Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ 29 Αυγούστου 2023

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας.	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :

ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν εννέα (9) προβλήματα με ερωτήσεις

- του τύπου "Σωστό/Λάθος" και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο.
- με την ένδειξη □ στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία. Ως πρόχειρο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις λευκές σελίδες (άρτιες) του φυλλαδίου.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 50 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Τα μητρώα A και B είναι τέτοια ώστε το γινόμενο AB^{T} ορίζεται.
Αν το A είναι $n \times m$, το B^{T} πρέπει να είναι $m \times k$, οπότε το B είναι $k \times m$.

(α΄) Το BA^{T} ορίζεται. Σ Λ

Εδώ οι διαστάσεις κατά τη σειρά του γινομένου, είναι $(k \times m)(m \times n)$, άρα το γινόμενο ορίζεται.

Διαφορετικά, αφού το AB^{T} ορίζεται, ορίζεται και το ανάστροφο $(AB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA^{\mathrm{T}}$.

(β΄) Το $A^{\mathrm{T}}B$ ορίζεται. Σ Λ

Οι διαστάσεις κατά τη σειρά του γινομένου, είναι $(m\times n)(k\times m)$, κατά συνέπεια το γινόμενο δεν ορίζεται.

(γ΄) Αν το AB ορίζεται, το B είναι τετραγωνικό. Σ Λ

Οι διαστάσεις κατά τη σειρά του γινομένου, είναι $(n \times m)(k \times m)$ και αφού το γινόμενο ορίζεται θα πρέπει να είναι $k = m$, κατά συνέπεια το B έχει διάσταση $m \times m$, ισοδύναμα το B είναι τετραγωνικό.

Θ2. Θεωρήστε το υποσύνολο των μητρώων

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(α΄) Το $\mathcal{M}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Σ Λ

Αν A, B είναι στοιχεία του $\mathcal{M}$ και λ είναι πραγματικός αριθμός τα $A+B$ και λA διατηρούν τα μηδενικά στοιχεία στις ίδιες θέσεις, οπότε $A + B \in \mathcal{M}$ και $\lambda A \in \mathcal{M}$.

(β΄) ■ Αν $A \in \mathcal{M}$ βρείτε τιμές στα a, b, c, d ώστε το A να είναι ορθογώνιο.

Ένα μητρώο είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν οι στήλες του, ως διανύσματα, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και επιπλέον το μέτρο κάθε μιας είναι ίσο με ένα. Έτσι "με το μάτι" $d = \pm 1$, $a = \pm 1$ και επειδή το εσωτερικό γινόμενο της δεύτερης και της τρίτης στήλης είναι ab θα πρέπει $b = 0$, αφού $a = \pm 1$, οπότε $c = \pm 1$. Τελικά θα πρέπει $a = \pm 1$, $b = 0$, $c = \pm 1$, $d = \pm 1$.

(γ΄) □ Αν $A \in \mathcal{M}$ βρείτε συνθήκες στα a, b, c, d ώστε να υπάρχει το A^{-1}.

Ένα μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι και πάλι "με το μάτι" θέλουμε $d \neq 0$, $a \neq 0$ και $c \neq 0$. Σημειώστε ότι αν $a = 0$, ή $d = 0$ το μητρώο περιέχει τουλάχιστον μία μηδενική στήλη, οπότε δεν αντιστρέφεται.

Διαφορετικά, ένα μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός, οπότε αναπτύσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη βρίσκουμε

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = dac \neq 0,$$

οπότε $a \neq 0$, $c \neq 0$ και $d \neq 0$, όπως πριν.

Τα δύο αυτά προβλήματα εξετάζουν στοιχειώδη γνώση. Αν κάποιος/κάποια δεν μπορεί να απαντήσει ή να τα λύσει τότε υπάρχει σοβαρό πρόβλημα.

Θ3. Εάν

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3,$$

υπολογίστε τις ορίζουσες

(α΄) ■ $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -3.$

Βλέπε Διάλεξη 11, σελίδα 9, και $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det A$.

(β΄) ■ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 3a_3 \\ b_1 & b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 9c_3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = 3^2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3^3.$

Η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη, ή κάθε γραμμή χωριστά.

