ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 11/09/2024

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 40 λεπτά – Ομάδα **Α**

Στις παρακάτω ασκήσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίζετε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές εκτός και αν σας ζητείται ρητά. Σε κάθε περίπτωση, απαγορεύεται η χρήση οποιασδήποτε υπολογιστικής μηχανής.

Θέματα Μικρής Δυσκολίας (5 μονάδες)[1]

1. (1,2) Έστω ότι W είναι το σύνολο όλων των λέξεων στη φράση «Τα άδεια σακιά τα φουσκώνει ο αέρας και τους ανόητους η έπαρση» (Σωκράτης). Ορίζουμε μία σχέση R επί του W ως εξής: για οποιεσδήποτε λέξεις $w_1, w_2 \in W$, ισχύει ότι $(w_1, w_2) \in R$ αν το πρώτο γράμμα της w_1 είναι ίδιο με το πρώτο γράμμα της w_2, ανεξάρτητα αν είναι πεζά ή κεφαλαία (ο τόνος δεν παίζει ρόλο). α) (0,8) Αποδείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. β) (0,4) Καταγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της R.

2. (1,2) Λέμε ότι δύο διατεταγμένα ζεύγη (α, β) και (γ, δ) είναι ισοδύναμα (γράφουμε $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$), αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Έστω s η πρόταση:

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\forall\delta\left(\left((\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)\right) \to (\alpha = \gamma)\right)$$

α) (0,2) Είναι αληθής η πρόταση s;
β) (0,2) Γράψτε την αντίστροφη της s.
γ) (0,2) Είναι αληθής η αντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
δ) (0,3) Γράψτε την αντιθετοαντίστροφη της s.
ε) (0,3) Είναι αληθής η αντιθετοαντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

3. (1,6) Δώστε την απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις (χωρίς αιτιολόγηση – ίδιος βαθμός όλα τα υποερωτήματα):

1. Αν υπάρχουν 8 διαφορετικά χρώματα και 4 διαφορετικά κουτιά, με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε ένα χρωματιστό κουτί (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα χρώμα μόνο χωρίς μίξη);
2. Για πρωϊνό μπορείτε να επιλέξετε είτε να έχετε ένα φρούτο από 10 διαφορετικά φρούτα ή έναν χυμό από 4 διαφορετικούς χυμούς αλλά όχι και τα δύο. Αυτό μπορείτε να το συνδυάσετε είτε με αυγό ή με βραστά φασόλια αλλά όχι και τα δυο. Πόσα διαφορετικά πρωϊνά υπάρχουν;
3. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής πεντάδας στο μπάσκετ από έντεκα συνολικά παίκτες όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά;
4. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής πεντάδας στο μπάσκετ από έντεκα συνολικά παίκτες όταν ο κάθε παίκτης της πεντάδας έχει συγκεκριμένο ρόλο;
5. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής πεντάδας στο μπάσκετ από έντεκα συνολικά παίκτες χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά ένας από αυτούς πρέπει να οριστεί ως αρχηγός;
6. Ποιο είναι το πλήθος των μικτών ομάδων ποδοσφαίρου με 6 κορίτσια και 5 αγόρια από συνολικά 10 κορίτσια και 10 αγόρια;
7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 20 σοκολάτες τεσσάρων διαφορετικών τύπων;
8. Έστω ότι $|A| = 6$, $|B| = 8$ και $|A \cup B| = 8$, τότε πόσο είναι το $|A \cap B|$;

4. (1) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι αν ο φυσικός αριθμός n διαιρείται τέλεια από το 3, τότε και ο αριθμός $n^2 + 2n$ διαιρείται τέλεια από το 3.
Υπόδειξη: Ασχοληθείτε μόνο με τα πολλαπλάσια του 3 στην επαγωγική σας απόδειξη.

Θέματα Μεσαίας Δυσκολίας (5,5 μονάδες)

5. (1,5) α) (1) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(n-i)$ χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$, όπου H_n είναι ο n-οστός αρμονικός αριθμός.

[1] Ο βαθμός δυσκολίας προφανώς είναι εν μέρει υποκειμενικός και εξαρτάται εν πολλοίς από το βαθμό κατανόησης της αντίστοιχης ύλης από τον φοιτητή.

