η $\mathrm{P}(x)$ είναι αληθής για όλα τα $x$. |

# Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

“Κάθε φοιτητής σε αυτή την τάξη έχει παρακολουθήσει Java.”

**Λύση:**

Πρώτα αποφασίζουμε τον τομέα αναφοράς $U$.

**Λύση 1**: Αν το $U$ είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης, ορίζουμε τη συνάρτηση J($x$) = “$x$ έχει παρακολουθήσει Java”

$$\forall x\ (J(x))$$

**Λύση 2**: Όταν το $U$ είναι όλοι οι άνθρωποι, ορίζουμε τη συνάρτηση S($x$) = “$x$ είναι φοιτητής αυτής της τάξης” και μεταφράζουμε

$$\forall x\ (S(x) \rightarrow J(x))$$

$\forall x\ (S(x) \land J(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

# Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

"Κάποιος φοιτητής αυτής της τάξης έχει παρακολουθήσει Java."

**Λύση**:

Ποιος είναι ο τομέας αναφοράς $U$;

**Λύση 1**: Αν $U$ είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης

$$\exists x\, (J(x))$$

**Λύση 2**: Αν $U$ είναι όλοι οι άνθρωποι

$$\exists x\, (S(x) \land J(x))$$

$\exists x\, (S(x) \to J(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

# Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$
3. $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$

# Εμφωλευμένοι Ποσοτικοποιητές

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

«Για κάθε $x$ υπάρχει κάποιο $y$ έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 0.»

$$\forall x\ \forall\ y\ (x + y = y + x)$$

Αντιμεταθετικός κανόνας πρόσθεσης.

# Μετάφραση και Αρνήσεις

«Κάθε πραγματικός αριθμός εκτός από το 0 έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

$$\forall x\ ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\ (xy=1))$$

$$\neg(\forall x \exists y\ (xy=1))$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \forall y\ (xy \neq 1)$$

# Παράδειγμα

Ένας Έλληνας πεθαίνει από αυτοκινητιστικό κάθε μέρα.

$\exists E \forall M$[Ο $E$ πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα $M$]

$\forall M\ \exists E$[Ο $E$ πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα $M$]

# Παράδειγμα

A = Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι άγευστα. (F)

Τι σημαίνει όχι A;

**A)** Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι καλά.

**B)** Όλα τα ξένα πορτοκάλια δεν είναι άγευστα.

**Γ)** Τουλάχιστον ένα ξένο πορτοκάλι είναι εύγευστο.

Δ) Τουλάχιστον ένα ξένο πορτοκάλι δεν είναι άγευστο.

**E)** Όλα τα ντόπια πορτοκάλια είναι καλά.

# Ένα Ακόμα Παράδειγμα (1)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Όλα είναι ψείρες"

$$\forall x\,(F(x))$$

# Παράδειγμα (2)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Κανένα δεν είναι κοριός.”

$\neg(\exists x\, S(x))$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x\, (\neg\, S(x))$

# Παράδειγμα (3)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Όλες οι ψείρες είναι κοριοί"

$\forall x\ (F(x) \rightarrow S(x))$

# Παράδειγμα (4)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Μερικοί κοριοί είναι τσιμπούρια”

$\exists x\ (S(x) \wedge T(x))$

# Παράδειγμα (5)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Κανένας κοριός δεν είναι τσιμπούρι"

$\neg(\exists x\ (S(x) \wedge T(x)))$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x\ (\neg S(x) \vee \neg T(x))$

# Παράδειγμα (6)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: $x$ είναι ψείρα

$S(x)$: $x$ είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Αν κάποια ψείρα είναι κοριός τότε είναι και τσιμπούρι"

$$\forall x\ ((F(x) \wedge S(x)) \rightarrow T(x))$$

# Σειρά Ποσοτικοποιήσεων

$$\exists x \forall y\ (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

# Παράδειγμα

Έστω $U$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$P(x,y) : x \cdot y = 0$

Ποια είναι η τιμή αληθείας των:

1. $\forall x \forall y P(x,y)$

   Ψευδής

2. $\forall x \exists y P(x,y)$

   Αληθής

3. $\exists x \forall y\ P(x,y)$

   Αληθής

4. $\exists x\ \exists\ y\ P(x,y)$

   Αληθής

# Μετάφραση Προτάσεων σε Γλώσσα

**Παράδειγμα**: $\forall x\ (C(x) \lor \exists y\ (C(y) \land F(x, y)))$

$C(x)$ = "$x$ έχει Η/Υ" και $F(x,y)$ = "$x$ και $y$ είναι φίλοι" και ο τομέας αναφοράς για τα $x$ και $y$ είναι όλοι οι φοιτητές του τμήματος.