Το πρόβλημα εξετάζει τις στοιχειώδεις ιδιότητες της ορίζουσας. Τι είδαν τα μάτια μου! Ακόμα ότι $\det(A^{\mathrm{T}}) = 1/\det A$. Μα στο "σκονάκι" (το χειρόγραφο δισέλιδο) δεν γράφετε τις ιδιότητες της ορίζουσας αφού δεν τις γνωρίζετε;

Θ4. Έστω $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και έστω $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δύο βάσεις για τον $\mathbb{R}^3$, και έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \qquad F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1.$$

(α΄) ■ $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Αυτή είναι χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε γραμμικού μετασχηματισμού αφού

$$\begin{aligned} F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}+\mathbf{0}) &\Rightarrow F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0}) \\ &\Rightarrow \mathbf{0} = F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0}) - F(\mathbf{0}) \\ &\Rightarrow \mathbf{0} = F(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Βλέπε Διάλεξη 13, σελίδα 7.

(β΄) ■ Αν A είναι το μητρώο αναπαράστασης του F ως προς τις βάσεις $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη στήλη του A περιέχει με τη σειρά τους συντελεστές των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ στο ανάπτυγμα του $F(\mathbf{u}_1)$, η δεύτερη τους αντίστοιχους συντελεστές στο ανάπτυγμα του $F(\mathbf{u}_2)$ και ούτω καθεξής. Βλέπε Διάλεξη 13, σελίδα 20.

Θ5. Έστω P ένα $n \times n$ μητρώο ώστε $P^2 = P$.

(α΄) ☐ Δείξτε ότι $(I - P)^2 = I - P$.
Πολλοί/πολλές έγραψαν ότι $(I-P)^2 = I^2 - 2IP + P^2$. Γενικά $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, αφού

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

και $AB \neq BA$. Στη συγκεκριμμένη όμως περίπτωση συμβαίνει να ισχύει ότι $(I-P)^2 = I^2 - 2IP + P^2$ μόνο και μόνο επειδή $IP = PI = P$. Και αν στα Θ1., Θ2., Θ3. που είναι στοιχειώδη, δώσατε λάθος απαντήσεις πως μπορεί ο εξεταστής να πεισθεί ότι γράφοντας $(I-P)^2 = I^2 - 2IP + P^2$ πάρθηκε υπόψη ότι $PI = IP$ και ότι δεν το γράψατε απλά όπως γράφετε την αντίστοιχη ταυτότητα για πραγματικούς αριθμούς;
Η φυσιολογική προσέγγιση

$$(I-P)^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - IP - PI + P^2 = I - P - P + P = I - P.$$

Καθαρά πράγματα. Τόσο δύσκολο πια;

(β΄) ■ Το P είναι μητρώο προβολής και προβάλλει επί του χώρου των στηλών range P του P, το $I - P$ προβάλλει επί του $\mathrm{null}(P^{\perp})$,
αφού

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{range}(P) \oplus (\mathrm{range}(P))^{\perp} = \mathrm{range}(P) \oplus \mathrm{null}(P^{\perp})$$

από το θεμελιώδες θεώρημα.
Βλέπε Διάλεξη 9 σελίδα 16. Μα τι επιλέγετε να γράψετε στο "σκονάκι";

Θ6. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Σ Λ
ΣΩΣΤΟ, αφού τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;).

(β΄) Αν $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε

i. $a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ii. $a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου είναι ένα, έχουμε

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Βλέπε Διάλεξη 12, σελίδα 14.

Θ7. ☐ Δίνεται το σύστημα (Βλέπε Ασκήσεις 4η σειρά, Άσκηση 4.)

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= a \\
2x - 2y + 3z &= 2 \\
x + 2y + a^2 z &= 1
\end{aligned}
$$

όπου a είναι μία πραγματική παράμετρος. Βρείτε συνθήκες για την παράμετρο ώστε το σύστημα να έχει (i) καμία λύση, (ii) μία μόνο λύση, ή (iii) άπειρες λύσεις.

Για το επαυξημένο μητρώο του συστήματος βρίσκουμε με απαλοιφή Gauss

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -6 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{pmatrix}.
$$

Το αρχικό 1 στην πρώτη γραμμή του κλιμακωτού μητρώου είναι οδηγός, ενώ το -6 στη δεύτερη γραμμή είναι σε θέση οδηγού, σε επόμενο βήμα που δεν χρειάζεται να γίνει αντικαθίσταται με 1, κατά συνέπεια η ύπαρξη ή μη λύσης ή λύσεων καθορίζεται από την τρίτη γραμμή, ισοδύναμα από την εξίσωση

$$
(a^2 - 1)z = 1 - a \Leftrightarrow (a-1)(a+1)z = 1 - a
$$

Έτσι έχουμε:

i. Καμία λύση ή αδύνατο: αν $a^2 - 1 = 0$ και $1 - a \neq 0$, ισοδύναμα $a = -1$.

ii. Μία λύση: το μητρώο των συντελεστών περιέχει τρεις οδηγούς, ισοδύναμα $a^2 - 1 \neq 0$, ισοδύναμα $a \neq \pm 1$.

iii. Άπειρες λύσεις: το επαυξημένο μητρώο περιέχει μια τουλάχιστον μηδενική γραμμή, ισοδύναμα $a^2 - 1 = 0$ και $1 - a = 0$, ισοδύναμα $a = 1$.