β) (0,5) Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω υπολογισμό σχετικά με ένα άθροισμα και κάντε τη σωστή επιλογή όπου σας ζητείται κάτι τέτοιο:

«Για να αποδείξουμε ότι $H_n \geq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκληρώματος για να φράξουμε την τιμή του αθροίσματος. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα ________________ ***(κάτω ή πάνω – επιλέξτε ένα από τα δύο)*** φράγμα του αθροίσματος που είναι ίσο με την τιμή του $\int_a^b \frac{1}{x^d}\, dx$ όπου:

$a =$________________, $b =$________________, και $d =$________________.

6. (2) Σας δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις ως δεδομένα:

- Αν έχει ήλιο, τότε η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.
- Αν η Αλίκη πάει για τρέξιμο, τότε ο Μπομπ δεν διαβάζει.
- Αν ο Μπομπ δεν διαβάζει, τότε η Κάρολ πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
- Η Κάρολ δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
- Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
- Δεν βρέχει.

Να κάνετε τα εξής:

α) (1) Αφού δημιουργήσετε προτασιακά σύμβολα, να εκφράσετε τις παραπάνω προτάσεις χρησιμοποιώντας τα προτασιακά σύμβολα που ορίσατε και τις πράξεις $\wedge, \vee, \neg$.

β) (1) Να δείξετε αν υπάρχει κάποια αντίφαση ή όχι στις παραπάνω προτάσεις. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει περίπτωση από τις παραπάνω προτάσεις να φτάσετε σε συμπεράσματα που μία πρόταση s και η αντίθετή της $\neg s$ έχουν την ίδια τιμή αληθείας; (προφανώς κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει)

7. (2) Έστω U ένα σύνολο 100 φοιτητών σε ένα πανεπιστήμιο. Κάθε φοιτητής μπορεί να είναι εγγεγραμμένος σε κανένα ή τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα τρία μαθήματα: Μαθηματικά (M), Πληροφορική (Π) και Φυσική (Φ). Σας δίνονται οι εξής πληροφορίες:

1. Στα Μαθηματικά είναι εγγεγραμμένοι 50 φοιτητές.
2. Στην Πληροφορική είναι εγγεγραμμένοι 40 φοιτητές.
3. Στη Φυσική είναι εγγεγραμμένοι 30 φοιτητές.
4. 20 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στα Μαθηματικά και στην Πληροφορική.
5. 15 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στα Μαθηματικά και στη Φυσική.
6. 10 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στην Πληροφορική και στη Φυσική.
7. 5 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι και στα τρία μαθήματα.

Πόσοι μαθητές είναι εγγεγραμμένοι σε ένα ακριβώς μάθημα;

Θέμα Αυξημένης Δυσκολίας (2 μονάδες)

8. (2) Ένας ισχυρός μάγος έχει 5 μαγικές σφαίρες διαφορετικών χρωμάτων (κόκκινο, μπλε, πράσινο, κίτρινο και μωβ) και 3 μαγικά σεντούκια. Ο μάγος πρέπει να μοιράσει αυτές τις μαγικές σφαίρες στα σεντούκια, αλλά κάθε σεντούκι έχει μοναδικές μαγικές ιδιότητες που επηρεάζουν την τοποθέτηση των σφαιρών:

- Το πρώτο σεντούκι μπορεί να χωρέσει οποιονδήποτε αριθμό σφαιρών.
- Το δεύτερο σεντούκι είναι πολύ επιλεκτικό και χωράει το πολύ μια σφαίρα.
- Το τρίτο σεντούκι μπορεί να χωρέσει τουλάχιστον μία σφαίρα αλλά όχι περισσότερες από δύο σφαίρες.

α) (1) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο μάγος να μοιράσει τις 5 μαγικές σφαίρες στα 3 σεντούκια, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητές τους;

β) (1) Εάν όλες οι σφαίρες έχουν το ίδιο χρώμα (δηλαδή, όλες οι σφαίρες είναι ίδιες), με πόσους τρόπους μπορεί ο μάγος να μοιράσει τις σφαίρες στα σεντούκια, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητές τους;

Καλή Επιτυχία!!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) Η R είναι ανακλαστική. Πράγματι, για κάθε $w \in W$, ισχύει ότι $(w, w) \in R$ αφού η λέξη w έχει ίδιο το πρώτο γράμμα με τον εαυτό της.

Η R είναι συμμετρική αφού αν $(w_1, w_2) \in R$, τότε η w_1 έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την w_2 και άρα και αντίστροφα η w_2 έχει ίδιο γράμμα με την w_1. Επομένως, $(w_2, w_1) \in R$, και άρα είναι συμμετρική.

