

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5. Το αντίστροφο μητρώο, Διανυσματικοί χώροι

1. Να βρεθεί μια άνω-κάτω τριγωνική παραγοντοποίηση για το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Για ποιές τρεις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  είναι το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 8 & 7 & \lambda \end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση γιατί συμβαίνει αυτό.

3. Δείξτε ότι για  $a \neq 0$  και  $a \neq b$  το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το αντίστροφο.

4. Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε το μητρώο

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda + 2 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμο.

5. Έστω ότι τα  $A$  και  $B$  είναι τετραγωνικά μητρώα του ίδιου μεγέθους.

(α) Αν  $C$  είναι επίσης τετραγωνικό μητρώο ώστε

$$A(B - C) = I,$$

δείξτε ότι το  $A$  είναι αντιστρέψιμο και ότι  $B = A^{-1} + C$ .

(β) Εάν το  $D = AB$  είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι και το  $A$  είναι αντιστρέψιμο.

6. Εάν  $\mathbf{u}$  ένα μη μηδενικό διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^n$  με  $n \geq 2$ , η σχέση

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}, \quad -\infty < t < +\infty$$

είναι η εξίσωση της ευθείας  $L$  κατά μήκος του διανύσματος  $\mathbf{u}$ . Δείξτε ότι το  $L$  με την πράξη της πρόσθεσης μεταξύ διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά είναι διανυσματικός χώρος.

7. Εξετάστε εάν οι συναρτήσεις στο  $C[0, 1]$  οι οποίες παίρνουν την τιμή 0 στα άκρα του διαστήματος  $[0, 1]$  με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά, αποτελούν διανυσματικό χώρο.
8. Εξετάστε αν τα πολυώνυμα του  $\mathbb{P}_n$  με μηδενικό σταθερό όρο αποτελούν διανυσματικό χώρο.