ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6. Υπόχωροι, βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Επισκόπηση

Έχοντας μελετήσει τη σχετική θεωρία θα πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις παρακάτω βασικές έννοιες:

1. Διανυσματικός χώρος, διανυσματικός υπόχωρος
2. Γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία διανυσμάτων
3. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Συνοψίζοντας: Αν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X,

- Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$ δηλαδή το

$$\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

  είναι υπόχωρος του X.

- Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**.
  (β΄) Κάποιο από τα διανύσματα αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
  (γ΄) Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ με μία τουλάχιστον από αυτές διάφορη του μηδενός, ώστε

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

- Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.
  (β΄) Δεν υπάρχει $\mathbf{u}_k$ που να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
  (γ΄) Αν για τις σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

  τότε $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

- Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ αποτελούν μια βάση του X **αν και μόνο αν**

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** και
  (β΄) $X = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση του X, τότε $\dim X = n$. Κάθε βάση του X περιέχει **ακριβώς** n διανύσματα.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός υπόχωρος

   (α΄) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + 2y + z = 0 \right\}.$

   (β΄) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x = y \quad \text{και} \quad 2y = z \right\}.$

   (γ΄) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + y = z \right\}.$

2. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και V και W υπόχωροι του X.

   (α΄) Δείξτε ότι το $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X.

   (β΄) Ορίζουμε το **άθροισμα**

   $$V + W = \{v + w : v \in V \text{ και } w \in W\}.$$

   Δείξτε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X.

3. Εξηγήστε γιατί τα διανύσματα

   $$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   δεν αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε το $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

4. Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$. Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

5. Έστω $\mathbb{P}_3^*$ το σύνολο των πολυωνύμων του $\mathbb{P}_3$ με μηδενικό σταθερό όρο, $\mathbb{P}_3^* = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 0\}$.

   (α΄) Δείξτε ότι το $\mathbb{P}_3^*$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{P}_3$.

   (β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον $\mathbb{P}_3^*$.

6. Εάν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ κάποιου διανυσματικού χώρου X είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εξετάστε ως προς την ανεξαρτησία τα διανύσματα

   (α΄) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

   (β΄) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

7. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \sin^2 x$, και $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

   (α΄) Δείξτε ότι το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δεν είναι βάση για τον V.

   (β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον V.

8. Να βρεθούν βάσεις για κάθε έναν υπόχωρο των διανυσμάτων $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ του $\mathbb{R}^3$ για τον οποίο

   (α΄) $x = y = z$.

   (β΄) $ax + by + cz = 0$, όπου a, b, c είναι πραγματικές σταθερές με $a \neq 0$.

9. Έστω ότι W είναι υπόχωρος του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου X, και έστω $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ να είναι μια βάση για τον W. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}_W$ μπορεί να εμπλουτισθεί με στοιχεία $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ του X ώστε το $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ να είναι μια βάση για τον X, βλέπε Παράδειγμα 7, Διάλεξη 6.

10. Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

(α΄) Το V με τις πράξεις του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

(β΄) $\dim V = 2$.

(γ΄) Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\mathbb{R}^3 = V + W$.

(δ΄) Ποια είναι η διάσταση του W, ($\dim W =$;).

(ε΄) Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V + W$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. (α΄) **Πρώτος τρόπος.** Αν $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$, τότε

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -x_1 - 2y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -x_2 - 2y_2 \end{pmatrix}$$

και αν λ, μ είναι πραγματικές σταθερές τότε

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -x_1 - 2y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -x_2 - 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ -\lambda x_1 - 2\lambda y_1 - \mu x_2 - 2\mu y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ -\lambda x_1 - \mu x_2 - 2\lambda y_1 - 2\mu y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y &= \lambda y_1 + \mu y_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

επομένως $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \in U$, συνεπώς το U είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Δεύτερος τρόπος. Αν $\mathbf{u} \in U$, τότε έχουμε

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

έτσι

$$U = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

κατά συνέπεια το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(β΄) Αν $\mathbf{v} \in V$, τότε

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

άρα το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(γ΄) Παρόμοιο με το (α΄).

2. (α΄) Αν $x, y \in V \cap W$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε $x, y \in V$ και $x, y \in W$ και επειδή οι V και W είναι υπόχωροι του X έπεται ότι $\lambda x + \mu y \in V$ και $\lambda x + \mu y \in W$, επομένως $\lambda x + \mu y \in V \cap W$, άρα το $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X.