Η R είναι μεταβατική αφού αν $(w_1, w_2) \in R$ και $(w_2, w_3) \in R$, τότε η w_1 έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την w_2 και η w_2 έχει ίδιο γράμμα με την w_3. Άρα, και η w_1 θα έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την w_3. Επομένως, $(w_1, w_3) \in R$, και άρα είναι μεταβατική.

β) Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι: $\{Τα, τα, τους\}, \{άδεια, αέρας, ανόητους,\}, \{σακιά\}, \{φουσκώνει\}, \{ο\}, \{και\}, \{η\}, \{έπαρση\}$.

2. α) Ναι. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

β) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\forall\delta\left((\alpha = \gamma) \rightarrow \left((\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)\right)\right)$

γ) Είναι ψευδής αφού για τα ζεύγη $(5,7)$ και $(5,10)$ ισχύει η υπόθεση αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα αφού $(5,7) \neq (5,10)$.

δ) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\forall\delta\left((\alpha \neq \gamma) \rightarrow \left((\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)\right)\right)$

γ) Είναι αληθής αφού κάθε συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της.

3.

1. 32=8×4 (κανόνας γινομένου)
2. $28 = 2(10 + 4)$ (κανόνας αθροίσματος και κανόνας γινομένου)
3. $\binom{11}{5}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά και δεν έχουμε επανατοποθέτηση
4. $P(11,5)$ μας ενδιαφέρει η σειρά και δεν έχουμε επανατοποθέτηση
5. $5\binom{11}{5}$ κανόνας γινομένου και συνδυασμοί
6. $\binom{10}{6}\binom{10}{5}$
7. $\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά και έχουμε επανατοποθέτηση.
8. $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 6 + 8 - 8 = 6$ (από εγκλεισμό-αποκλεισμό)

4.

Βάση της επαγωγής: $n = 0$. Πράγματι το 0 διαιρείται τέλεια από το 3 ενώ και το $0^2 + 2 * 0 = 0$ προφανώς διαιρείται τέλεια από το 3.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για n που διαιρείται τέλεια από το 3 ισχύει ότι και το $n^2 + 2n$ διαιρείται τέλεια από το 3.

Αφού μας ενδιαφέρουν μόνο τα ακέραια πολλαπλάσια του 3, θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και για $n + 3$. Προσέξτε ότι το $n + 1$ δεν διαιρείται από το 3 και το ίδιο ισχύει και για το $n + 2$. Πράγματι:

$$(n + 3)^2 + 2(n + 3) = n^2 + 6n + 9 + 2n + 6 = (n^2 + 2n) + 3(2n + 5)$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος διαιρείται τέλεια από το 3 λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ενώ ο δεύτερος όρος διαιρείται τέλεια από το 3 αφού αποτελεί ακέραιο πολλαπλάσιό του. Άρα το $(n + 3)^2 + 2(n + 3)$ διαιρείται από το 3 και από απλή επαγωγή αποδείχτηκε η πρόταση.

5.

α)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(n-i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}-\frac{i}{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}-1\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}-\sum_{i=1}^{n}1=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-n=n(H_n-1)$$

β) άνω, $a=1$, $b=n$, και $d=1$.

6.

α) Καταρχάς ορίζουμε τα προτασιακά σύμβολα:

S: «Έχει ήλιο.»

A: «Η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.»

B: «Ο Μπομπ διαβάζει.»

C: «Η Κάρολ πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.

N: «Βρέχει.»

1. $S \rightarrow A$ Αν έχει ήλιο, τότε η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.
2. $A \rightarrow \neg B$ Αν η Αλίκη πάει για τρέξιμο, τότε ο Μπομπ δεν διαβάζει.
3. $\neg B \rightarrow C$ Αν ο Μπομπ δεν διαβάζει, τότε η Κάρολ πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
4. $\neg C$ Η Κάρολ δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
5. $S \vee N$ Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
6. $\neg N$ Δεν βρέχει.

β)

Θα προσπαθήσουμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω προτάσεις για να δούμε αν φτάνουμε σε κάποια αντίφαση.

7. S (από (6) και (5) και διάζευξη)

8. A (από (7) και (1) και modus ponens)

9. $\neg B$ (από (8) και (2) και modus ponens)

10. C (από (9) και (3) και modus ponens)

Εδώ βρίσκουμε την αντίφαση μεταξύ της (10) και της (4), που και οι δύο επιβάλλουν τη λογική πρόταση C να είναι ταυτόχρονα Αληθής και Ψευδής.

7.

