ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ανασκόπηση

- **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

  για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

- **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$, αν $i \neq j$, τότε

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

- **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big)$$

  για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο X.

Ασκήσεις

1. Σε κάθε διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ισχύουν

   (α΄) Εάν για κάποιο $\mathbf{u} \in X$ είναι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

   (β΄) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u}\rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{u} \in X$.

2. Εάν $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

   ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}.$$

3. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. **Υπόδειξη:** Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

   ισοδύναμα

$$\|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

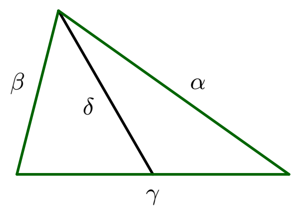
   για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τι μπορεί να ειπωθεί για την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου;

4. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια διανύσματα του X δείξτε ότι
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|.$$

5. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τρία διανύσματα. **Υπόδειξη:**
$$\|\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\|^2 = \langle \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\rangle.$$

6. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

7. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του



Απολλωνίου:
$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$
όπου δ είναι το μήκος της διαμέσου.

8. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

9. Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

   (α΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \le \|\mathbf{a}\|_1$.

   (β΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \le \|\mathbf{a}\|_p \le n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

10. Σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ δείξτε ότι για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ισχύει $\|a\mathbf{u}+b\mathbf{v}\| = \|b\mathbf{u}+a\mathbf{v}\|$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

11. **Η νόρμα Frobenius.** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, ορίζουμε το **ίχνος** (trace) του A να είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A. Το συμβολίζουμε με trace A έτσι
$$\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

   (α΄) Δείξτε ότι στον χώρο $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ η σχέση
$$\langle A, B\rangle := \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B)$$
   είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Την επαγόμενη νόρμα ονομάζουμε **νόρμα Frobenius**.

   (β΄) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα Frobenius $\|\cdot\|_F$ του μητρώου $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathbb{M}^{2,3}$.

12. Αν
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I$. Για το Q δείξτε ότι

   (α΄) Δείξτε ότι $Q = Q^{\mathrm{T}}$ και $Q^2 = I$ επομένως $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}} = Q$.

   (β΄) Οι στήλες του είναι μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους και αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^2$.