ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8. Ορθογώνιο συμπλήρωμα, Ορθοκανονικοποίηση, Ορθογώνια μητρώα

Ανασκόπηση

- **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt:** Αν σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ το $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1&=\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}\\ \mathbf{w}_k&=\frac{\mathbf{u}_k-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1-\cdots-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1-\cdots-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}\|},\end{aligned}\tag{1}$$

  $k=2,\dots,n$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο X το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το S. Ειδικά αν το S είναι μια βάση του X, το $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον X.

- Ένα τετραγωνικό μητρώο Q λέγεται **ορθογώνιο** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα, ισοδύναμα αν

$$Q^{\mathrm{T}}Q=QQ^{\mathrm{T}}=I,$$

  ισοδύναμα αν $Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}:x\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Έστω $0<\alpha<1$.

   (α΄) Δείξτε ότι το
   $$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\\alpha x\end{pmatrix}:x\in\mathbb{R}\right\}.$$
   είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

   (β΄) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του S.

   (γ΄) Δείξτε ότι $\mathbb{R}^2=S\oplus S^\perp$, επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 2.

   (δ΄) Επιβεβαιώστε το Πόρισμα 1.

3. Εάν

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x\\y\end{pmatrix}:x,y\in\mathbb{R}\right\},$$

   να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ καθώς και μια βάση του $S^\perp$.

4. Αν
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για τον $W = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

5. Εξετάστε αν το άθροισμα ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

6. Εξετάστε αν το γινόμενο ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

7. Αν
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$.

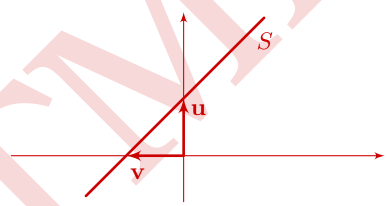
   (αʹ) Δείξτε ότι το μητρώο Q είναι ορθογώνιο.

   (βʹ) Δείξτε ότι το μητρώο Q ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.

   (γʹ) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του
$$\mathbf{q}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ΛΥΣΕΙΣ

1. Το υποσύνολο S δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, ισοδύναμα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x = x + 1 = 0$. Το S παριστάνει την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$. Τα



Σχήμα 1: Άσκηση 1.

διανύσματα
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix},$$
όπου x είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός, είναι στοιχεία του S. Έτσι αν $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in S^{\perp}$, θα πρέπει να ισχύει
$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 &\Leftrightarrow xa + (x+1)b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)x + b = 0. \end{aligned}$$
Η τελευταία σχέση παριστάνει ένα πολυώνυμο το οποίο για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής παίρνει την τιμή μηδέν, συνεπώς το πολυώνυμο αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε θα πρέπει
$$a + b = 0 \quad \text{και} \quad b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0,$$
κατά συνέπεια $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα $S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

2. (αʹ) Αν $\mathbf{u}$ είναι στοιχείο του S, τότε για κάποιο πραγματικό αριθμό x είναι
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια

$$S = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$$

ισοδύναμα το S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(β΄) Αν $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in S^{\perp}$, θα πρέπει

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p + q\alpha = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{p}{\alpha}$$

επομένως

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} p \\ -p/\alpha \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow S^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

Παρατηρείστε ότι τόσο το S όσο και το $S^{\perp}$ παριστάνουν ευθείες που είναι κάθετες μεταξύ τους, και το γινόμενο των κλίσεών τους είναι ίσο με -1.

(γ΄) Δείχνουμε ότι για πραγματικούς αριθμούς x, y υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \alpha\lambda - (1/\alpha)\mu = y \end{cases}$$

απ΄ όπου επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2+1}x + \frac{\alpha}{\alpha^2+1}y, \qquad \mu = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}x - \frac{\alpha}{\alpha^2+1}y.$$

(δ΄) (Πόρισμα 1. $\dim S^{\mathrm{T}} = \dim X - \dim S$) Πράγματι

$$\dim S^{\perp} = 2 - \dim S = 2 - 1 = 1.$$

3. Αν $\begin{pmatrix} p & q & r & s \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι στοιχείο του $S^{\perp}$, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = xp + yq + xr + ys = (p+r)x + (q+s)y = 0$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και όλους τους πραγματικούς αριθμούς y. Από την τελευταία σχέση για $x = 1$ και $y = 0$ έπεται ότι

$$p + r = 0 \Rightarrow r = -p$$

ενώ για $x = 0$ και $y = 1$ έπεται ότι

$$q + s = 0 \Rightarrow s = -q,$$

κατά συνέπεια

$$S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια

$$S^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Επειδή τα δύο τελευταία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι αποτελούν μια βάση για τον υπόχωρο $S^{\perp}$, οπότε μια βάση για τον υπόχωρο είναι η

$$\mathcal{B}_{S^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Ακολουθώντας τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης υπολογίζουμε $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2}$, οπότε