Έστω ότι το σύμπαν είναι το U. Έστω το σύνολο M των φοιτητών που έχουν δηλώσει Μαθηματικά, το σύνολο Π των φοιτητών που έχουν δηλώσει Πληροφορική και έστω Φ το σύνολο των φοιτητών που έχουν δηλώσει Φυσική.

Σε συνολοθεωρητική γραφή τα δεδομένα γράφονται ως εξής:

1. $|M| = 50$
2. $|\Pi| = 40$
3. $|\Phi| = 30$
4. $|M \cap \Pi| = 20$
5. $|M \cap \Phi| = 15$
6. $|\Phi \cap \Pi| = 10$

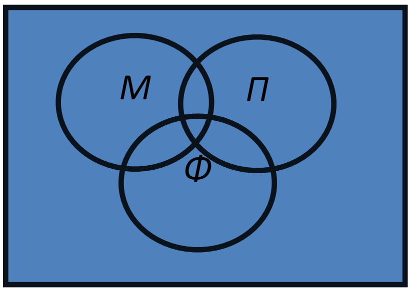
7. $|M \cap \Pi \cap \Phi| = 5$

Από εγκλεισμό-αποκλεισμό θα βρούμε το πλήθος των φοιτητών που έχουν δηλώσει τουλάχιστον ένα μάθημα.

$$|M \cup \Pi \cup \Phi| = |M| + |\Pi| + |\Phi| - |M \cap \Pi| - |M \cap \Phi| - |\Phi \cap \Pi| + |M \cap \Pi \cap \Phi| \Rightarrow$$
$$|M \cup \Pi \cup \Phi| = 50 + 40 + 30 - 20 - 15 - 10 + 5 \Rightarrow |M \cup \Pi \cup \Phi| = 80$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συνολικά 80 φοιτητές που είναι εγγεγραμμένοι σε τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα.

Θα βρούμε τον αριθμό των φοιτητών που έχουν δηλώσει ακριβώς ένα μάθημα. Για να το κάνουμε αυτό πρώτα σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα Venn:



Για τα Μαθηματικά: από το διάγραμμα Venn, φαίνεται ότι μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$|M - (\Phi \cup \Pi)| = |M| - |\Pi \cap M| - |M \cap \Phi| + |M \cap \Pi \cap \Phi| = 50 - 20 - 15 + 5 = 20$$

Ομοίως για Πληροφορική:

$$|\Pi - (\Phi \cup M)| = |\Pi| - |\Pi \cap M| - |\Pi \cap \Phi| + |M \cap \Pi \cap \Phi| = 40 - 20 - 10 + 5 = 15$$

Ομοίως για Φυσική:

$$|\Phi - (M \cup \Pi)| = |\Phi| - |\Phi \cap M| - |\Pi \cap \Phi| + |M \cap \Pi \cap \Phi| = 30 - 15 - 10 + 5 = 10$$

Άρα σε ένα ακριβώς μάθημα είναι εγγεγραμμένοι 45 φοιτητές.

8.

Έστω ότι: Σ1: Πρώτο σεντούκι, Σ2: Δεύτερο σεντούκι, Σ3: Τρίτο Σεντούκι.

α)

Παίρνουμε περιπτώσεις με βάση το Σ2 και το Σ3:

Σ2,Σ3: 0,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 5 τρόπους. Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 5

Σ2,Σ3: 0,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 10

Σ2,Σ3: 1,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 5 τρόπους και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 4 τρόπους. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο από κανόνα γινομένου: 20

Σ2,Σ3: 1,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 5 τρόπους και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους. Οι υπόλοιπες 2 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο από κανόνα γινομένου: 30

Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το σύνολο των τρόπων να τοποθετηθούν οι σφαίρες είναι: 30+20+10+5=65 τρόποι.

β)

Παίρνουμε περιπτώσεις με βάση το Σ2 και το Σ3:

Σ2,Σ3: 0,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 0,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο αφού οι σφαίρες είναι ίδιες. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 1,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 1,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 2 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το σύνολο των τρόπων να τοποθετηθούν οι σφαίρες είναι: 1+1+1+1=4 τρόποι.

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 11/09/2024

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 40 λεπτά – Ομάδα ***B***

Στις παρακάτω ασκήσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίζετε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές εκτός και αν σας ζητείται ρητά. Σε κάθε περίπτωση, απαγορεύεται η χρήση οποιασδήποτε υπολογιστικής μηχανής.