Το σύστημα δεν το μελετήσαμε με τις τεχνικές που μαθαίνουμε στο Γυμνάσιο-Λύκειο, αν και θα μπορούσαμε, αλλά με τον συστηματικό, κομψό και αποτελεσματικότατο τρόπο που παρέχει η Γραμμική Άλγεβρα. Και βέβαια δεν νοείται φοιτητής/φοιτήτρια που έχει παρακολουθήσει Γραμμική Άλγεβρα να μη μπορεί να εκτελέσει με επιτυχία μια διαδικασία απαλοιφής σε απλές περιπτώσεις όπως η παραπάνω. Και όμως το τι λάθη γίνονται δεν λέγεται, από αριθμητικά (πολλαπλασιασμός και πρόσθεση ή αφαίρεση) έως ουσιαστικά, όπως να γίνει απαλοιφή στο μητρώο των συντελεστών μόνο και οι σταθερές να παραμένουν οι ίδιες.

Θ8. Αν το μητρώο R είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(α΄) ☐ Να βρείτε μια βάση για τον χώρο στηλών ή εικόνα ($\operatorname{range} M$) του M.

Η πρώτη και δεύτερη στήλη του R είναι οι στήλες των οδηγών, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το βλέπουμε εξάλλου, κατά συνέπεια η πρώτη και δεύτερη στήλη του M παράγουν το χώρο στηλών, ή $\operatorname{range} M$, έτσι μια βάση του χώρου στηλών είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β΄) ☐ Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο ($\operatorname{null} M$) του M.

Αν το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι στοιχείο του μηδενόχωρου του M, τότε $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

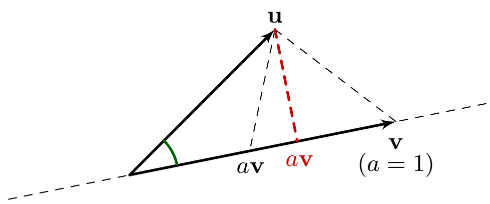
άρα μια βάση για το μηδενόχωρο του M είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θ9. ☐ Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, όπως στο σχήμα, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a για τον οποίο η απόσταση μεταξύ $\mathbf{u}$ και $a\mathbf{v}$ είναι η ελάχιστη δυνατή, ισοδύναμα να βρεθεί το

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|$$

Η γεωμετρική ματιά: Αν το a διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς το $a\mathbf{v}$ διατρέχει την



ευθεία που παράγει το $\mathbf{v}$ (μονοδιάστατο διανυσματικό χώρο). Απ' όλα τα τρίγωνα με "πλευρές" $\mathbf{u}$, $a\mathbf{v}$ και $\mathbf{u} - a\mathbf{v}$ εκείνο του οποίου η $\mathbf{u} - a\mathbf{v}$ είναι η ελάχιστη δυνατή είναι το ορθογώνιο με υποτείνουσα το $\mathbf{u}$, δηλαδή όταν $\mathbf{u} - a\mathbf{v} \perp a\mathbf{v}$, ισοδύναμα όταν το $a\mathbf{v}$ είναι η προβολή του $\mathbf{u}$ επί της ευθείας δια του $\mathbf{v}$. Έτσι από το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\|a\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 &\Rightarrow a^2\|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} - a\mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \\
&\Rightarrow a^2\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \\
&\Rightarrow 2a(a\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle) = 0 \\
&\Rightarrow a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \qquad (a \neq 0).
\end{aligned}$$

Η γραμμοαλγεβρική ματιά: Όπως είδαμε και παραπάνω θέλουμε

$$\begin{aligned}
a\mathbf{v} = \operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} &= \langle u, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\rangle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \qquad (\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| \text{ μοναδιαίο}) \\
&= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

οπότε $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle / \|\mathbf{v}\|^2$, όπως βρήκαμε με τη γεωμετρική προσέγγιση.
Βλέπε Διάλεξη 9, σελίδες 23-27.

Χρησιμοποιώντας τεχνικές Απειροτικού Λογισμού: Επειδή

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - a\mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v}\rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

(κυρτή παραβολή) το ελάχιστο της f συμβαίνει εκεί που μηδενίζεται η παράγωγος, ισοδύναμα

$$f'(a) = -2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + 2a\|\mathbf{v}\|^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$