Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6. Υπόχωροι, βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Επισκόπηση

Έχοντας μελετήσει τη σχετική θεωρία θα πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις παρακάτω βασικές έννοιες:

1. Διανυσματικός χώρος, διανυσματικός υπόχωρος
2. Γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία διανυσμάτων
3. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Συνοψίζοντας: Αν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου X,

- Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_k$ δηλαδή το

$$\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

  είναι υπόχωρος του X.

- Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**.

  (β΄) Κάποιο από τα διανύσματα αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

  (γ΄) Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ με μία τουλάχιστον από αυτές διάφορη του μηδενός, ώστε

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

- Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

  (β΄) Δεν υπάρχει $\mathbf{u}_k$ που να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

  (γ΄) Αν για τις σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

  τότε $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

- Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ αποτελούν μια βάση του X **αν και μόνο αν**

  (α΄) Τα διανύσματα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** και

  (β΄) $X = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

- Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση του X, τότε $\dim X = n$. Κάθε βάση του X περιέχει **ακριβώς** n διανύσματα.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός υπόχωρος

   (α΄) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + 2y + z = 0 \right\}$.

   (β΄) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x = y \quad \text{και} \quad 2y = z \right\}$.

   (γ΄) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x + y = z \right\}$.

2. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και V και W υπόχωροι του X.

   (α΄) Δείξτε ότι το $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X.

   (β΄) Ορίζουμε το **άθροισμα**

   $$V + W = \{v + w : v \in V \text{ και } w \in W\}.$$

   Δείξτε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X.

3. Εξηγήστε γιατί τα διανύσματα

   $$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   δεν αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε το $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

4. Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον $\mathbb{P}_n$. Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

5. Έστω $\mathbb{P}_3^*$ το σύνολο των πολυωνύμων του $\mathbb{P}_3$ με μηδενικό σταθερό όρο, $\mathbb{P}_3^* = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 0\}$.

   (α΄) Δείξτε ότι το $\mathbb{P}_3^*$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{P}_3$.

   (β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον $\mathbb{P}_3^*$.

6. Εάν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ κάποιου διανυσματικού χώρου X είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εξετάστε ως προς την ανεξαρτησία τα διανύσματα

   (α΄) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

   (β΄) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

7. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \sin^2 x$, και $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

   (α΄) Δείξτε ότι το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δεν είναι βάση για τον V.

   (β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον V.

8. Να βρεθούν βάσεις για κάθε έναν υπόχωρο των διανυσμάτων $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ του $\mathbb{R}^3$ για τον οποίο

   (α΄) $x = y = z$.

   (β΄) $ax + by + cz = 0$, όπου a, b, c είναι πραγματικές σταθερές με $a \neq 0$.

9. Έστω ότι W είναι υπόχωρος του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου X, και έστω $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ να είναι μια βάση για τον W. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}_W$ μπορεί να εμπλουτισθεί με στοιχεία $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ του X ώστε το $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ να είναι μια βάση για τον X, βλέπε Παράδειγμα 7, Διάλεξη 6.

10. Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

(α΄) Το V με τις πράξεις του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

(β΄) $\dim V = 2$.

(γ΄) Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\mathbb{R}^3 = V + W$.

(δ΄) Ποια είναι η διάσταση του W, ($\dim W = ;$).

(ε΄) Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V + W$.