Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5. Το αντίστροφο μητρώο, Διανυσματικοί χώροι

1. Να βρεθεί μια άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση για το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Για ποιές τρεις τιμές της παραμέτρου λ είναι το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση γιατί συμβαίνει αυτό.
Υπόδειξη: Ένα μητρώο A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν το A^{T} είναι αντιστρέψιμο, επιπλέον ισχύει ότι $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

3. Δείξτε ότι για $a \neq 0$ και $a \neq b$ το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το αντίστροφο.

4. Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμο.

5. Έστω ότι τα A και B είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους.

(α΄) Αν C είναι επίσης τετραγωνικό μητρώο ώστε

$$A(B-C) = I,$$

δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και ότι $B = A^{-1} + C$.

(β΄) Εάν το $D = AB$ είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι και το A είναι αντιστρέψιμο.

6. Εάν $\mathbf{u}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ με $n \geq 2$, η σχέση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \qquad -\infty < t < +\infty$$

είναι η εξίσωση της ευθείας L κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$. Δείξτε ότι το L με την πράξη της πρόσθεσης μεταξύ διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά είναι διανυσματικός χώρος.

ΒΣ/ΤΜΗΥ&Π

7. Εξετάστε εάν οι συναρτήσεις στο $\mathcal{C}[0,1]$ οι οποίες παίρνουν την τιμή 0 στα άκρα του διαστήματος $[0,1]$ με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά, αποτελούν διανυσματικό χώρο.

8. Εξετάστε αν τα πολυώνυμα του $\mathbb{P}_n$ με μηδενικό σταθερό όρο αποτελούν διανυσματικό χώρο.

ΛΥΣΕΙΣ

1. Πολλαπλασιάζοντας με τα κατάλληλα στοιχειώδη μητρώα έχουμε

$$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

και $A = LU$, όπου

$$L = (E_4E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$$

με

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Αν ένα τετραγωνικό μητρώο έχει μηδενική γραμμή δεν μπορεί να είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο, κατά συνέπεια δεν αντιστρέφεται. Όμοια αν δύο γραμμές ενός μητρώου είναι ίσες, τότε, κατά τη διαδικασία της απαλοιφής, αφαιρώντας τη μία από την άλλη προκύπτει μια μηδενική γραμμή οπότε και πάλι το μητρώο δεν αντιστρέφεται. Έτσι (i) αν $\lambda = 0$, το μητρώο έχει μια μηδενική γραμμή, (ii) αν $\lambda = 2$ το μητρώο έχει δύο ίσες γραμμές, και (iii) αν $\lambda = 7$ το μητρώο έχει δύο ίσες στήλες οι οποίες είναι δύο ίσες γραμμές του ανάστροφου, κατά συνέπεια το ανάστροφο δεν αντιστρέφεται. Επειδή η σχέση $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ μας λέει ότι ένα μητρώο αντιστρέφεται αν και μόνο αν το ανάστροφο μητρώο αντιστρέφεται (γιατί;) έπεται ότι αφού το $A(7)^{\mathrm{T}}$ δεν αντιστρέφεται τότε και το $A(7)$ δεν αντιστρέφεται. Διαφορετικά:

ΒΣ/ΤΜΗΥ&Π

(a) Παρατηρούμε ότι αν $\lambda = 0$ το μητρώο έχει μια μηδενική γραμμή. Πράγματι σε ένα βήμα της διαδικασίας της απαλοιφής (Gauss) βρίσκουμε

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε το σύστημα $A(0)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει άπειρες λύσεις, άρα το $A(0)$ δεν αντιστρέφεται. Ισοδύναμα το τελευταίο μητρώο δεν περιέχει τρεις οδηγούς, άρα δεν αντιστρέφεται.

(b) Για $\lambda \neq 0$ με τη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda/2 & 1-\lambda/2 \\ 0 & 7-4\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$$

Για να αντιστρέφεται το $A(\lambda)$ θα πρέπει $1-\lambda/2 \neq 0$ (να μη περιέχει μηδενική γραμμή), κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $\lambda \neq 2$, οπότε το επόμενο βήμα της διαδικασίας της απαλοιφής (διαιρώντας με $1-\lambda/2$) δίνει

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7-4\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Για να αντιστρέφεται το $A(\lambda)$ θα πρέπει η τελευταία γραμμή του τελευταίου μητρώου να περιέχει οδηγό, ισοδύναμα να μην είναι πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής, θα πρέπει κατά συνέπεια να είναι

$$7-4\lambda \neq -3\lambda \Leftrightarrow \lambda \neq 7.$$

Έτσι για να είναι αντιστρέψιμο το μητρώο θα πρέπει να είναι $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq 7$.

