<u>1.</u> (Epp 30) Γράψτε την άρνηση των παρακάτω λογικών προτάσεων:

Α) Ο Γιάννης έχει ύψος 1,80 μέτρα και ζυγίζει τουλάχιστον 90 κιλά.

Β) Το λεωφορείο άργησε ή το ρολόι του Νίκου πήγαινε πίσω.

<u>Λύση:</u>

Α) Ο Γιάννης δεν έχει ύψος 1,80 μέτρα ή ζυγίζει λιγότερο από 90 κιλά.

Β) Το λεωφορείο δεν άργησε και το ρολόι του Νίκου δεν πήγαινε πίσω.

<u>2.</u> (Epp 34) Απλοποιήστε την παρακάτω λογική πρόταση:

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$$

<u>Λύση:</u>

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv$ (De Morgan)
$p \vee (\neg q \wedge q) \equiv$ (επιμεριστική)
$p \vee F \equiv$ (ΚΑΙ αντίθετων μεταβλητών)
p

<u>3.</u> (Epp 40) Γράψτε την άρνηση των παρακάτω λογικών προτάσεων:

Α) Αν το αυτοκίνητό μου είναι στο συνεργείο, τότε δεν μπορώ να πάω για μάθημα.

Β) Αν η Αλίκη ζει στο Μέτσοβο, τότε ζει στην Ελλάδα.

<u>Λύση:</u>

Προκύπτει από την άρνηση της συνεπαγωγής.
Α) Το αυτοκίνητό μου είναι στο συνεργείο και μπορώ να πάω για μάθημα.
Β) Η Αλίκη ζει στον Μέτσοβο και δεν ζει στην Ελλάδα.

4. (Ensley 24) Συναντούμε δύο κατοίκους στο Νησί. Ο Α λέει: «Ακριβώς ένας από εμάς λέει ψέματα» ενώ ο Β λέει «Τουλάχιστον ένας λέει την αλήθεια». Ποιος λέει αλήθεια;

Λύση:

Έστω p «Ο Α λέει αλήθεια» και q «Ο Β λέει αλήθεια.».

p	q	«Ακριβώς ένας από εμάς λέει ψέματα»	«Τουλάχιστον ένας λέει την αλήθεια»
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	T

5. (Ensley 1.3.9) Το s αντιστοιχεί στο «Το ποδόσφαιρο αρέσει στον Χρήστο», το r στο «Το διάβασμα αρέσει στον Χρήστο.» και το p στο «Η πίτσα αρέσει στον Χρήστο.». Γράψτε σε μορφή προτασιακής λογικής τις παρακάτω προτάσεις:

1. «Στον Χρήστο αρέσει η πίτσα αλλά όχι το ποδόσφαιρο.»
2. «Στον Χρήστο αρέσει να διαβάζει και να τρώει πίτσα, ή του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο.»
3. «Στον Χρήστο δεν αρέσει η πίτσα, αλλά του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο ή να διαβάζει.»
4. «Στον Χρήστο αρέσει να κάνει δύο από αυτές τις ασχολίες αλλά όχι και τις τρεις.»

Λύση:

1. $(p \wedge \neg s)$
2. $(p \wedge r) \vee s$
3. $\neg \mathrm{p} \wedge (r \vee s)$
4. $(p \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

6. (Epp 1.1.50) Αποδείξτε την παρακάτω λογική ισοδυναμία:

$$\neg\big((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Λύση:

$\big(\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$

$\big((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ De Morgan

$\big((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \mathrm{q})\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ Επιμεριστική

$\big(p \vee (q \wedge \neg q)\big) \vee (p \wedge q) \equiv$ Ταυτότητα

$(p \vee F) \vee (p \wedge q) \equiv$ Ταυτότητα

$p \vee (p \wedge q) \equiv$ Αφομοίωση

p

7. (Epp 1.3.36) Με δεδομένες τις παρακάτω πληροφορίες για ένα πρόγραμμα υπολογιστή, βρείτε το σφάλμα στο πρόγραμμα.

1. «Υπάρχει μία αδήλωτη μεταβλητή ή ένα συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές.»
2. «Αν υπάρχει ένα συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές, τότε είτε λείπει ένα ελληνικό ερωτηματικό είτε το όνομα μιας μεταβλητής δεν είναι σωστά γραμμένο.»
3. «Δεν λείπει κανένα ελληνικό ερωτηματικό.»
4. «Καμίας μεταβλητής το όνομα δεν είναι γραμμένο λάθος.»

Λύση:

p :«Υπάρχει αδήλωτη μεταβλητή στις πέντε πρώτες γραμμές.»

q :«Υπάρχει συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές.»

r :«Λείπει ελληνικό ερωτηματικό.»

s :«Το όνομα μιας μεταβλητής είναι γραμμένο λάθος.»