Θέματα Μικρής Δυσκολίας (5 μονάδες)[2]

1. (1,2) Λέμε ότι δύο διατεταγμένα ζεύγη (x, y) και (z, w) είναι ισοδύναμα (γράφουμε $(x, y) = (z, w)$), αν $x = z$ και $y = w$. Έστω p η πρόταση:

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \left(\left((x, y) = (z, w)\right) \rightarrow (x = z)\right)$$

α) (0,2) Είναι αληθής η πρόταση s;
β) (0,2) Γράψτε την αντίστροφη της s.
γ) (0,2) Είναι αληθής η αντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
δ) (0,3) Γράψτε την αντιθετοαντίστροφη της s.
ε) (0,3) Είναι αληθής η αντιθετοαντίστροφή της. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

2. (1,6) Δώστε την απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις (χωρίς αιτιολόγηση – ίδιος βαθμός όλα τα υποερωτήματα):

1. Αν υπάρχουν 12 διαφορετικά χρώματα και 3 διαφορετικά κουτιά, με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε ένα χρωματιστό κουτί (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα χρώμα μόνο χωρίς μίξη);
2. Για πρωϊνό μπορείτε να επιλέξετε είτε να έχετε ένα φρούτο από 8 διαφορετικά φρούτα ή έναν χυμό από 8 διαφορετικούς χυμούς αλλά όχι και τα δύο. Αυτό μπορείτε να το συνδυάσετε είτε με αυγό ή με βραστά φασόλια αλλά όχι και τα δυο. Πόσα διαφορετικά πρωϊνά υπάρχουν;
3. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής ενδεκάδας στο ποδόσφαιρο από δεκαοχτώ συνολικά παίκτες όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά;
4. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής ενδεκάδας στο ποδόσφαιρο από δεκαοχτώ συνολικά παίκτες όταν ο κάθε παίκτης της ενδεκάδας έχει συγκεκριμένο ρόλο;
5. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής της αρχικής ενδεκάδας στο ποδόσφαιρο από δεκαοχτώ συνολικά παίκτες χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά ένας από αυτούς πρέπει να οριστεί ως αρχηγός;
6. Ποιο είναι το πλήθος των μικτών ομάδων ποδοσφαίρου με 7 κορίτσια και 4 αγόρια από συνολικά 9 κορίτσια και 9 αγόρια;
7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 15 τσίχλες επτά διαφορετικών τύπων;
8. Έστω ότι $|A| = 8$, $|B| = 6$ και $|A \cup B| = 14$, τότε πόσο είναι το $|A \cap B|$;

3. (1) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι αν ο φυσικός αριθμός m διαιρείται τέλεια από το 3, τότε και ο αριθμός $m^2 + 2m$ διαιρείται τέλεια από το 3.
Υπόδειξη: Ασχοληθείτε μόνο με τα πολλαπλάσια του 3 στην επαγωγική σας απόδειξη.

4. (1,2) Έστω ότι X είναι το σύνολο όλων των λέξεων στη φράση «Η μόρφωση, όπως ακριβώς μια εύφορη γη, φέρνει όλα τα καλά» (Σωκράτης). Ορίζουμε μία σχέση R επί του X ως εξής: για οποιεσδήποτε λέξεις $x_1, x_2 \in X$, ισχύει ότι $(x_1, x_2) \in R$ αν το πρώτο γράμμα της x_1 είναι ίδιο με το πρώτο γράμμα της x_2, ανεξάρτητα αν είναι πεζά ή κεφαλαία (ο τόνος δεν παίζει ρόλο). α) (0,8) Αποδείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. β) (0,4) Καταγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της R.

Θέματα Μεσαίας Δυσκολίας (5,5 μονάδες)

5. (2) Σας δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις ως δεδομένα:

- Αν έχει ήλιο, τότε η Ασπασία πηγαίνει για τρέξιμο.

[2] Ο βαθμός δυσκολίας προφανώς είναι εν μέρει υποκειμενικός και εξαρτάται εν πολλοίς από το βαθμό κατανόησης της αντίστοιχης ύλης από τον φοιτητή.

- Αν η Ασπασία πάει για τρέξιμο, τότε ο Αγαθοκλής δεν διαβάζει.
- Αν ο Αγαθοκλής δεν διαβάζει, τότε η Μελπομένη πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
- Η Μελπομένη δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
- Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
- Δεν βρέχει.

