ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8. Ορθογώνιο συμπλήρωμα, Ορθοκανονικοποίηση, Ορθογώνια μητρώα

Ανασκόπηση

- **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt:** Αν σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ το $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}\\ \mathbf{w}_k &= \frac{\mathbf{u}_k-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1-\cdots-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1-\cdots-\langle\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}\|},\end{aligned} \tag{1}$$

  $k=2,\dots,n$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο X το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το S. Ειδικά αν το S είναι μια βάση του X, το $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον X.

- Ένα τετραγωνικό μητρώο Q λέγεται **ορθογώνιο** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα, ισοδύναμα αν

$$Q^{\mathrm{T}}Q=QQ^{\mathrm{T}}=I,$$

  ισοδύναμα αν $Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}:x\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Έστω $0<\alpha<1$.

   (α΄) Δείξτε ότι το

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\\alpha x\end{pmatrix}:x\in\mathbb{R}\right\}.$$

   είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

   (β΄) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του S.

   (γ΄) Δείξτε ότι $\mathbb{R}^2=S\oplus S^{\perp}$, επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 2.

   (δ΄) Επιβεβαιώστε το Πόρισμα 1.

3. Εάν

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x\\y\end{pmatrix}:x,y\in\mathbb{R}\right\},$$

   να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^{\perp}$ καθώς και μια βάση του $S^{\perp}$.

4. Αν

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για τον $W = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

5. Εξετάστε αν το άθροισμα ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

6. Εξετάστε αν το γινόμενο ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.

7. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$.

   (α΄) Δείξτε ότι το μητρώο Q είναι ορθογώνιο.

   (β΄) Δείξτε ότι το μητρώο Q ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.

   (γ΄) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του

$$\mathbf{q}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$