Τότε:

$$1\colon (p \vee q)$$

$$2\colon q \rightarrow (r \vee s)$$

$$3\colon \neg r$$

$$4\colon \neg s$$

$\therefore (\neg r \wedge \neg s)$ Από ορισμό

$\therefore \neg(r \vee s)$ De Morgan

$\therefore \neg q$ Modus Tollens $\Big(\big(\neg(r \vee s) \wedge q \rightarrow (r \vee s)\big) \rightarrow \neg q\Big)$

$\therefore p$ Απαλοιφή $\Big(\big((p \vee q) \wedge \neg q\big) \rightarrow p\Big)$

<u>8.</u> (Epp 1.3.39) Ο διάσημος ντετέκτιβ S. Holmes κλήθηκε να εξιχνιάσει έναν μπερδεμένο και μυστήριο φόνο. Προσδιόρισε λοιπόν τα παρακάτω γεγονότα.

1. «Ο λόρδος Hazelton, το θύμα, σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι με ένα μπρούτζινο κηροπήγιο.»
2. «Είτε η λαίδη Hazelton είτε η υπηρέτρια Sara, ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου.»
3. «Αν η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε ο μπάτλερ σκότωσε το λόρδο Hazelton με μία μοιραία δόση στρυχνίνης.»
4. «Αν η λαίδη Hazelton ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σοφέρ σκότωσε τον λόρδο Hazelton.»
5. «Αν η μαγείρισσα δεν ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε η Sara δεν ήταν στο καθιστικό όταν διαπράχτηκε ο φόνος.»
6. «Αν η Sara ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σερβιτόρος σκότωσε το λόρδο Hazelton.»

Από τα παραπάνω γεγονότα, είναι δυνατό ο ντετέκτιβ να προσδιορίσει την ταυτότητα του δολοφόνου; Αν ναι, τότε ποιος είναι ο δολοφόνος; (θεωρήστε ότι υπάρχει μόνο μία αιτία θανάτου).

<u>Λύση:</u>

p : «Ο λόρδος Hazelton σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι»

q : «Ο λόρδος Hazelton δηλητηριάστηκε»

r : «Η λαίδη Hazelton καθόταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου»

s : «Η Sara καθόταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου»

t : «Η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου»

u : «Ο μπάτλερ είναι ο δολοφόνος»

v : «Ο σοφέρ είναι ο δολοφόνος»

w : «Ο σερβιτόρος είναι ο δολοφόνος»

Τότε:

$$1{:}\, p$$

$$2: (r \vee s)$$
$$3: t \rightarrow (u \wedge q)$$
$$4: r \rightarrow v$$
$$5: \neg t \rightarrow \neg s$$
$$6: s \rightarrow w$$
$$Από\ υπόθεση: (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

7. $\therefore \neg q$ Από (1) και υπόθεση
8. $\therefore t \rightarrow F$ αφού από 7 και 3 $(u \wedge q) \wedge \neg q \equiv F$ προσεταιριστική και ταυτότητα
9. $\therefore \neg t$ από (8)
10. $\therefore \neg s$ από (5,9) και Modus Ponens
11. $\therefore r$ από (2,10) και Απαλοιφή
12. $\therefore v$ από (4,11) και Modus Ponens

Άρα ο δολοφόνος είναι ο σοφέρ

9. (2.6.6 κ) Να γίνει ο πίνακας αληθείας της σύνθετης πρότασης:

$$(p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r)$$

Λύση:

Χρειαζόμαστε $2^3=8$ γραμμές αφού έχουμε 3 μεταβλητές.

p	q	r	¬r	p∨¬r	q∨¬r	(p∨¬r)∧(q∨¬r)
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T

10. (2.6.7 ζ) Να εξεταστεί αν η παρακάτω σύνθετη πρόταση είναι αντίφαση ή ταυτολογία:

$$p\rightarrow(q\wedge r)\leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$$

Προσοχή $(p\rightarrow q)$ είναι F μόνο όταν $(T\rightarrow F)$

Λύση:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\rightarrow(q\wedge r)$	$p\rightarrow q$	$p\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$	$p\rightarrow(q\vee r)\leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Άρα είναι ταυτολογία.

11. (2.6.9) Να δειχτεί με πράξεις ότι η παράσταση $(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ απλοποιείται στην $(p\wedge q)\vee r$

$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\equiv$

$\equiv [(p\wedge\neg q)\wedge r]\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

$\equiv\{[(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)]\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας

$\equiv\{[(p\wedge(\neg q\vee q)]\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ κοινός παράγοντας

$\equiv\{p\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ το $(\neg q\vee q)$ είναι T

$\equiv (p\wedge r)\vee(p\wedge p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ επιμεριστική

$\equiv (p\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ το $p\wedge p$ είναι p

$\equiv [(p\vee\neg p)\wedge r]\vee(p\wedge q)$ κοινός παράγοντας

$\equiv r\vee(p\wedge q)$ το $(\neg p\vee p)$ είναι T

Αποδείχτηκε.

<u>12.</u> Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία χωρίς τη χρήση πίνακα αληθείας.

$$\big((p \to q) \land \neg\mathrm{q}\big) \to \neg\mathrm{p}$$

<u>Λύση:</u>

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$((\neg p \lor q) \land \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$((\neg p \land \neg\mathrm{q}) \lor (q \land \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$(\neg p \land \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$\neg(\neg p \land \neg q) \lor \neg p \equiv$$
$$p \lor q \lor \neg p \equiv 1 \lor q \equiv 1$$

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Bradley 3.4.19) Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία.

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$