Να κάνετε τα εξής:
α) (1) Αφού δημιουργήσετε προτασιακά σύμβολα, να εκφράσετε τις παραπάνω προτάσεις χρησιμοποιώντας τα προτασιακά σύμβολα που ορίσατε και τις πράξεις $\wedge, \vee, \neg$.
β) (1) Να δείξετε αν υπάρχει κάποια αντίφαση ή όχι στις παραπάνω προτάσεις. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει περίπτωση από τις παραπάνω προτάσεις να φτάσετε σε συμπεράσματα που μία πρόταση s και η αντίθετή της $\neg s$ έχουν την ίδια τιμή αληθείας; (προφανώς κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει)

6. (2) Έστω U ένα σύνολο 200 φοιτητών σε ένα πανεπιστήμιο. Κάθε φοιτητής μπορεί να είναι εγγεγραμμένος σε κανένα ή τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα τρία μαθήματα: Γεωπονία (Γ), Γεωλογία (Λ) και Ζωολογία (Z). Σας δίνονται οι εξής πληροφορίες:

1. Στη Γεωπονία είναι εγγεγραμμένοι 50 φοιτητές.
2. Στη Γεωλογία είναι εγγεγραμμένοι 40 φοιτητές.
3. Στη Ζωολογία είναι εγγεγραμμένοι 30 φοιτητές.
4. 20 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στη Γεωπονία και στη Γεωλογία.
5. 15 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στη Γεωπονία και στη Ζωολογία.
6. 10 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι στη Γεωλογία και στη Ζωολογία.
7. 5 φοιτητές είναι εγγεγραμμένοι και στα τρία μαθήματα.

Πόσοι μαθητές είναι εγγεγραμμένοι σε ένα ακριβώς μάθημα;

7. (1,5) α) (1) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(n-k)$ χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$, όπου H_n είναι ο n-οστός αρμονικός αριθμός.
β) (0,5) Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω υπολογισμό σχετικά με ένα άθροισμα και κάντε τη σωστή επιλογή όπου σας ζητείται κάτι τέτοιο:
«Για να αποδείξουμε ότι $H_{n+1} - 1 \leq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκληρώματος για να φράξουμε την τιμή του αθροίσματος. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα __________________ ***(κάτω ή πάνω – επιλέξτε ένα από τα δύο)*** φράγμα του αθροίσματος που είναι ίσο με την τιμή του $\int_a^b \frac{1}{x^d}\, dx$ όπου:
$a =$__________________, $b =$__________________, και $d =$__________________.

Θέμα Αυξημένης Δυσκολίας (2 μονάδες)

8. (2) Ένας ισχυρός μάγος έχει 6 μαγικές σφαίρες διαφορετικών χρωμάτων (κόκκινο, μπλε, πράσινο, κίτρινο, μωβ και πορτοκαλί) και 3 μαγικά σεντούκια. Ο μάγος πρέπει να μοιράσει αυτές τις μαγικές σφαίρες στα σεντούκια, αλλά κάθε σεντούκι έχει μοναδικές μαγικές ιδιότητες που επηρεάζουν την τοποθέτηση των σφαιρών:

- Το πρώτο σεντούκι μπορεί να χωρέσει οποιονδήποτε αριθμό σφαιρών.
- Το δεύτερο σεντούκι είναι πολύ επιλεκτικό και χωράει το πολύ μια σφαίρα.
- Το τρίτο σεντούκι μπορεί να χωρέσει τουλάχιστον μία σφαίρα αλλά όχι περισσότερες από δύο σφαίρες.

α) (1) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο μάγος να μοιράσει τις 6 μαγικές σφαίρες στα 3 σεντούκια, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητές τους;
β) (1) Εάν όλες οι σφαίρες έχουν το ίδιο χρώμα (δηλαδή, όλες οι σφαίρες είναι ίδιες), με πόσους τρόπους μπορεί ο μάγος να μοιράσει τις σφαίρες στα σεντούκια, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητές τους;

Καλή Επιτυχία!!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) Ναι. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

β) $\forall x \forall y \forall z \forall w \left((x = z) \rightarrow \left((x, y) = (z, w) \right) \right)$

γ) Είναι ψευδής αφού για τα ζεύγη $(5,7)$ και $(5,10)$ ισχύει η υπόθεση αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα αφού $(5,7) \neq (5,10)$.

δ) $\forall x \forall y \forall z \forall w \left((x \neq z) \rightarrow \left((x, y) \neq (z, w) \right) \right)$

γ) Είναι αληθής αφού κάθε συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της.

2.