3. Για $a \neq 0$ και $a \neq b$ βρίσκουμε με τη διαδικασία Gauss – Jordan

$$\begin{aligned}
(M \;\; I) = \begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ a & a & b & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-b & a-b & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c \end{pmatrix}, \qquad c = a-b \\
&\to \begin{pmatrix} a & 0 & b & 1+b/c & -b/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a/c & 0 & -b/c \\ 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/c & 0 & -b/(ac) \\ 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/c & 1/c \end{pmatrix} = (I \;\; M^{-1})
\end{aligned}$$

όπου $c = a-b$.

ΒΣ/ΤΜΗΥ&Π

4. Αν $\lambda = 3$, ή $\lambda = -2$, ή $\lambda = 0$, τότε το μητρώο δεν μπορεί να είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο, επομένως το μητρώο αντιστρέφεται αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq 0$, έτσι το μητρώο είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν $\lambda \notin \{0, 2, 3\}$.

   Διαφορετικά, το μητρώο είναι άνω τριγωνικό οπότε για να είναι αντιστρέψιμο θα πρέπει η διαγώνιος που περιέχει τους τρεις οδηγούς να μη περιέχει το μηδέν,

$$\lambda \neq 3 \quad \text{και} \quad \lambda \neq -2 \quad \text{και} \quad \lambda \neq 0.$$

5. (αʹ) Αφού υπάρχει μητρώο, το $B - C$, ώστε $A(B - C) = I$, τότε από το Θεώρημα 4 (βλέπε Διάλεξη 5 διαφάνεια 22) θα ισχύει επίσης ότι $(B - C)A$, οπότε το A αντιστρέφεται και

$$A^{-1} = B - C \Rightarrow B = A^{-1} + C$$

   (βʹ) Το D^{-1} υπάρχει επομένως

$$D = AB \Rightarrow DD^{-1} = (AB)D^{-1} \Rightarrow I = A(BD^{-1})$$

   από το ίδιο θεώρημα έπεται ότι το A είναι αντιστρέψιμο και $A^{-1} = BD^{-1}$.

6. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι στοιχεία του L, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t_1 και t_2, ώστε

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = t_2\mathbf{u}$$

   οπότε για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (t_1 + t_2)\mathbf{u} = t\mathbf{u} \in L & \qquad (t = t_1 + t_2) \\ \lambda\mathbf{x} &= \lambda(t_1\mathbf{u}) = (\lambda t_1)\mathbf{u} = t'\mathbf{u} \in L & \qquad (t' = \lambda t_1) \end{aligned}$$

   από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και των πράξεων μεταξύ των διανυσμάτων. Επομένως η συνήθης πρόσθεση στοιχείων του L είναι στοιχείο του L, όπως και ο συνήθης πολλαπλασιασμός στοιχείου του L με σταθερά είναι στοιχείο του L. Το μεδενικό διάνυσμα είναι στοιχείο του L αφού $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$ και αν $\mathbf{v} \in L$, τότε $-\mathbf{v} \in L$ αφού για κάποιο $t \in \mathbb{R}$ είναι $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ επομένως $-\mathbf{v} = (-t)\mathbf{u}$. Η συνήθης πρόσθεση διανυσμάτων όπως και ο πολλαπλασιασμός ικανοποιούν τις ιδιότητες V1 – V8, επομένως η δομή $(L, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

7. Έστω ότι $\mathcal{C}_0[0, 1]$ είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων f στο $[0, 1]$ ώστε $f(0) = f(1) = 0$. Αν f και g είναι στοιχεία του $\mathcal{C}_0[0, 1]$ τότε οι f και g είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, επομένως η $f + g$ όπως και η λf είναι συνεχείς στο ίδιο διάστημα και επιπλέον ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\begin{gathered} (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \qquad (f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \\ \text{και} \quad (\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0, \qquad (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda 0 = 0. \end{gathered}$$

   Συνεπώς το (σύνηθες) άθροισμα στοιχείων του $\mathcal{C}_0[0, 1]$, όπως και ο πολλαπλασιασμός στοιχείου του $\mathcal{C}_0[0, 1]$ με σταθερά είναι στοιχείο του $\mathcal{C}_0[0, 1]$. Η μηδενική συνάρτηση είναι συνεχής, ως σταθερή, προφανώς μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος, άρα ανήκει στο $\mathcal{C}_0[0, 1]$ και αν η $f \in \mathcal{C}_0[0, 1]$ τότε και η $-f$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις συνθήκες στα άκρα του διαστήματος, κατά συνέπεια είναι στοιχείο του $\mathcal{C}_0[0, 1]$. Επιπλέον οι πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και πολλαπλασιασμού με σταθερά ικανοποιούν τις ιδιότητες V1 – V8, επομένως η δομή $(\mathcal{C}_0[0, 1], +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

8. Παρόμοια με τις 6. και 7. Αν $\mathbb{P}_n^*$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n με μηδενικό σταθερό όρο, και $p \in \mathbb{P}_n^*$, τότε

$$p(0) = 0 \Leftrightarrow p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

ΒΣ/ΓΜΗΥ&Π