   (β΄) Αν $x, y \in V + W$, τότε υπάρχουν διανύσματα $v_1, v_2 \in V$ και $w_1, w_2 \in W$, ώστε

$$x = v_1 + w_1 \qquad \text{και} \qquad y = v_2 + w_2,$$

   έτσι αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(v_1 + w_1) + \mu(v_2 + w_2) \\ &= (\lambda v_1 + \mu v_2) + (\lambda w_1 + \mu w_2) \qquad && \text{(από τις ιδιότητες των πράξεων)} \\ &= v + w && (v = \lambda v_1 + \mu v_2 \text{ και } w = \lambda w_1 + \mu w_2) \end{aligned}$$

   αφου οι V, W είναι υπόχωροι του X. Έτσι $\lambda x + \mu y \in V + W$, ισοδύναμα το $V + W$ είναι υπόχωρος του X.

3. Τρία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ αποτελούν βάση αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \tag{1}$$

   δηλαδή το $\mathbf{u}_3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$, συνεπώς τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, συνεπώς δεν αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

   Αν $V = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, συνέπεια της (1), και επειδή τα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;), είναι

$$V = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}.$$

   Έτσι αν $\mathbf{v} \in V$ τότε υπάρχουν σταθερές r, s ώστε $\mathbf{v} = r\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_3$, ισοδύναμα

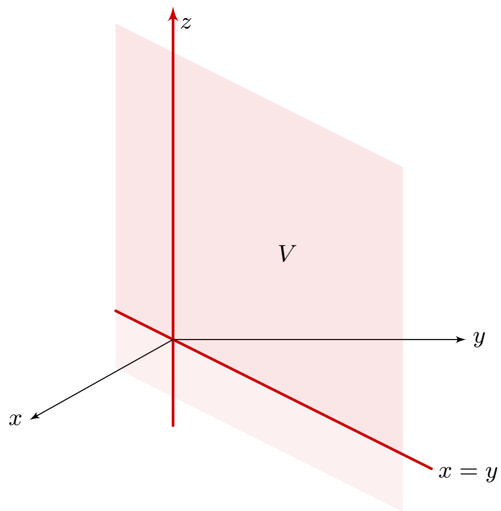
$$\mathbf{v} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

   κατά συνέπεια

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Παρατήρηση. Η γεωμετρική εικόνα του V είναι το επίπεδο (διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$) που περιέχει την ευθεία $y = x$, του xy-επιπέδου και τον z-άξονα, βλέπε Σχήμα 1.

4. **Σχόλιο.** Τα πολυώνυμα είναι συναρτήσεις $f, g, p, q, \ldots$ και μια συνάρτηση, συνήθως, δηλώνεται με τον τύπο της δηλαδή με την τιμή της $f(x), g(x), p(x), q(x), \ldots$ σε κάθε x του πεδίου ορισμού της. Έτσι θα έπρεπε να γράψουμε $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ όπου $p_0(x) = 1$, $p_k(x) = x^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Αντ΄ αυτού, για οικονομία, γράφουμε κατευθείαν τις τιμές των πολυωνύμων, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ στην αναγραφή των στοιχείων του $\mathcal{B}$.



$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V = W + Z, \qquad \text{όπου}$$

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad Z = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Σχήμα 1: Άσκηση 3.

(αʹ) $\mathbb{P}_n = \operatorname{span} \mathcal{B}$.

Κάθε στοιχείο του $\mathcal{B}$ είναι στοιχείο του $\mathbb{P}_n$ κατά συνέπεια το $\mathcal{B}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{P}_n$, ειδικά $\operatorname{span} \mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}_n$. Αν p είναι ένα τυχαίο πολυώνυμο βαθμού το πολύ n ($p \in \mathbb{P}_n$) τότε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

είναι δηλαδή το p γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\mathcal{B}$, κατά συνέπεια $p \in \operatorname{span} \mathcal{B}$, ισοδύναμα $\mathbb{P}_n \subseteq \operatorname{span} \mathcal{B}$. Έτσι τελικά $\mathbb{P}_n = \operatorname{span} \mathcal{B}$.

(βʹ) Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ας υποθέσουμε ότι για σταθερές $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει[1]

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης στην (3) είναι ένα πολυώνυμο του $\mathbb{P}_n$, έστω q και η σχέση (3) εκφράζει το γεγονός ότι το q μηδενίζεται για όλες τις τιμές της μεταβλητής x, ειδικά για περισσότερες τιμές απ' ότι το πλήθος των ριζών του, κατά συνέπεια το q είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν, ισοδύναμα[2] $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Κατά συνέπεια τα πολυώνυμα-διανύσματα $1, x, x^2, \ldots, x^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Από τα (α′) και (β′) έπεται ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$.