1. 36=12×3 (κανόνας γινομένου)
2. $32 = 2(8 + 8)$ (κανόνας αθροίσματος και κανόνας γινομένου)
3. $\binom{18}{11}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά και δεν έχουμε επανατοποθέτηση
4. $P(18,11)$ μας ενδιαφέρει η σειρά και δεν έχουμε επανατοποθέτηση
5. $11\binom{18}{11}$ κανόνας γινομένου και συνδυασμοί
6. $\binom{9}{7}\binom{9}{4}$
7. $\binom{15+7-1}{15} = \binom{21}{15}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά και έχουμε επανατοποθέτηση.
8. $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 8 + 6 - 14 = 0$ (από εγκλεισμό-αποκλεισμό)

3. Βάση της επαγωγής: $m = 0$. Πράγματι το 0 διαιρείται τέλεια από το 3 ενώ και το $0^2 + 2 * 0 = 0$ προφανώς διαιρείται τέλεια από το 3.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για m που διαιρείται τέλεια από το 3 ισχύει ότι και το $m^2 + 2m$ διαιρείται τέλεια από το 3.

Αφού μας ενδιαφέρουν μόνο τα ακέραια πολλαπλάσια του 3, θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και για $m + 3$. Προσέξτε ότι το $m + 1$ δεν διαιρείται από το 3 και το ίδιο ισχύει και για το $m + 2$. Πράγματι:

$$(m + 3)^2 + 2(m + 3) = m^2 + 6m + 9 + 2m + 6 = (m^2 + 2m) + 3(2m + 5)$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος διαιρείται τέλεια από το 3 λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ενώ ο δεύτερος όρος διαιρείται τέλεια από το 3 αφού αποτελεί ακέραιο πολλαπλάσιό του. Άρα το $(m + 3)^2 + 2(m + 3)$ διαιρείται από το 3 και από απλή επαγωγή αποδείχτηκε η πρόταση.

4. α) Η R είναι ανακλαστική. Πράγματι, για κάθε $x \in X$, ισχύει ότι $(x, x) \in R$ αφού η λέξη x έχει ίδιο το πρώτο γράμμα με τον εαυτό της.

Η R είναι συμμετρική αφού αν $(x_1, x_2) \in R$, τότε η x_1 έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την x_2 και άρα και αντίστροφα η x_2 έχει ίδιο γράμμα με την x_1. Επομένως, $(x_2, x_1) \in R$, και άρα είναι συμμετρική.

Η R είναι μεταβατική αφού αν $(x_1, x_2) \in R$ και $(x_2, x_3) \in R$, τότε η x_1 έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την x_2 και η x_2 έχει ίδιο γράμμα με την x_3. Άρα, και η x_1 θα έχει το ίδιο πρώτο γράμμα με την x_3. Επομένως, $(x_1, x_3) \in R$, και άρα είναι μεταβατική.

β) Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι: $\{H\}, \{μόρφωση, μια\}, \{όπως, όλα\}, \{ακριβώς\}, \{εύφορη\}, \{γη\}, \{φέρνει\}, \{τα\}, \{καλά\}$.

5.

α) Καταρχάς ορίζουμε τα προτασιακά σύμβολα:

S: «Έχει ήλιο.»

A: «Η Ασπασία πηγαίνει για τρέξιμο.»

B: «Ο Αγαθοκλής διαβάζει.»

C: «Η Μελπομένη πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.

N: «Βρέχει.»

1. $S \rightarrow A$	Αν έχει ήλιο, τότε η Ασπασία πηγαίνει για τρέξιμο.
2. $A \rightarrow \neg B$	Αν η Ασπασία πάει για τρέξιμο, τότε ο Αγαθοκλής δεν διαβάζει.
3. $\neg B \rightarrow C$	Αν ο Αγααθοκλής δεν διαβάζει, τότε η Μελπομένη πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
4. $\neg C$	Η Μελπομένη δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
5. $S \vee N$	Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
6. $\neg N$	Δεν βρέχει.

β)

Θα προσπαθήσουμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω προτάσεις για να δούμε αν φτάνουμε σε κάποια αντίφαση.

7. S (από (6) και (5) και διάζευξη)

8. A (από (7) και (1) και modus ponens)

9. $\neg B$ (από (8) και (2) και modus ponens)

10. C (από (9) και (3) και modus ponens)

Εδώ βρίσκουμε την αντίφαση μεταξύ της (10) και της (4), που και οι δύο επιβάλλουν τη λογική πρόταση C να είναι ταυτόχρονα Αληθής και Ψευδής.

6.

Έστω ότι το σύμπαν είναι το U. Έστω το σύνολο Γ των φοιτητών που έχουν δηλώσει Γεωπονία, το σύνολο Λ των φοιτητών που έχουν δηλώσει Γεωλογία και έστω Z το σύνολο των φοιτητών που έχουν δηλώσει Ζωολογία.