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1$, και υπολογίζουμε

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

οπότε

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι μια ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι η $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Σημειώνουμε ότι αν $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 &= x\sqrt{2}\mathbf{w}_1 + y\left(\mathbf{v}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_1\right) \\ &= \left(x\sqrt{2} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{w}_1 + y\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\mathbf{u} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} = \left(x\sqrt{2} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{w}_1 + y\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2.$$

5. (Διαφορετική από αυτή που έγινε στην τάξη.) Τα μητρώα

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνια, αλλά το

$$Q_1 + Q_2 = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 0 \\ 2\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

προφανώς δεν είναι, οι στήλες είναι μεν κάθετες μεταξύ τους, αλλά η νόρμα της πρώτης είναι ίση με 2 και της δεύτερης 0.

Όμοια τα $2Q_1 = Q_1 + Q_1$ και $2Q_2$ δεν είναι ορθογώνια.

6. Αν Q_1 και Q_2 είναι ορθογώνια και $Q = Q_1Q_2$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
QQ^{\mathrm{T}} &= Q_1Q_2(Q_1Q_2)^{\mathrm{T}} && \\
&= Q_1Q_2Q_2^{\mathrm{T}}Q_1^{\mathrm{T}} && (\text{ιδιότητα της αναστροφής}) \\
&= Q_1IQ_1^{\mathrm{T}} && (Q_2Q_2^{\mathrm{T}} = Q_2^{\mathrm{T}}Q_2 = I) \\
&= Q_1Q_1^{\mathrm{T}} && \\
&= I && (Q_1Q_1^{\mathrm{T}} = Q_1^{\mathrm{T}}Q_1 = I)
\end{aligned}$$

κατά συνέπεια το Q είναι ορθογώνιο.

7. Βλέπε Διάλεξη 8, Παράδειγμα 6, σελίδες 30-32. Εδώ $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$.

(α΄) Δείχνουμε ότι $QQ^{\mathrm{T}} = I$. Πράγματι

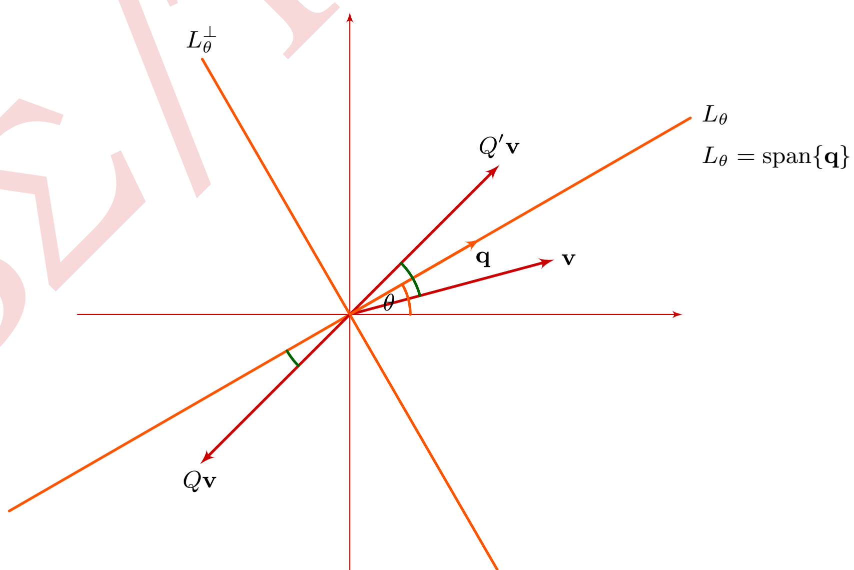
$$\begin{aligned}
QQ^{\mathrm{T}} &= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})(I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} && \\
&= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})(I^{\mathrm{T}} - (2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})) && \\
&= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})(I - 2(\mathbf{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}) && \\
&= (I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})(I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}) && = Q^2 \\
&= I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} && \\
&= I - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} && (\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 = 1) \\
&= I.
\end{aligned}$$

(β΄) Κατά τη διαδικασία της απόδειξης στο (α΄) δείξαμε ότι $QQ^{\mathrm{T}} = Q^2 = I$.

(γ΄) Στο Παράδειγμα 6, Διάλεξη 8 δείξαμε ότι το μητρώο $Q' = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I$ ανακλά κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως προς την ευθεία που παράγει το $\mathbf{q}$. Επειδή $Q = -Q'$ έπεται ότι

$$Q\mathbf{v} = -Q'\mathbf{v}$$

κατά συνέπεια το μητρώο Q ανακλά το διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως προς το ορθογώνιο συμπλήρωμα της ευθείας $L_\theta = \mathrm{span}\{\mathbf{q}\}$, βλέπε Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Άσκηση 7.