5. (αʹ) Αρκεί να δείξουμε ότι αν $p, q \in \mathbb{P}_3^*$ και λ, μ είναι σταθερές, τότε $\lambda p + \mu q \in \mathbb{P}_3^*$.

Αν $p, q \in \mathbb{P}_3^*$, λ, μ είναι σταθερές και $h = \lambda p + \mu q$, τότε

$$h(0) = \lambda p(0) + \mu q(0) = 0$$

[1] Η (3) είναι συνέπεια της

$$c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + \cdots + c_n p_n = 0$$

όπου το 0 στο δεξί μέλος είναι το μηδενικό πολυώνυμο-διάνυσμα.

[2] Αν $r_1, r_2, \ldots, r_n$ είναι οι ρίζες του q, τότε για κάποια σταθερά c ισχύει

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

έτσι για $x \neq r_1, r_2, \ldots, r_n$ το δεξί μέλος, άρα και το q, είναι διάφορο του μηδενός, εκτός αν $c = 0$. Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της ισότητας και εξισώνοντας στη συνέχεια τους συντελεστές των ισοβάθμιων όρων προκύπτουν οι εκφράσεις των συντελεστών c_k μέσω των ριζών r_k (σχέσεις ριζών-συντελεστών, ή σχέσεις του Vieta). Ειδικά κάθε c_k είναι της μορφής c επί μια έκφραση των $r_1, r_2, \ldots, r_n$, ισοδύναμα

$$c_k = c h_k(r_1, r_2, \ldots, r_n), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

αφού από την υπόθεση $p(0) = q(0) = 0$, άρα $\lambda p + \mu q \in \mathbb{P}_3^*$, ισοδύναμα το $\mathbb{P}_3^*$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{P}_3$.

(β΄) Το πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ περιέχεται στο $\mathbb{P}_3^*$ αν και μόνο αν

$$p(0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \Leftrightarrow p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

κατά συνέπεια κάθε πολυώνυμο του $\mathbb{P}_3^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός των x, x^2, x^3, ισοδύναμα

$$\mathbb{P}_3^* = \operatorname{span}\{x, x^2, x^3\}.$$

Επειδή τα x, x^2, x^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλέπε Άσκηση 2, έπεται οτι μια βάση για τον $\mathbb{P}_3^*$ είναι η

$$\mathcal{B}_3^* = \{x, x^2, x^3\}.$$

6. (α΄) Αν c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές ώστε $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, τότε από τον ορισμό των $\mathbf{v}_k$ υπολογίζουμε

$$c_1(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + c_2(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) + c_3(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$$
$$(c_2 + c_3)\mathbf{u}_1 + (c_3 + c_1)\mathbf{u}_2 + (c_1 + c_2)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$c_2 + c_3 = c_3 + c_1 = c_1 + c_2 = 0 \tag{4}$$

αφού τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Προσθέτοντας τις τρεις εξισώσεις προκύπτει

$$2c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \tag{5}$$

Από τις (5) και (4) έπεται ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, συνεπώς τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β΄) Αν c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές ώστε $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$, τότε από τον ορισμό των $\mathbf{w}_k$ υπολογίζουμε

$$c_1(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + c_2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) + c_3(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$$
$$(c_3 - c_2)\mathbf{u}_1 + (c_1 - c_3)\mathbf{u}_2 + (c_2 - c_1)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

απ΄ όπου, λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, έπεται ότι

$$c_3 - c_2 = c_1 - c_3 = c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3. \tag{6}$$

Έτσι για $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ έχουμε

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

(αποτέλεσμα που θα μπορούσαμε να έχουμε παρατηρήσει). Κατά συνέπεια τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

7. (α΄) Από τους τύπους του διπλασίου τόξου έχουμε

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$$

συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, άρα δεν αποτελούν βάση.

(β΄) Από το (α΄) έχουμε

$$V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Δείχνοντας ότι τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα προκύπτει άμεσα ότι το $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ είναι μια βάση για τον V. Αν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ήταν γραμμικά εξαρτημένα θα υπήρχε σταθερά λ, ώστε $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$, ισοδύναμα

$$\cos^2 x = \lambda \sin^2 x \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = \pi/4$, επειδή $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$, θα είχαμε ότι $\lambda = 1$, ενώ για $x = \pi$ θα είχαμε ότι $1 = 0$ το οποίο είναι αδύνατο.

Σημειώνουμε ότι καθένα από τα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι επίσης βάση για τον V.

8. (α') Έστω

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x=y=z\in\mathbb{R}\right\}$$

και αν $\mathbf{u}\in V$, τότε για κάποιο $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow V=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ως ολότητα γραμμικών συνδυασμών, και επιπλέον οτι το μονοσύνολο

$$\mathcal{B}_V=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

είναι μια βάση για τον V.