Κάθε φοιτητής στο τμήμα έχει Η/Υ ή έχει φίλο που έχει Η/Υ.

**Παράδειγμα**: $\exists x \forall y \forall z\ ((F(x, y) \land F(x,z) \land (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y,z))$

Υπάρχει φοιτητής του οποίου κανένας φίλος δεν είναι φίλος με τους υπόλοιπους φίλους του.

# Μεσαίας Δυσκολίας (1,5 – 2/24)

Έστω το διμελές κατηγόρημα $P(x,y) =$ "$\text{το } x \text{ είναι υποσύνολο (όχι απαραίτητα γνήσιο) του } y\ (x \subseteq y)$", όπου ο τομέας αναφοράς είναι το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών (δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες <u>**με αιτιολόγηση**</u>:

1. Η λογική πρόταση $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$ είναι αληθής.
2. Η λογική πρόταση $\forall x \forall y \big((x \cap y = x) \rightarrow P(x,y)\big)$ είναι αληθής.
3. Η λογική πρόταση $\exists x \exists y \forall z \big(\neg P(x \cap y, z)\big)$ είναι αληθής.
4. Η λογική πρόταση $\exists x \left( (x \neq \emptyset) \wedge \left( \exists y \left( P(y,x) \wedge \left( \forall z \big( P(z,x) \rightarrow (z = y) \big) \right) \right) \right) \right)$ είναι αληθής.

# Εύκολη (1,5 – 9/24)

Λέμε ότι δύο διατεταγμένα ζεύγη $(\alpha, \beta)$ και $(\gamma, \delta)$ είναι ισοδύναμα (γράφουμε $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$), αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Έστω $s$ η πρόταση:

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\forall\delta\left(\left((\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)\right) \rightarrow (\alpha = \gamma)\right)$$

α) Είναι αληθής η πρόταση $s$;

β) Γράψτε την αντίστροφη της $s$.

γ) Είναι αληθής η αντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

δ) Γράψτε την αντιθετοαντίστροφη της $s$.

ε) Είναι αληθής η αντιθετοαντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

# (2 Μονάδες)

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αναφέρει ότι αν ένας αριθμός είναι θετικός και ένας δεύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον αρχικό αριθμό τότε και ο δεύτερος αριθμός είναι θετικός.
1. $\forall x \exists y\big((x > 0) \rightarrow (y > 0)\big)$
2. $\forall x \forall y\Big(\big((x > 0) \land (y > x)\big) \rightarrow (y > 0)\Big)$
3. $\forall x \forall y\big((x > 0) \land (y > x)\big)$
4. $\forall x \exists y\Big((x > 0) \rightarrow \big((y > 0) \land (y > x)\big)\Big)$

β) Έστω ότι P(x,y) είναι ένα κατηγόρημα όπου ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι το {1,2,3}. Επιπλέον, έστω ότι το κατηγόρημα είναι Αληθές μόνο στις εξής περιπτώσεις: P(1,3), P(2,1), P(3,1), P(3,2), P(3,3). Να αναφέρετε ποια από τις παρακάτω λογικές προτάσεις είναι Ψευδής.
1. $\exists x \forall y P(x, y)$
2. $\forall x \exists y P(x, y)$
3. $\exists y \forall x P(x, y)$
4. $\forall y \exists x P(x, y)$

γ) Έστω η πρόταση: $\exists y \forall x\big(C(x) \rightarrow \neg C(x, y)\big)$, όπου C(x) σημαίνει «Ο x είναι φοιτητής Πληροφορικής», C(x,y) σημαίνει ότι «ο x τελείωσε την y» και ο τομέας αναφοράς της x είναι όλοι οι φοιτητές και της y είναι όλες οι ασκήσεις. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελεί την μετάφραση σε φυσική γλώσσα αυτής της λογικής πρότασης;
1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε.
2. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας φοιτητής της Πληροφορικής δεν τελείωσε.
3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.
4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

# Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

# Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Καθολική αμεσότητα:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(c)$$

όπου $c$ αυθαίρετο μέλος του πεδίου ορισμού της $x$.