Σε συνολοθεωρητική γραφή τα δεδομένα γράφονται ως εξής:

1. $|\Gamma| = 50$
2. $|\Lambda| = 40$
3. $|Z| = 30$
4. $|\Gamma \cap \Lambda| = 20$
5. $|\Gamma \cap Z| = 15$
6. $|\Lambda \cap Z| = 10$
7. $|\Gamma \cap \Lambda \cap Z| = 5$

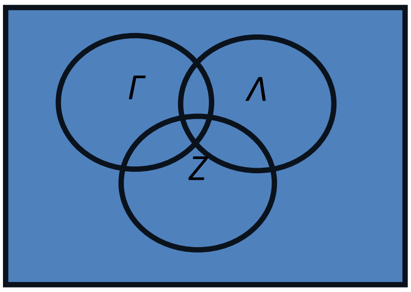
Από εγκλεισμό-αποκλεισμό θα βρούμε το πλήθος των φοιτητών που έχουν δηλώσει τουλάχιστον ένα μάθημα.

$$|\Gamma \cup \Lambda \cup Z| = |\Gamma| + |\Lambda| + |Z| - |\Gamma \cap \Lambda| - |\Gamma \cap Z| - |\Lambda \cap Z| + |\Gamma \cap \Lambda \cap Z| \Rightarrow$$

$$|\Gamma \cup \Lambda \cup Z| = 50 + 40 + 30 - 20 - 15 - 10 + 5 \Rightarrow |\Gamma \cup \Lambda \cup Z| = 80$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συνολικά 80 φοιτητές που είναι εγγεγραμμένοι σε τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα.

Θα βρούμε τον αριθμό των φοιτητών που έχουν δηλώσει ακριβώς ένα μάθημα. Για να το κάνουμε αυτό πρώτα σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα Venn:



Για τη Γεωπονία: από το διάγραμμα Venn, φαίνεται ότι μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$|\Gamma - (\Lambda \cup Z)| = |\Gamma| - |\Gamma \cap \Lambda| - |\Gamma \cap Z| + |\Gamma \cap \Lambda \cap Z| = 50 - 20 - 15 + 5 = 20$$

Ομοίως για Γεωλογία:

$$|\Lambda - (\Gamma \cup Z)| = |\Lambda| - |\Lambda \cap \Gamma| - |\Lambda \cap Z| + |\Gamma \cap \Lambda \cap Z| = 40 - 20 - 10 + 5 = 15$$

Ομοίως για Ζωολογία:

$$|Z - (\Gamma \cup \Lambda)| = |Z| - |Z \cap \Gamma| - |Z \cap \Lambda| + |\Gamma \cap \Lambda \cap Z| = 30 - 15 - 10 + 5 = 10$$

Άρα σε ένα ακριβώς μάθημα είναι εγγεγραμμένοι 45 φοιτητές.

7.

α)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(n-k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} - \frac{k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1 = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n = n(H_n - 1)$$

β) κάτω, $a = 2$, $b = n + 1$, και $d = 1$.

8.

Έστω ότι: Σ1: Πρώτο σεντούκι, Σ2: Δεύτερο σεντούκι, Σ3: Τρίτο Σεντούκι.

α)

Παίρνουμε περιπτώσεις με βάση το Σ2 και το Σ3:

Σ2,Σ3: 0,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 6 τρόπους. Οι υπόλοιπες 5 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 6

Σ2,Σ3: 0,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{6}{2} = 15$ τρόπους. Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 15

Σ2,Σ3: 1,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 6 τρόπους και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 5 τρόπους. Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο από κανόνα γινομένου: 30

Σ2,Σ3: 1,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 6 τρόπους και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο από κανόνα γινομένου: 60

Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το σύνολο των τρόπων να τοποθετηθούν οι σφαίρες είναι: 60+30+15+6=111 τρόποι.

β)

Παίρνουμε περιπτώσεις με βάση το Σ2 και το Σ3:

Σ2,Σ3: 0,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 0,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο αφού οι σφαίρες είναι ίδιες. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 1,1

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 3 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Σ2,Σ3: 1,2

Για το Σ2, μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο και για το Σ3 αυτό μπορεί να συμβεί με 1 τρόπο. Οι υπόλοιπες 2 σφαίρες πέφτουν στο Σ1 με έναν τρόπο. Άρα σύνολο: 1

Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το σύνολο των τρόπων να τοποθετηθούν οι σφαίρες είναι: 1+1+1+1=4 τρόποι.