(β') Έστω

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: ax+by+cz=0,\ a\neq 0\right\}.$$

Αν $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in W$, τότε

$$ax+by+cz=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}z.$$

Θέτοντας $p=-b/a$ και $q=-c/a$, έχουμε

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}py+qz\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}py\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}qz\\0\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}p\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}q\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Άρα

$$W=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}p\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Μια σχέση

$$\begin{pmatrix}p\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}q\\0\\1\end{pmatrix}$$

δεν θα μπορούσε να συμβαίνει γιατί τότε θα είχαμε ότι $1=\lambda 0$, κατά συνέπεια τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έτσι μια βάση για τον W είναι το

$$\mathcal{B}_W=\left\{\begin{pmatrix}p\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

9. Έστω $\dim X=m$, τότε $n\leq m$.

Αν $n=m$, τότε $W=X$ και η $\mathcal{B}_W$ είναι βάση του X.

Έστω $n<m$. Τότε υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{v}\in X$, ώστε $\mathbf{v}\notin W$. Θέτουμε $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}$ και

$$\mathcal{B}_1=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n,\mathbf{v}_1\}.$$

Τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και το $\mathbf{v}_1$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Αν $n+1 = m$, τότε το $\mathcal{B}_1$ είναι μια βάση του X. Αν $n+1 < m$ επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και βρίσκουμε το σύνολο των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων

$$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Αν $n+2 = m$ τελειώσαμε, αφού $\operatorname{span}\mathcal{B}_2 = X$. Αν $n+2 < m$ συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο ώστε να έχουμε $n+k = m$.

10. (αʹ) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

συνεπώς

$$V = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

επομένως το V, ως διάνοιγμα, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(βʹ) Επειδή τα δύο διανύσματα που παράγουν τον V στο (αʹ) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αποτελούν μια βάση για τον V, κατά συνέπεια $\dim V = 2$.

(γʹ) Για το ερώτημα αυτό μας δείχνει το δρόμο η Άσκηση 8. Επιλέγουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν περιέχεται στον V. Ένα τέτοιο είναι το

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)(0) + 0 \neq 0'$$

Έστω $W = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_3\}$. Δείχνουμε ότι $\mathbb{R}^3 = V + W$.
Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z-2x-y \end{pmatrix} \in V + W$$

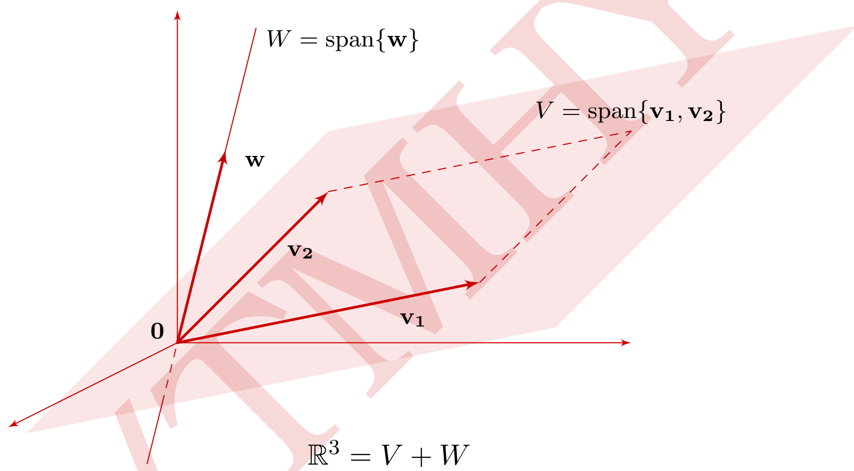
άρα $\mathbb{R}^3 = V + W$. Σημειώνουμε ότι αυτό που ουσιαστικά δείξαμε είναι ότι το

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

είναι μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$ και προέκυψε εμπλουτίζοντας τη βάση του V με ένα διάνυσμα $(2+1=3)$ του $\mathbb{R}^3$ εκτός του V.

(δʹ) Επειδή $W = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_3\}$ έπεται ότι $\dim W = 1$.

(εʹ) Η απάντηση είναι όχι, σύμφωνα με την Άσκηση 9. Στη θέση του $\mathbf{e}_3$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus V$.



$W = \mathrm{span}\{\mathbf{w}\}$
$V = \mathrm{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$
$\mathbf{w}$
$\mathbf{v_2}$
$\mathbf{v_1}$
$\mathbf{0}$
$\mathbb{R}^3 = V + W$