Καθολική Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για αυθαίρετο } c \rightarrow \forall x P(x)$$

# Καθολική Συνεπαγωγή

Καθολικό *Modus Ponens*:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$P(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ Q(a)$$

Καθολικό *Modus Tollens*:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\neg Q(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ \neg P(a)$$

# Κανόνες για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Υπαρξιακή Αμεσότητα:

$$\exists x P(x) \rightarrow P(c) \text{ για κάποιο } c$$

όπου $c$ συγκεκριμένο μέλος του πεδίου ορισμού της $x$.

Υπαρξιακή Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για κάποιο στοιχείο } c \rightarrow \exists x P(x)$$

# Παράδειγμα Εξαγωγής Συμπεράσματος

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το $x$ πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

$$1.\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$2.\ \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\therefore \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

# Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι οι προϋποθέσεις: 1.«Ένας σπουδαστής στην τάξη αυτή δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.» και 2.«Ο καθένας στην τάξη αυτή πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.» συνεπάγονται «Κάποιος που πέρασε το πρώτο διαγώνισμα δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$C(x)$: «Ο $x$ είναι στην τάξη αυτή.»

$B(x)$: «Ο $x$ έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$P(x)$: «Ο $x$ πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.»

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
2. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

$\therefore\ \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ Προϋπόθεση
2. $C(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Υπαρξιακή Αμεσότητα από 1
3. $C(\alpha)$ απλοποίηση από 2
4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Προϋπόθεση
5. $C(\alpha) \rightarrow P(\alpha)$ Καθολική αμεσότητα από 4
6. $P(\alpha)$ Modus Ponens 3,5
7. $\neg B(\alpha)$ απλοποίηση από 2
8. $P(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Σύζευξη 6,7
9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$ Υπαρξιακή Γενίκευση από 8

# Σφάλμα Αντιστρόφου

1. «Όλοι οι εγκληματίες της πόλης συχνάζουν στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».
2. «Ο Γιάννης συχνάζει στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».

∴ «Ο Γιάννης είναι ένας από τους εγκληματίες της πόλης»

Όμως αν (τρόπος σκέψης γιατρών, μηχανικών κτλ.):

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

είναι αληθής και η $Q(a)$ είναι αληθής για συγκεκριμένο $a$ τότε η $P(a)$ ***μπορεί*** να είναι Αληθής.

Αυτή είναι η ***τεχνική της απαγωγής***.

# Άσκηση

- Χρησιμοποιώντας κατηγορήματα και ποσοδείκτες να εκφράσετε τις παρακάτω προτάσεις και έπειτα με κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων να φτάσετε στο συμπέρασμα.

- Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.
- Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.
- Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.

- ∴ Όλα τα τρίγωνα είναι επάνω από όλους τους κύκλους.

# Λύση

$P(x)$: «$x$ είναι τρίγωνο»

$Q(x)$: «$x$ είναι γαλάζιο»

$R(x)$: «$x$ είναι δεξιά όλων των τετραγώνων»

$S(x)$: «$x$ είναι πάνω από όλους τους κύκλους»

«Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.» ≡ «Για κάθε $x$, αν το $x$ είναι τρίγωνο τότε είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

«Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ «Για κάθε $x$, αν το $x$ είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το $x$ είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ $\forall x(R(x)\rightarrow S(x))$

«Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.» ≡ «Για κάθε $x$, αν το $x$ δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το $x$ δεν είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(\neg R(x)\rightarrow \neg Q(x))$ ≡ $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$

Άρα:

1. $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$
2. $\forall x(R(x)\rightarrow S(x))$
3. $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$

Βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

4. Καθολική αμεσότητα σε (1): για αυθαίρετο $x$: $P(x)\rightarrow Q(x)$
5. Καθολική αμεσότητα σε (3): για αυθαίρετο $x$: $Q(x)\rightarrow R(x)$
6. Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα) μεταξύ (4) και (5): $P(x)\rightarrow R(x)$
7. Καθολική αμεσότητα σε (2): για αυθαίρετο $x$: $R(x)\rightarrow S(x)$
8. Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα) μεταξύ (6) και (7): $P(x)\rightarrow S(x)$
9. Καθολική γενίκευση από (8) : $\forall x(P(x)\rightarrow S(x))$

Η (9) δίνει το συμπέρασμα που θέλουμε.